

THÈSE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES**

École doctorale : MSTII - Mathématiques, Sciences et technologies de l'information, Informatique

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Unité de recherche : Laboratoire Jean Kuntzmann

**Modélisation et simulation numérique de l'étalement d'un fluide dense et à haute température**

**Modelling and simulation of high temperature and density spreading**

Présentée par :

**Thomas SCHIANO**

Direction de thèse :

**Pierre SARAMITO**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS - lab. LJK, Grenoble

Directeur de thèse

**Claude SMUTEK**

MAITRE DE CONFERENCES, Université de la Réunion, LGSR

Co-encadrant de thèse

**Jean-François HAQUET**

PROFESSEUR ASSOCIE, Aix-Marseille Université, CEA

Co-encadrant de thèse

**Barbara BIGOT**

INGENIEURE DE RECHERCHE, CEA, LMAG

Co-encadrante de thèse

Rapporteurs :

**Karim KELFOUN**

MAITRE DE CONFERENCES, Université Clermont Auvergne

**Mickaël ANTONI**

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Aix-Marseille université

Thèse soutenue publiquement le **17 mars 2023**, devant le jury composé de :

**Karim KELFOUN**

MAITRE DE CONFERENCES, Université Clermont Auvergne

Rapporteur

**Mickaël ANTONI**

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Aix-Marseille Université

Rapporteur

**Valérie PERRIER**

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Grenoble INP - ENSIMAG

Présidente

**Guillaume CHAMBON**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, INRAE

Examineur

Invités :

**Pierre SARAMITO**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS - lab. LJK, Grenoble

**Claude SMUTEK**

MAITRE DE CONFERENCES, Université de la Réunion, Laboratoire GéoSciences Réunion - IPGP

**Jean-François HAQUET**

PROFESSEUR ASSOCIE, Aix-Marseille Université, CEA

**Barbara BIGOT**

INGENIEURE DE RECHERCHE, CEA, LMAG



## Résumé

Ce manuscrit a pour objet la modélisation physique et la simulation numérique de l'écoulement (étalement) anisotherme à surface libre d'un fluide viscoplastique dense à haute température (environ 2800°C) dans le cadre d'un hypothétique accident grave d'une centrale nucléaire à eau pressurisée. L'objectif de cette thèse est d'enrichir la description phénoménologique de l'étalement du corium (mélange à haute température d'oxydes d'uranium et de zirconium ainsi que de matériaux de structures qui ont fondu à son contact) généré lors de la fusion du cœur d'un réacteur. Les similitudes entre l'étalement d'un corium prototypique tout oxyde observé lors de l'essai à petite échelle VEU7 au CEA et celui d'une lave volcanique sont mises en évidence, permettant l'adaptation de codes développés pour la volcanologie. L'étude de l'essai VEU7 permet d'identifier les besoins d'amélioration de la modélisation, conduisant au développement d'un nouveau modèle d'écoulement diphasique anisotherme viscoplastique de faible épaisseur pour la prise en compte du dégazage du substrat dans l'écoulement. Des simulations à partir de ce modèle sont réalisées et analysées.

## Summary

This manuscript deals with the physical and numerical modeling of free surface flows (spreading) of non-isothermal, viscoplastic, dense and high-temperature (around 2800°C) fluids, in the scope of an hypothetical severe nuclear accident in a pressurized water reactor. The aim of this thesis is to enrich the phenomenological description of corium (mixture of high temperature uranium and zirconium oxides as well as structural materials molten in contact with it) spreading, generated from reactor core fusion. Similarities between the prototypical, oxide-only experimental small scale spreading test VEU7 from CEA and volcanic lava flow are shown, enabling the adaptation of codes developed for volcanology. A study on the prototypical corium spreading test VEU7 identifies the development needs of the model, leading to the establishment of a new two-phase non-isothermal viscoplastic thin flow model to take into account substrate degassing. Simulations of this last model are then realized and studied.

# Remerciements

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de cette thèse.

Je remercie tout d'abord mes encadrants, Pierre Saramito, Claude Smutek, Jean-François Haquet et Barbara Bigot, pour leur soutien, leur patience, leur disponibilité et leur expertise tout au long de cette aventure. Vos conseils, vos encouragements et votre confiance m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier également les membres de mon jury, Mickaël Antoni, Karim Kelfoun, Valérie Perrier et Guillaume Chambon, pour avoir accepté de lire et d'évaluer mon travail. Vos commentaires et vos suggestions ont été très précieux pour moi.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à ma famille pour leur amour, leur soutien et leur compréhension tout au long de mes études. Votre présence et votre soutien moral ont été essentiels pour moi.

Je remercie mes amis pour leur amitié, leur soutien et leur présence dans ma vie. Vos encouragements et vos sourires ont été une source de motivation pour moi. Je vous souhaite à tous le meilleur pour la suite !

Je tiens à remercier mes collègues du LMAG et du LEAG pour leur collaboration, leur aide et leur soutien tout au long de cette thèse. Votre présence et votre bonne humeur ont rendu cette expérience encore plus agréable.

Enfin, je ne peux pas oublier de remercier mon chien Mali pour sa présence réconfortante et son amour inconditionnel. Tu as été mon compagnon fidèle tout au long de cette aventure.

Merci à tous pour votre contribution à la réussite de cette thèse.





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Accidents graves nucléaires . . . . .	1
1.1.1	Fonctionnement d'un Réacteur à Eau Pressurisée (REP) . . . . .	1
1.1.2	Déroulement d'un accident grave . . . . .	3
1.1.3	Rétention hors-cuve (Ex-Vessel Retention EVR) . . . . .	6
1.2	État de l'art . . . . .	7
1.2.1	Rhéologie des fluides complexes . . . . .	7
1.2.2	Modélisation des écoulements à faible rapport d'aspect . . . . .	8
1.2.3	Modélisation des écoulements multiphasiques . . . . .	9
1.3	Contributions . . . . .	10
1.4	Plan de la thèse . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Modèle tridimensionnel d'étalement anisotherme viscoplastique et analyse dimensionnelle</b>	<b>13</b>
2.1	L'essai VEU7 : mesures et solutions auto-similaires . . . . .	13
2.2	Modèle viscoplastique anisotherme à surface libre . . . . .	18
2.3	Analyse dimensionnelle . . . . .	21
2.4	Comparaison lave/corium . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Modélisation de l'étalement d'un corium viscoplastique lors d'un accident grave d'un réacteur à eau pressurisée</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction . . . . .	30
3.2	Mathematical model . . . . .	33
3.2.1	Tridimensional model . . . . .	33
3.2.2	Bidimensional reduced model . . . . .	36
3.2.3	Numerical resolution in the melt . . . . .	38
3.2.4	Explicit expression in the substrate . . . . .	39
3.3	Comparison between lava and corium . . . . .	40
3.4	Experimental facilities . . . . .	42
3.5	Results and Discussion . . . . .	44
3.5.1	Sensitivity analysis . . . . .	45

3.5.2	3D Visualisation of velocity and temperature field . . . . .	50
3.5.3	Temperature field in the substrate . . . . .	52
3.5.4	Comparison to other nuclear accident spreading code . . . . .	53
3.6	Conclusions . . . . .	55
3.7	Évaluation de l'échauffement du substrat . . . . .	56
3.7.1	Équation de la chaleur dans un milieu infini . . . . .	56
3.7.2	Milieu semi-infini à température initiale constante et température à l'interface $z = 0$ nulle . . . . .	56
3.7.3	Milieu semi-infini, température initiale nulle et condition limite constante . . . . .	58
3.7.4	Milieu semi-infini à température initiale nulle et surface à température évoluant avec le temps . . . . .	59
3.7.5	Pseudo-code pour l'implémentation de la solution . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Modélisation d'un écoulement viscoplastique mince anisotherme avec dégazage</b>	<b>63</b>
4.1	Calcul de la vitesse relative d'une bulle dans un écoulement de corium	63
4.1.1	Calcul de la forme d'une bulle dans un étalement de corium	63
4.1.2	Calcul de la trajectoire d'une bulle lors d'un étalement . . . . .	65
4.1.3	Établissement d'un modèle diphasique à vitesse moyenne à surface libre . . . . .	68
4.2	Introduction . . . . .	72
4.3	Mathematical model . . . . .	74
4.3.1	Tridimensional mixture model . . . . .	75
4.3.2	Dimensional analysis . . . . .	78
4.3.3	Bidimensional reduction . . . . .	82
4.3.4	Numerical resolution . . . . .	84
4.4	Application to corium . . . . .	87
4.5	Results and Discussion . . . . .	88
4.5.1	Numerical convergence analysis . . . . .	88
4.5.2	Sensitivity analysis . . . . .	90
4.5.3	3D Visualization of velocity and volume fraction . . . . .	94
4.6	Conclusions . . . . .	96
4.7	Réduction asymptotique dans le cas multiphasique . . . . .	97
4.7.1	Réduction à l'ordre 0 en $\varepsilon$ . . . . .	97
4.7.2	Intégration dans la hauteur . . . . .	98
4.8	Algorithme de résolution . . . . .	107
4.8.1	Discrétisation temporelle . . . . .	107
4.8.2	Algorithme du point fixe . . . . .	109
4.8.3	Discrétisation spatiale . . . . .	110

---

4.9	Reconstitution du profil 3D et équation de transport de la fraction volumique . . . . .	112
4.10	Distribution du terme source . . . . .	113
4.11	Calcul d'un débit de gaz représentatif de l'essai VEU7 . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>117</b>
<b>A</b>	<b>Problèmes liés à l'utilisation de l'approximation P1</b>	<b>129</b>
<b>B</b>	<b>Intégration dans la hauteur de la coulée avec variation verticale des propriétés matériaux</b>	<b>133</b>
B.1	Impact sur l'équation de transport de la hauteur . . . . .	133
B.2	Impact sur l'équation de conservation de l'énergie . . . . .	136



# Table des figures

1.1	Schéma de fonctionnement d'un REP (1300 MWe ou N4) et de ses principaux circuits. Issu de [1]. . . . .	2
1.2	Schéma d'un crayon combustible et d'un assemblage combustible. Issu de [1]. . . . .	3
1.3	Échelle internationale des événements nucléaires et radiologiques. Issu de [2]. . . . .	4
1.4	Représentation d'un EPR, (a) vue latérale et (b) vue de dessus montrant la chambre d'étalement. Issu de [1]. . . . .	5
1.5	Classification des méthodes numériques pour les écoulements diphasiques. Issu de [37]. . . . .	10
2.1	Section d'essai de VEU7, Boccaccio et al. [57]. . . . .	15
2.2	Vue de l'essai VEU7 à $t = 8.24s$ . La section à gauche de l'image a un substrat en céramique tandis que celle de droite a un substrat en béton siliceux. On observe sur cette dernière un dégazage important localement. [57] . . . . .	16
2.3	Comparaison entre l'évolution du front en fonction du temps pour l'essai VEU7 et les solutions auto-similaires d'Huppert [30] et Longo et al. [59] pour différentes géométries. D'après cette comparaison, l'écoulement du corium dans le cadre de cet essai semble principalement visqueux durant la phase d'approvisionnement puis plus lent sur le substrat en béton par la suite. . . . .	18
2.4	Étalement du corium : géométrie et notations. . . . .	19
3.1	Stress tensor according to deformation rate tensor illustrating the different behaviors of a fluid according to the Herschel-Bulkley model with two parameters : the fluid index, $n$ , and yield stress, $\tau_y$ . For $n = 1$ and $\tau_y = 0$ , fluid is considered as Newtonian, for $n = 1$ and $\tau_y \neq 0$ as Binghamian, and for $n \neq 1$ as viscoplastic. . . . .	32
3.2	Corium spreading : its geometry and notations. . . . .	33

3.3	(a) Auto-generated mesh and (b) Zoom of mesh (a) at the front of the spread. . . . .	39
3.4	Post-mortem view of the VEU7 test, from Journeau et al. [36] . . .	43
3.5	(a) VEU7 spreading test diagram and (b) geometry used for simulations . . . . .	43
3.6	Experimental front position evolution and its comparison to self-similar solutions from [30, 59] for various geometries. We assume from this comparison that the process of corium spreading is mainly viscous during corium inlet feeding. . . . .	44
3.7	Relative error between the computed volume and the theoretical one. As density is considered constant, it is related to mass conservation. . . . .	45
3.8	Simulated front progress for $n = 1$ , $\tau_y = 100 Pa$ and different values of the Shaw model coefficient $Arr$ , and experimental results for the VEU7 test, for both concrete and ceramic substrate channels. . . .	46
3.9	Simulated front progress for $Arr = 7.10^{-3}$ , $\tau_y = 100 Pa$ and different values of the fluid index $n$ , and experimental results for the VEU7 test, for both concrete and ceramic substrate channels. . . .	47
3.10	Simulated front progress for $Arr = 7.10^{-3}$ , $\tau_y = 100 Pa$ and different values of the fluid index $n$ , and experimental results for the VEU7 test, for both concrete and ceramic substrate channels. log-log representation of fig. 3.9 . . . . .	48
3.11	Simulated front progress for $n = 0.66$ , $Arr = 7.10^{-3}$ and different values of the initial yield stress $\tau_y$ , and experimental results for the VEU7 test, for both concrete and ceramic substrate channels. . . .	49
3.12	Evolution of $\int_{\Omega}(h^2)dx$ , for the simulation with $n = 0.66$ and $\tau_y = 200 Pa$ . It shows that the movement of the melt slows down quickly once corium source stops at $t = 7.7s$ . . . . .	50
3.13	(a) Tridimensional reconstruction of the velocity. The top surface color represents height-averaged temperature. (b) Velocity profiles along the $z$ -axis at $t = 5 s$ (during melt supplying), $t = 7 s$ (close to the end of melt supplying), $t = 10 s$ (after the end of melt supply, toward melt front stop) and $t = 20 s$ at $x = 12 cm$ and $y = 10 cm$ .	51
3.14	Concrete substrate temperature evolution for the VEU7 experiment and its simulation, for thermocouples at $x = 12 cm$ , $y = 10 cm$ and $z = -2, -7, -12 mm$ . . . . .	52
3.15	(a) Temperature at $y = 10 cm$ and $t = 5s$ , in both the melt and the substrate. (b) Concrete substrate temperature evolution for the VEU7 simulation at $x = 12 cm$ and $y = 10 cm$ . . . . .	53

3.16	Comparison between the LAVA, CORFLOW, THEMA codes and the present model . . . . .	54
4.1	Diagramme pour déterminer la forme d'une bulle en fonction des paramètres adimensionnels ( $EO, Re, M$ ) (extrait de [76]). . . . .	64
4.2	Évolutions temporelles de la vitesse, le diamètre et la hauteur d'une bulle de vapeur d'eau au cours du temps dans un écoulement de corium. . . . .	67
4.3	Stress tensor according to deformation rate tensor illustrating the different behaviors of a fluid according to the Herschel-Bulkley model with two parameters : the fluid index, $n$ , and yield stress, $\tau_y$ . For $n = 1$ and $\tau_y = 0$ , fluid is considered as Newtonian, for $n = 1$ and $\tau_y \neq 0$ as Binghamian, and for $n \neq 1$ as viscoplastic. . . . .	73
4.4	Multiphase spreading : its geometry and notations . . . . .	75
4.5	(a) Auto-generated mesh and (b) Zoom of mesh (a) at the front of the spread. . . . .	86
4.6	Spatial distribution for the inlet condition $u_z(z = 0)$ and the boundary smoothing function $f(x)_{x_c}$ . . . . .	86
4.7	Simulated front progress for $Arr = 7.10^{-3}$ , $\tau_y = 200 Pa$ , $n = 0.66$ , $hmin = 5.10^{-4} m$ , a degassing velocity of $u_z(z = 0) = 10^{-4} m.s^{-1}$ and different values of time step. . . . .	88
4.8	Simulated front progress for $Arr = 7.10^{-3}$ , $\tau_y = 200 Pa$ , $n = 0.66$ , $dt = 5.10^{-2} m$ , a degassing velocity of $u_z(z = 0) = 10^{-4} m.s^{-1}$ and different values of minimal mesh size. . . . .	89
4.9	Simulated front progress for $Arr = 7.10^{-3}$ , $\tau_y = 200 Pa$ , $n = 0.66$ , a degassing velocity of $u_z(z = 0) = 10^{-4} m.s^{-1}$ and different values of lower volume fraction boundary condition transition region size $x_c$ . . . . .	90
4.10	Simulated front progress for $Arr = 7.10^{-3}$ , $\tau_y = 200 Pa$ , $n = 0.66$ , $u_z(z = 0) = 10^{-5} m.s^{-1}$ and no degassing. . . . .	91
4.11	Simulated front progress for $Arr = 7.10^{-3}$ , $\tau_y = 200 Pa$ , $n = 0.66$ , and different degassing velocities $u_z(z = 0)$ . . . . .	92
4.12	Front position at $t = 100 s$ for $Arr = 7.10^{-3}$ , $\tau_y = 200 Pa$ , $n = 0.66$ , and different degassing velocities $u_z(z = 0)$ . The continuous line is a linear regression of the points for $1.10^{-6} \leq u_z(z = 0) \leq 1.10^{-4}$ with $R^2 = 0.9996$ . . . . .	93
4.13	Simulated gas volume fraction for $Arr = 7.10^{-3}$ , $\tau_y = 200 Pa$ , $n = 0.66$ , and different degassing velocities $u_z(z = 0)$ and zoom at the beginning of the spread. . . . .	94

4.14	(a)3D reconstruction of the velocity field. The upper surface represents $\bar{\phi}$ and (b-d) $1 - \bar{\phi}$ the height-averaged gas volume fraction and $ \mathbf{u} $ along the x-axis for (b) $t = 5.5$ s (c) $t = 7.5$ s and (d) $t = 9.65$ s for $u_z(z = 0) = 10^{-4}$ m.s <sup>-1</sup> . The velocity norm is taken at $y = 0.125$ m and $z = 0.03$ m. . . . .	95
4.15	Gas volume fraction distribution for $y = 0.125$ m at $t = 100$ s for $Arr = 7.10^{-3}$ , $\tau_y = 200$ Pa, $n = 0.66$ , and $u_z(z = 0) = 10^{-4}$ m.s <sup>-1</sup> . . . . .	96
4.16	Simulation d'étalement, utilisant la condition limite (4.5n). La palette de couleur représente la hauteur et la ligne grise correspond à $x = 0$ . De grandes instabilités numériques se trouvent autour de cette position, que nous supposons provenir du changement de condition limite sur la fraction volumique combiné à un maillage trop grossier. . . . .	111
4.17	Évolution de la position du front au court du temps pour $Arr = 7.10^{-3}$ , $\tau_{y,e} = 200$ Pa, $n = 0.66$ , et différentes profondeurs d'échauffement du substrat $z_e$ . . . . .	116
A.1	État arrêté d'une simulation d'étalement utilisant la condition limite (4.5n) et un profil vertical P1. La couleur représente la fraction volume et la ligne noire la position $x = 0$ . Pour la majorité du sous-domaine $x > 0$ et $h > 0$ , la fraction volumique est égale à 1/2. . . . .	131

# Liste des tableaux

2.1	Propriétés thermohydrauliques de l'écoulement d'une lave volcanique du Piton de la Fournaise [16, 61, 17, 62, 63], du corium de l'essai VEU7 [9, 36, 14, 64, 11, 65, 66, 67] et du cas réacteur. . . . .	25
2.2	Propriétés matériaux d'une coulée de lave du Piton de la Fournaise [16, 61, 17, 62, 63], du corium prototypique de l'essai VEU7 [9, 36, 14, 64, 11, 65, 66, 67] et du cas réacteur. . . . .	26
2.3	Critères de similitude, calculés à partir des données des tableaux 2.1 et 2.2. . . . .	26
3.1	Flow properties of the Piton de la Fournaise lava eruption [16, 61, 17, 62, 63] and of the VEU7 corium spreading test [9, 36, 14, 64, 11, 65, 66, 67]. . . . .	41
3.2	Material properties of the Piton de la Fournaise lava eruption [16, 61, 17, 62, 63] and of the VEU7 corium spreading test [9, 36, 14, 64, 11, 65, 66, 67]. . . . .	41
3.3	Dimensionless numbers, computed using the data from Tables 3.1 and 3.2. . . . .	42
4.1	Propriétés physiques du corium (1) et de la vapeur d'eau (2) nécessaires au calcul de la forme des bulles. [36, 78] . . . . .	65
4.2	Flow properties of the VEU7 corium spreading test [9, 64, 11, 36, 14, 65, 66, 67]. . . . .	87
4.3	Material properties of the VEU7 corium spreading test [9, 64, 11, 36, 14, 65, 66, 67]. . . . .	87
4.4	Dimensionless parameters for experiment VEU7. . . . .	88
4.5	. . . . .	115



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Accidents graves nucléaires

#### 1.1.1 Fonctionnement d'un Réacteur à Eau Pressurisée (REP)

Le nucléaire s'est développé en France à partir de 1963. Après avoir construit 9 réacteurs de type graphite gaz (1ère génération), la France décide en 1968 de changer de technologie avec les Réacteurs à Eau sous Pression (REP, 2ème génération), conçus et développés par les Etats- Unis. L'envolée du prix du pétrole en 1973 conduit le gouvernement français à promouvoir un programme de construction de 16 réacteurs de 900 Mégawatts électriques (MWe), suivi après 1976, de 20 réacteurs supplémentaires de 1300 MWe. De 1996 et 2000, 4 autres de 1 450 MWe ont été mis en service, amenant la puissance installée du parc à 63,2 GWe. Un réacteur EPR (3ème génération) d'une puissance de 1650 MWe sur le site de la centrale de Flamanville est sur le point de démarrer, alors que le gouvernement français confirme celle future de 6 EPR2. Depuis juin 2020 (arrêt de Fessenheim), la France possède de 56 réacteurs nucléaires répartis sur 18 centrales qui produisent 67% de son électricité. Les REP utilisent la chaleur dégagée par la fission des atomes pour chauffer l'eau pressurisée et faire tourner une turbine pour produire de l'électricité. Un REP possède trois circuits principaux comme schématisé sur la figure 1.1.

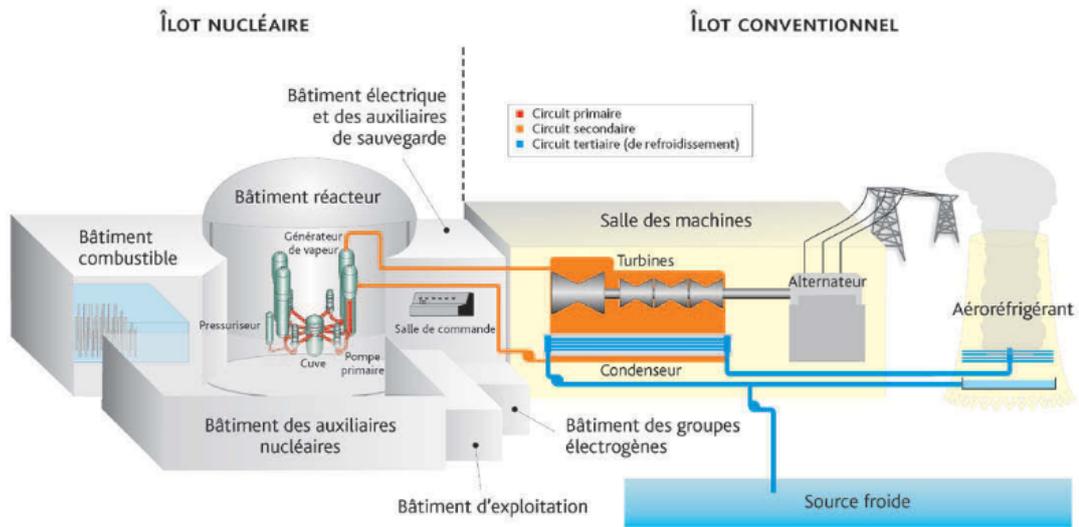


FIGURE 1.1 – Schéma de fonctionnement d'un REP (1300 MWe ou N4) et de ses principaux circuits. Issu de [1].

Dans le circuit primaire se situent les assemblages combustibles qui constituent le cœur du réacteur, où se produit la réaction de fission des atomes. Celle-ci permet de chauffer l'eau du circuit primaire à  $300^{\circ}\text{C}$  et à une pression de 155 bars pour en empêcher l'ébullition.

L'eau de ce premier circuit sert de source chaude au second par l'intermédiaire des générateurs de vapeur. C'est à cet endroit que l'eau du circuit secondaire est presque totalement vaporisée, avant d'aller entraîner le bloc turbine relié à un alternateur produisant le courant électrique. Enfin, le circuit tertiaire comprend un condenseur qui a pour but d'évacuer l'énergie restante du circuit secondaire et condenser totalement sa vapeur.

La sûreté de ces installations repose sur le principe de défense en profondeur, qui vise à maîtriser la réactivité, le refroidissement du combustible irradié et le confinement des substances radioactives. Dans un REP, ce concept se traduit par l'existence de 3 barrières de confinement visibles sur la figure 1.4(b) :

- la première est constituée des gaines qui entourent les pastilles de combustible, représentées en figure 1.2, retenant les produits radioactifs lors de la réaction en chaîne de fission en conditions nominales de fonctionnement,
- la seconde est le circuit primaire en lui-même, notamment la cuve du réacteur,
- enfin, l'enceinte de confinement, composée du bâtiment du circuit primaire.

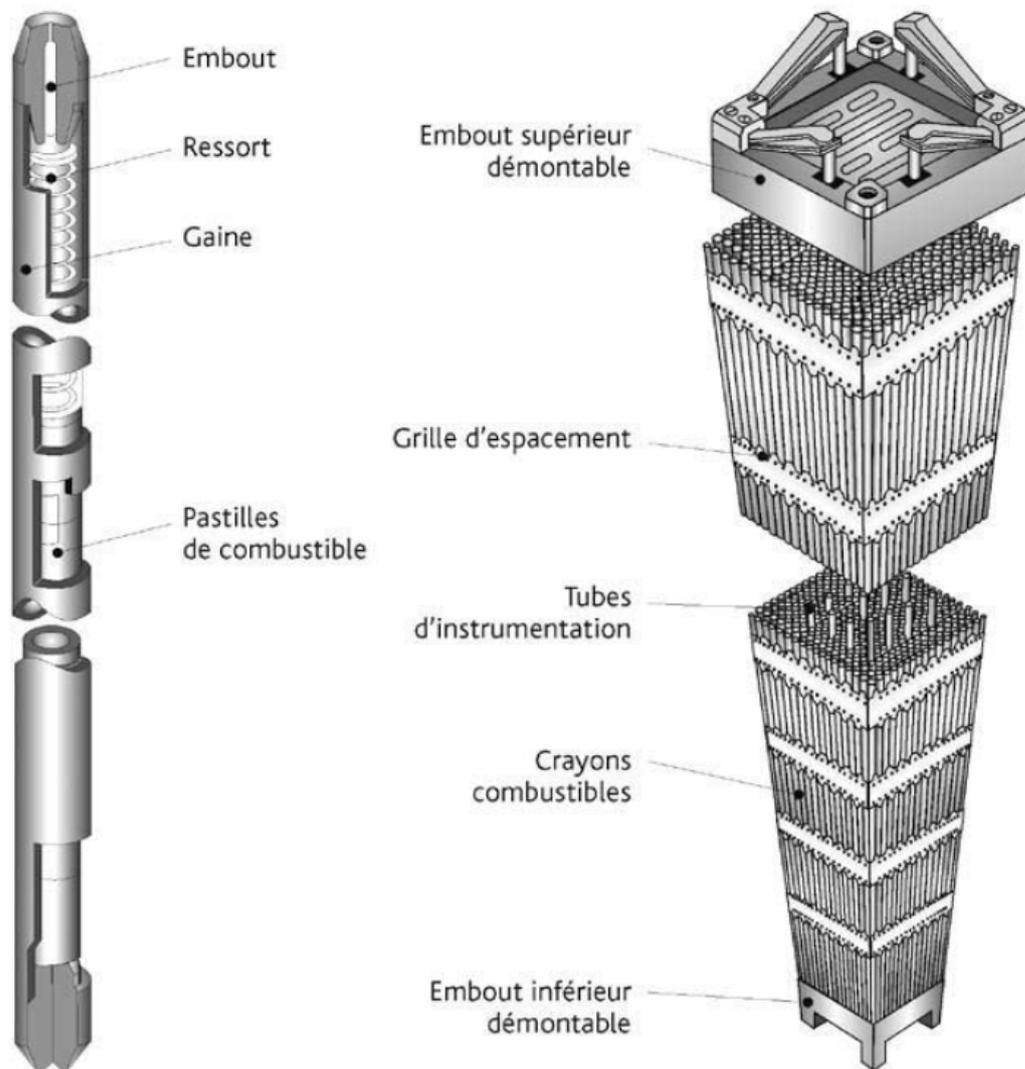


FIGURE 1.2 – Schéma d'un crayon combustible et d'un assemblage combustible. Issu de [1].

### 1.1.2 Déroulement d'un accident grave

Suite à l'accident de Tchernobyl en 1986, l'Agence Internationale de l'Énergie Atomique (AIEA) et l'Agence pour l'énergie nucléaire (NEA) mettent en place en 1990 l'échelle internationale des événements nucléaires en tant qu'outil de communication avec le public, représentée en fig.1.3, les classant en fonction de leurs conséquences radiologiques. On peut parler d'accident nucléaire au dessus du ni-

veau 4. On désigne plus spécifiquement un accident grave (niveau 6) par les événements lors desquels le combustible est dégradé avec fusion plus ou moins importante du cœur du réacteur. Cela peut par exemple survenir après un défaut dans le système de refroidissement ou bien après la perte totale des alimentations électriques externes puis internes entraînant un dénoyage du combustible. Un risque de détérioration voire de brèche des barrières de confinement apparaît du fait de l'augmentation en température du cœur du réacteur du fait d'une perte de maîtrise de la réaction de fission. Le cœur peut atteindre la température de fusion des gaines de zircaloy du combustible, aux alentours de  $2700^{\circ}\text{C}$ , tout en continuant le processus de désintégration des radioéléments instables, fournissant une puissance dite résiduelle. La fusion de ces composants entraîne la formation d'un matériau appelé corium, composé soit d'oxydes, soit d'un mélange oxydes-métaux (du fait des composants en acier du bloc réacteur, comme la cuve) à haute température. S'il n'est pas refroidi, ce corium peut entraîner la défaillance du circuit primaire de diverses façons, par exemple en provoquant la rupture du fond de la cuve ou celle induite des tubes de générateurs de vapeur.

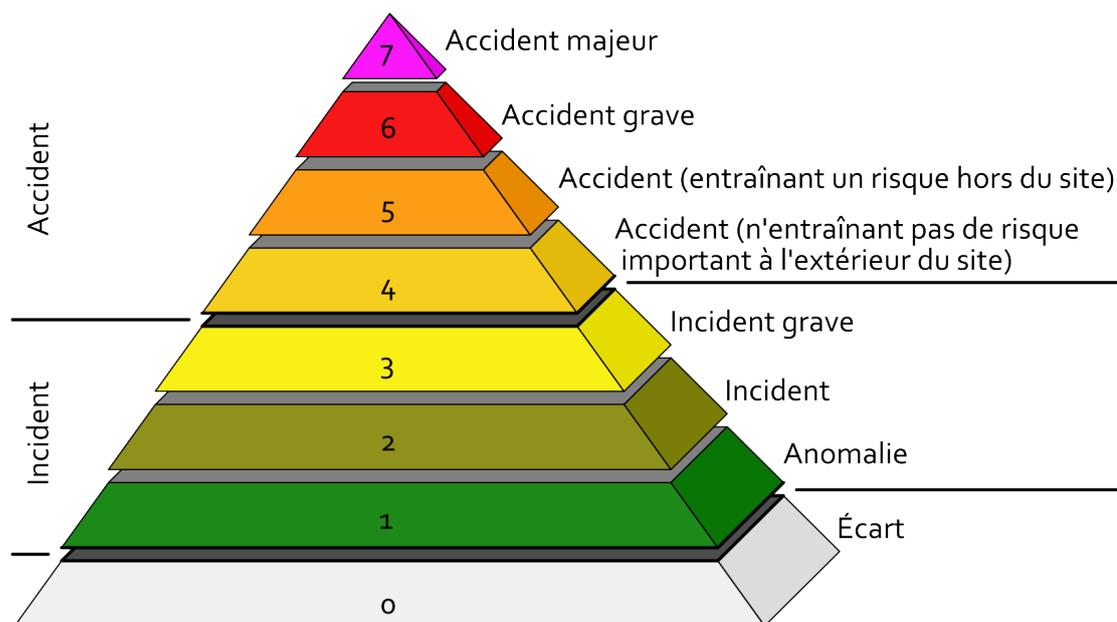
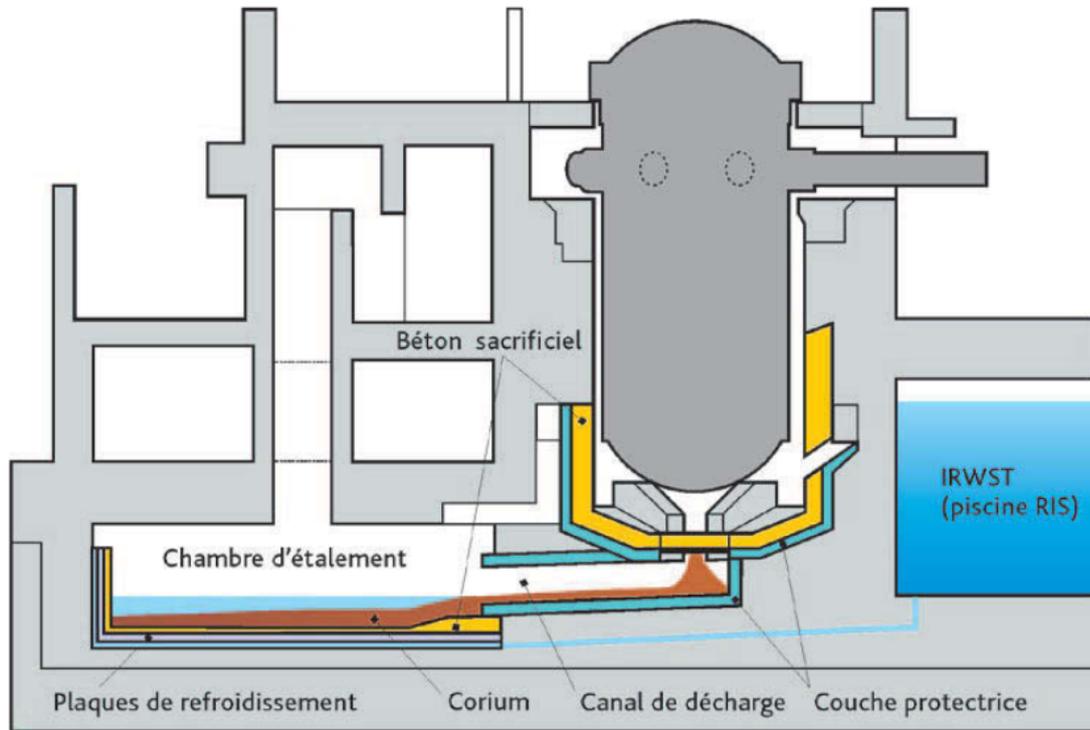
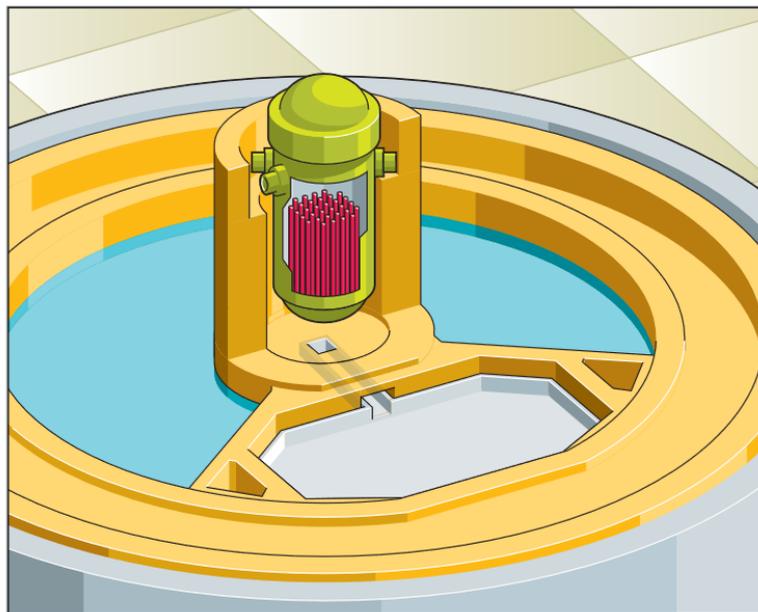


FIGURE 1.3 – Échelle internationale des événements nucléaires et radiologiques. Issu de [2].



(a)



(b)

FIGURE 1.4 – Représentation d'un EPR, (a) vue latérale et (b) vue de dessus montrant la chambre d'étalement. Issu de [1].

### 1.1.3 Rétention hors-cuve (Ex-Vessel Retention EVR)

La stratégie consistant à contenir le corium et les autres éléments radioactifs dans la troisième enceinte de confinement est la rétention hors-cuve (EVR). Après avoir percé la seconde barrière, le corium s'étale sur un radier en béton du bâtiment réacteur puis provoque son échauffement et enfin son ablation (interaction corium-béton, ICB). Dans les réacteurs de 3<sup>ème</sup> génération (EPR), cette éventualité est prise en compte et minimisée à l'aide d'un système de récupération du corium, représenté en figure 1.4, constitué du fond du puits de cuve, d'un bouchon fusible et d'un canal de déviation favorisant l'écoulement du corium dans une chambre d'étalement dotée d'un système de refroidissement.

Afin de comprendre la phénoménologie de l'étalement et de dimensionner les dispositifs décrits précédemment, des expériences ont été menées et des codes de calculs développés. Les premiers programmes d'essais ont eu lieu aux États-Unis [3] pour étudier l'étalement du corium sur le fond du puits de cuve d'un réacteur à eau bouillante. En Europe, des études de l'étalement, numériques et expérimentales, ont été menées pour la conception d'un récupérateur de corium pour le réacteur EPR [4], comme le projet CSC (Corium Spreading and Coolability) sur le concept de récupérateur avec étalement du corium et du renoyage par le bas [5]. La majorité des autres travaux expérimentaux européens ont été réalisés dans le cadre des projets COMAS [6], et ECOSTAR (Ex-vessel COre melt STAbilization Research, essais relatifs à l'étude de la phénoménologie l'étalement et à l'efficacité du renoyage d'un corium étalé par apport d'eau par le haut ou le bas) [7].

Ces programmes sont composés d'expériences analytiques (par exemple les essais CORINE [8] en matériaux simulants réalisés au CEA de Grenoble) et des essais avec des matériaux prototypes (comme les essais VULCANO [9] réalisés au CEA de Cadarache).

D'après Bentaïb et al [1], ces expériences d'étalement réalisées montrent que les phases liquide et solide restent mélangées pour des écoulements de corium en cours de solidification. Un corium pour lequel l'intervalle des températures solidus (en dessous de laquelle seul le solide est en présence) et liquidus (au dessus de laquelle seul le liquide est présent) est important, il apparaît en surface, une "peau" dans un état pâteux (mélange liquide-solide dispersé), plutôt qu'une croûte continue solide. Ainsi, les propriétés du corium évoluent au cours de son étalement [10, 11]. Toujours d'après [1], l'ablation du substrat en béton durant l'étalement expérimental reste faible, ainsi son effet sur la vitesse d'étalement est peu significatif.

Les codes industriels actuels d'étalement du corium THEMA [12] et MELTS-PREAD [13] décrivent le corium comme étant un fluide newtonien, en utilisant la méthode des différences finies pour discrétiser spatialement le problème ou CORFLOW [14] qui utilise une formulation régularisée du modèle viscoplastique de

Bingham du fluide à l'aide de la méthode des volumes finis. Plus récemment, une nouvelle méthode Moving Particle Semi-implicit (MPS) basée sur les méthodes SPH (smoothed-particle hydrodynamics), a été utilisée par Jubaidah et al [15].

## 1.2 État de l'art

### 1.2.1 Rhéologie des fluides complexes

L'étude des éruptions effusives de laves volcaniques, fluides denses et à haute température, présente des similitudes avec l'étalement du corium comme présenté dans le chapitre 2. En effet, les expériences rhéologiques [16, 17] et les analyses de coulées [18] mettent en évidence la présence d'une fraction solide dans la lave du fait de sa nature non-eutectique qui permet de considérer à l'échelle macroscopique une description de sa dynamique par un modèle de fluide viscoplastique. On peut les décrire à l'aide de la loi constitutive d'Herschel-Bulkley [19, 20], eq.(1.1) ci-dessous, la contrainte seuil de ce modèle provenant de la présence de fraction solide. Ainsi, divers fluides complexes présentant ce mélange ont été décrits par cette loi de comportement [21, 22, 23], qui a la particularité de pouvoir décrire les écoulements rhéoépaississants et rhéofluidifiants en plus de prendre en compte la contrainte seuil, en dessous de laquelle localement le milieu se déplace avec un mouvement de corps solide et au dessus de laquelle il est déformé.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \left( K \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{n-1} + \frac{\tau_y}{|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|} \right) \dot{\boldsymbol{\gamma}} & \text{quand } \dot{\boldsymbol{\gamma}} \neq 0, \\ |\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_y & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Avec  $\boldsymbol{\tau}$  le déviateur du tenseur des contraintes totales,  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  le tenseur des taux de déformation,  $K > 0$  la consistance,  $n > 0$  l'indice de fluidité et  $\tau_y$  la contrainte seuil. Les méthodes numériques associées à la résolution des modèles viscoplastiques se décomposent principalement en deux grands groupes : la régularisation et la minimisation par Lagrangien augmenté [24].

La première méthode consiste en l'introduction d'un paramètre  $\xi$  rendant la loi constitutive différentiable et convergeant vers le modèle d'origine lorsqu'il tend vers 0. Un exemple est donné en eq.(1.2) :

$$\boldsymbol{\tau}_\xi = \left( K |\dot{\boldsymbol{\gamma}}|^{n-1} + \frac{\tau_y}{(|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|^2 + \xi^2)^{1/2}} \right) \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (1.2)$$

L'utilisation de cette méthode pour les modèles viscoplastiques a été proposée par Glowinski et al. [25]. Elle permet de définir une viscosité apparente et donc d'assimiler le fluide viscoplastique régularisé à un fluide newtonien, simple à modéliser à moindre coût. Cependant, d'après [26] et [24], la convergence en fonction du

paramètre de cette méthode n'est pas assurée et toujours d'après [24], la régularisation ne permet pas l'identification de zones ayant un mouvement de corps solide. Cela implique un comportement sans arrêt fini en temps infini, empêchant la prédiction d'une zone de coulée finale, importante dans notre application de sûreté du nucléaire car il s'agit de la condition initiale de l'interaction corium-béton.

La seconde méthode, celle de la minimisation du Lagrangien augmenté proposée par Fortin et Glowinski [27] permet de résoudre des problèmes sous contrainte non-différentiables. Saramito et Roquet [28] ont appliqué cette méthode au modèle de Bingham, réduction du modèle d'Herschel-Bulkley dans le cas  $n = 1$ , en la couplant avec une méthode d'adaptation de maillage permettant de réduire son coût de calcul plus élevé que celui des méthodes régularisées. Un exemple de fonctionnelle est utilisée dans [23, 24] pour résoudre un problème de minimisation de l'énergie d'un fluide d'Herschel-Bulkley sans inertie.

### 1.2.2 Modélisation des écoulements à faible rapport d'aspect

Afin de réduire le coût élevé d'une résolution tridimensionnelle d'un écoulement viscoplastique à surface libre, nous pouvons utiliser des arguments géométriques afin de ne résoudre qu'un problème bidimensionnel. Un des premiers modèles de ce type est celui de Saint-Venant [29], négligeant les termes visqueux pour son application aux écoulements d'eau peu profonde.

Ici, nous nous intéressons particulièrement aux écoulements gravito-visqueux (sans inertie), qui utilisent le rapport d'aspect de l'écoulement comme paramètre afin de réaliser une analyse asymptotique. Il s'agit du cadre de la théorie de la lubrification. Huppert [30] a ainsi montré que pour un fluide newtonien, gravito-visqueux à faible rapport d'aspect, il est possible d'obtenir des solutions auto-similaires pour la hauteur et la longueur d'étalement dans des cas axisymétriques ou bidimensionnels. L'extension de cette analyse asymptotique aux écoulements minces viscoplastiques à surface libre est due à Liu and Mei [31], puis Balmforth et al [32] ont conforté cette analyse avec des travaux expérimentaux mettant en œuvre des mélanges avec différentes rhéologies sur des plans inclinés. L'étalement viscoplastique sur une topographie arbitraire fut ensuite étudié par Bernabeu et al [21]. L'ajout de l'équation de conservation de l'énergie est cependant complexe dans le cadre de l'analyse asymptotique, car elle ne se réduit pas en une équation bidimensionnelle avec cette approche. Bercovici and Lin ont étudié ce problème pour les fluides newtoniens dans [33] en utilisant un profil arbitraire pour la température dans la hauteur et Balmforth et al [34] ont étendu la méthode proposée au cas viscoplastique mince avec une consistance dépendante de la température et une contrainte seuil qui en est indépendante. Enfin, Bernabeu et al [35] ont

proposé un modèle utilisant une consistance et une contrainte seuil dépendantes de la température moyennée dans la hauteur selon le modèle de Shaw [16], en comparant les cas de profils polynomiaux d'ordre 2 et 3 de température dans la hauteur.

### 1.2.3 Modélisation des écoulements multiphasiques

Les observations sur les essais d'étalement de corium font état d'un dégazage provenant du substrat [36]. Ainsi, nous souhaitons ajouter aux modèles précédents une description de la fraction volumique de gaz. Un schéma par Mirjalili et al. [37] présentant différentes méthodes disponibles pour décrire les écoulements diphasiques est donné en figure 1.5. Notamment, nous pouvons considérer les deux phases séparément (modèles two-fluids [38]) ou traiter le mélange comme un seul fluide (modèles one-fluid [39, 40]). C'est ce dernier modèle que nous utilisons par la suite. Il permet de modéliser l'écoulement d'un mélange diphasique avec des équations similaires au cas monophasique, en utilisant pour variables la masse volumique et la vitesse du mélange ainsi que la vitesse relative entre les phases. La consistance d'un mélange de liquide et de gaz est proposée par Ishii et Zuber [41]. Les méthodes de capture d'interface ("interface-capturing") reposent sur le transport d'un scalaire représentant la présence des deux fluides dans un domaine spatial défini au travers d'une équation d'advection. Particulièrement, nous adaptons ici la méthode de champ de phase, permettant de suivre cette quantité (ici la fraction volumique), introduite par Cahn et Hilliard [42] puis améliorée par Allen et Cahn [43]. Différentes fermetures pour la vitesse relative sont proposées dans la littérature : les modèles de drift-flux [44, 41, 45] ou de glissement scalaire comparés par Chexal et al [46]. Les forces capillaires seront décrites avec le modèle de continuum surface force (CSF) de Brackbill et al. [47] permettant de les traiter de façon volumique.

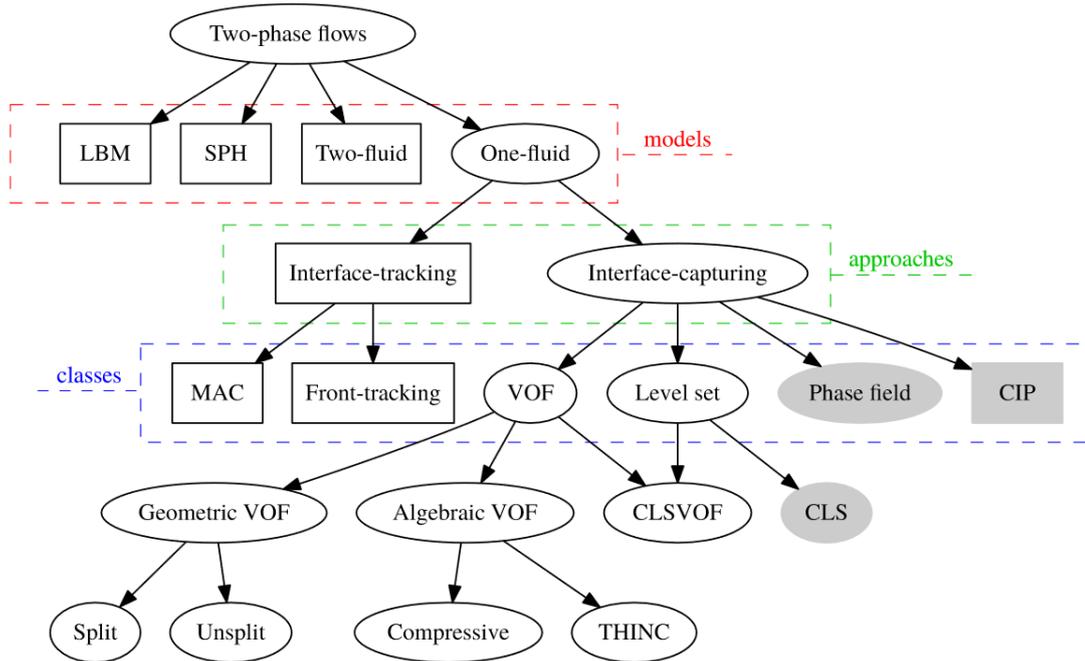


FIGURE 1.5 – Classification des méthodes numériques pour les écoulements diphasiques. Issu de [37].

### 1.3 Contributions

Au cours de ce travail de thèse, nous avons pu mettre en évidence la pertinence et les limitations des modèles développés pour les coulées volcaniques pour leur application aux essais d'étalement de corium prototypique et au cas réacteur. L'utilisation de solutions auto-similaires et le calcul des critères de similitude nous permet d'apporter des arguments en faveur de la modélisation viscoplastique du corium, ainsi que d'émettre l'hypothèse que les effets inertiels sont négligeables dans le cadre de la modélisation de l'expérience VEU7, mais pas à l'échelle d'un réacteur. L'application anisotherme viscoplastique à surface libre pour les laves de Bernabeu et al. [35] a été enrichie en utilisant des substrats de propriétés différentes, en y ajoutant des post-traitements reconstruisant différentes variables thermohydrauliques dans la hauteur de la coulée et aussi en y associant des solutions analytiques de la température dans le substrat. Cette dernière donnée, peu intéressante dans le cadre des écoulements volcaniques, est vitale pour la sûreté des réacteurs nucléaires : elle conditionne l'intégrité de la troisième barrière de confinement et aussi permet d'évaluer l'interaction corium-béton lors de l'étalement, particulièrement en écartant l'influence de l'ablation du substrat mais pas

de son dégazage dans le cadre de l'essai VEU7. Une analyse de sensibilité sur les paramètres rhéologiques de cette expérience a été effectuée.

Enfin, un modèle simple sur l'élévation d'une bulle dans un corium se déplaçant transversalement nous a permis d'effectuer l'hypothèse que la fraction volumique de gaz sera principalement advectée par le corium. Cela nous a permis d'étendre de manière phénoménologique les modèles d'écoulement en couche mince précédemment présentés au cas viscoplastique, anisotherme et diphasique. Ce nouveau modèle a été implémenté à l'aide d'un schéma temporel à pas de temps variable, et de la méthode des éléments finis avec un maillage adaptatif, implémenté avec la librairie C++ Rheolef [48]. Une étude de sensibilité est réalisée sur ce nouveau modèle, ainsi que la reconstruction dans la hauteur de sa fraction volumique et de sa vitesse. Des variantes de ce modèle sont également présentées.

Lors de ce travail de thèse, plusieurs contributions ont été rédigées : une publication acceptée par la revue Nuclear Engineering and Design [49], une soumise à la revue International Journal of Multiphase Flows [50], une publication a été publiée en tant que co-auteur [51] ainsi que deux publications lors de congrès, un national [52] et un international [53].

## 1.4 Plan de la thèse

Le chapitre 2 présente l'expérience VEU7 ainsi que les hypothèses de modélisation retenues à partir de l'analyse des solutions auto-similaires et des critères de similitude. Le modèle viscoplastique anisotherme tridimensionnel de Bernabeu et al. [35] et son adimensionnement y sont détaillés. La comparaison entre la lave et le corium nous conforte dans l'utilisation de ce modèle pour simuler l'étalement d'un corium prototypique VEU7.

Le chapitre 3 correspond à un article accepté par la revue Nuclear Engineering and Design, présentant le modèle réduit bidimensionnel utilisé pour les simulations d'un étalement. Il présente aussi une solution discrète analytique du problème de conduction unidimensionnel déterminée à partir de [54], permettant d'évaluer l'échauffement d'un substrat. Une analyse de sensibilité est conduite sur l'essai VEU7 avec ce modèle et permet de déterminer des ordres de grandeur des paramètres rhéologiques du corium, étant donné que peu de littérature existe sur l'application de modèles viscoplastiques à ce matériau. La représentation tridimensionnelle de la vitesse dans la hauteur permet de mettre en évidence la zone où le fluide à un mouvement de corps solide (plug). Une comparaison en terme de dynamique d'étalement avec des codes industriels y est aussi réalisée. En comparant les températures des thermocouples dans le substrat et simulées, nous considérons que l'ablation est négligeable, mais que le dégazage associé aux produits de dégradation du béton est présent en surface du substrat, en utilisant les températures

caractéristiques de l'ICB tirées de [55].

Ainsi, le chapitre 4 présente un modèle d'une unique bulle dans un écoulement de corium afin de poser les hypothèses menant à l'établissement d'un modèle de mélange one-fluid. Ensuite, ce modèle est détaillé avec son analyse dimensionnelle dans un article soumis au International Journal of Multiphase Flow. Le problème bidimensionnel multiphasique y est donné, ainsi que les hypothèses supplémentaires réalisées afin d'obtenir une simulation stable numériquement. Ce modèle est enfin appliqué à un étalement de corium prototypique avec une géométrie simplifiée. Une étude de convergence des paramètres numériques et une étude de sensibilité sur la distance de déplacement du front de la coulée et sur la fraction volumique de gaz dans le mélange en fonction de la vitesse de dégazage de la source sont effectuées. Dans une certaine plage de vitesse de dégazage, la relation entre celle-ci et la position du front en fin de simulation est linéaire. En complément de cet article, le processus de réduction des équations et l'algorithme de résolution utilisés sont détaillés. Des détails sur la distribution dans la hauteur de la fraction volumique ainsi que sur la distribution du terme source sont donnés. Finalement, une variante essayant de prendre en compte le taux de dégazage d'un substrat en béton siliceux est établie et des pistes sont formulées pour permettre à cette modélisation plus représentative d'aboutir dans le futur.

En annexe, une variante de profil affine de la fraction volumique dans la hauteur est donnée, mais elle n'est pas concluante. Enfin, une tentative de réduction sans faire l'hypothèse que les propriétés matériaux du mélange ne dépendent que des variables moyennées dans la hauteur est donnée, seulement elle n'aboutit pas et nécessite des hypothèses encore plus fortes.

## Chapitre 2

# Modèle tridimensionnel d'étalement anisotherme viscoplastique et analyse dimensionnelle

Dans ce chapitre, nous nous appuyons tout d'abord sur des observations expérimentales effectuées sur l'étalement d'un corium prototypique pour mettre en évidence les propriétés viscoplastiques de ce matériau. Il présente des similarités avec celui d'une lave volcanique. Suivant Bernabeu [56], nous effectuons ensuite une analyse dimensionnelle du problème viscoplastique non-isotherme tridimensionnel et comparons les trois situations suivantes : (1) coulée d'une lave volcanique, (2) essai d'étalement VEU7 avec du corium prototypique et (3) chambre d'étalement d'un réacteur nucléaire de type EPR. Nous montrons que l'écoulement peut être considéré comme viscoplastique et laminaire dans l'expérience VEU7.

### 2.1 L'essai VEU7 : mesures et solutions auto-similaires

Afin d'analyser les principales caractéristiques hydrodynamiques et rhéologiques de l'écoulement d'un corium, nous proposons ici d'utiliser les données de l'essai d'étalement VULCANO VEU7 [57] de la plateforme PLINIUS du CEA Cadarache. Cette expérience consiste en la fusion d'un corium prototypique dans un creuset puis à son déversement sur une section d'essai composée d'une zone de stabilisation et de deux sous-sections de substrats différents, un en béton et un en céramique, telle que représentée par la figure 2.1. Le substrat en béton étant

composé en partie d'eaux libre et liée a pu dégazer au cours de l'essai, tel que photographié sur la fig. 2.2. Le substrat est instrumenté avec des thermocouples à différentes profondeurs permettant une mesure de la température au cours du temps.

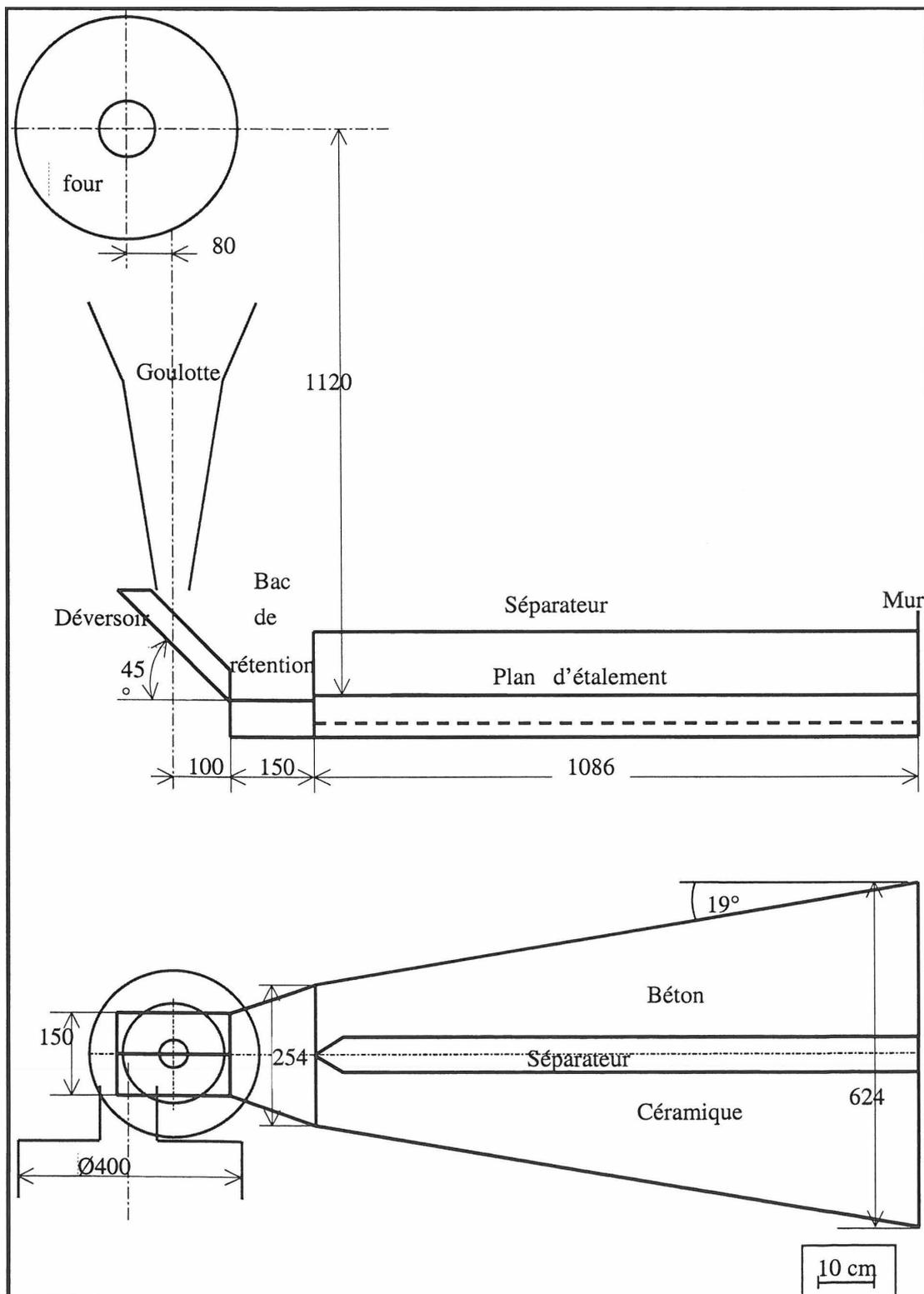


FIGURE 2.1 – Section d'essai de VEU7, Boccaccio et al. [57].

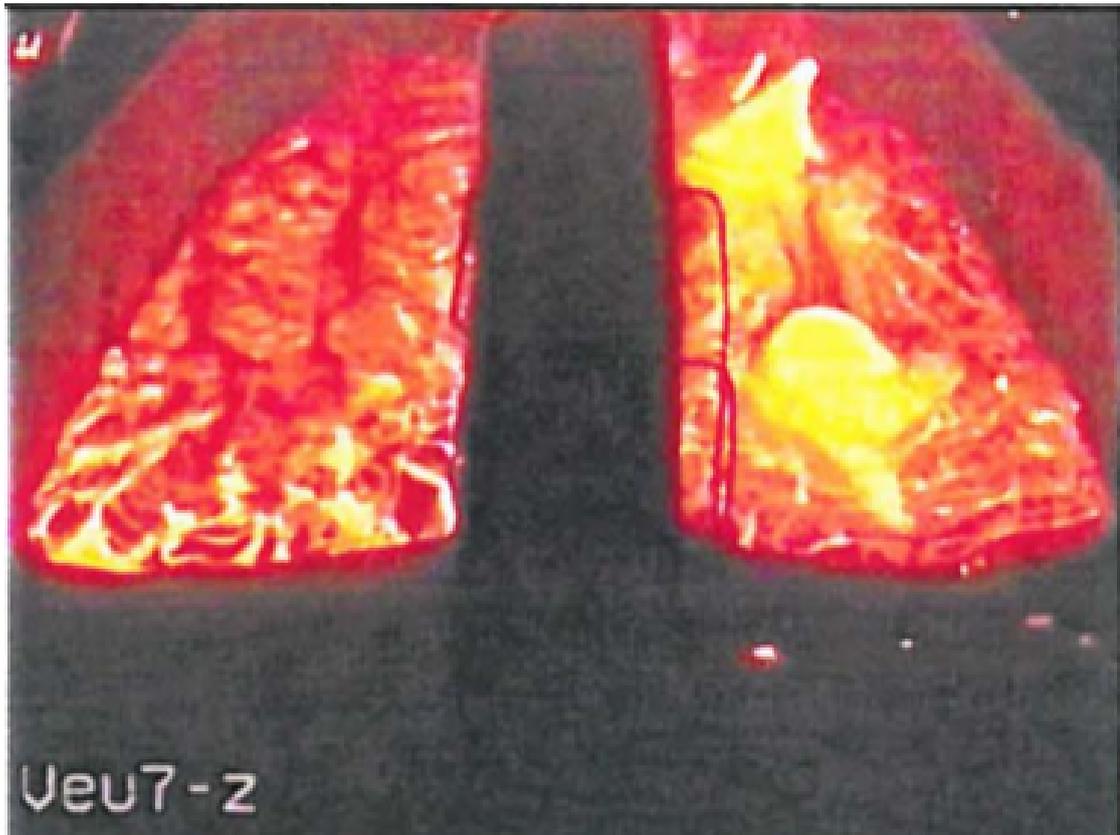


FIGURE 2.2 – Vue de l’essai VEU7 à  $t = 8.24s$ . La section à gauche de l’image a un substrat en céramique tandis que celle de droite a un substrat en béton siliceux. On observe sur cette dernière un dégazage important localement. [57]

La Fig. 2.3 représente notamment la mesure expérimentale de l’évolution du front de corium en fonction du temps. On y observe tout d’abord que cette position n’évolue plus après un certain temps : l’écoulement s’arrête. Cet arrêt n’est pas dû au refroidissement, car la température y est encore de  $1600 \pm 50 K$  [9] qui est au dessus de la température de solidus de  $1273 \pm 75 K$  [36] (donc sans croûte à la surface). Le corium étant une suspension dense de grains solides dans une matrice liquide [58], cet effet d’arrêt à une distance finie s’explique par les propriétés rhéologiques viscoplastiques du corium. Ainsi, un fluide newtonien, non-viscoplastique, s’étalerait indéfiniment, comme représenté sur la Fig. 2.3 par les solutions auto-similaires de Huppert et al.[30] et Longo et al. [59].

Pour compléter cette analyse et justifier notre choix de négliger par la suite le terme inertiel dans l’équation de conservation de la quantité de mouvement (2.4c), nous comparons les résultats expérimentaux de l’expérience VEU7 prove-

nant de Journeau et al. (2006) [36] aux solutions auto-similaires pour la longueur d'étalement d'écoulements gravitaires proposés par Huppert et al. [30] pour le cas newtonien et Longo et al. [59] pour le cas non-newtonien. D'après Huppert et al., en prenant une évolution du volume de la coulée au cours du temps de la forme  $V \sim t^\alpha$  avec  $\alpha$  une constante égale à 1 dans le cas d'un débit constant et 0 pour un débit nul, on obtient pour la longueur d'un étalement bidimensionnel gravito-inertiel la solution auto-similaire suivante :

$$x_N(t) = k_1 t^{\frac{\alpha+2}{3}}, \quad (2.1)$$

avec  $k_1$  une constante et pour un écoulement bidimensionnel gravito-visqueux :

$$x_N(t) = k_1 t^{\frac{3\alpha+1}{5}}, \quad (2.2)$$

Longo et al. proposent une extension de cette dernière solution auto-similaire pour des fluides non-newtoniens suivant une loi de comportement dite "puissance" (semblable à la loi constitutive d'Herschel-Bulkley (2.4a) avec  $\tau_y = 0 Pa$ ) pour des écoulements gravito-visqueux dans des canaux. En prenant le facteur de forme tel que défini dans l'article [59]  $k = 5$ , le facteur d'élargissement du canal  $b = 0.71$  à partir des dimensions de l'expérience VEU7 et  $n = 1$ , on obtient :

$$x_N(t) = k_1 t^{\frac{10\alpha+6}{35.47}}. \quad (2.3)$$

Ces solutions sont représentées avec les résultats expérimentaux sur la figure 2.3. On y observe que les points expérimentaux semblent suivre une tendance similaire à celle de la solution bidimensionnelle gravito-visqueuse d'Huppert et al., avec un ralentissement plus fort pour le cas de l'écoulement sur la section en béton une fois l'alimentation en corium arrêtée à  $t = 7.7s$ . En conclusion, aux temps courts, nous n'observons pas de régime inertiel sur ces courbes, comme décrit par Journeau et al. [36]. Cela peut provenir du fait que l'alimentation en corium est dominante vis-à-vis de ce régime. Aux temps intermédiaires, le régime d'étalement semble être gravito-visqueux, avec une pente de l'évolution du front entre celle d'Huppert et al. et de Longo et al. Enfin, aux temps longs, un régime supplémentaire est observé : un arrêt dû à la viscoplasticité, étant donné que la température est encore trop élevée pour qu'il soit dû à la solidification de la coulée. Cette analyse nous amène à utiliser par la suite le modèle viscoplastique anisotherme présenté par Bernabeu [56] pour l'essai d'étalement VEU7.

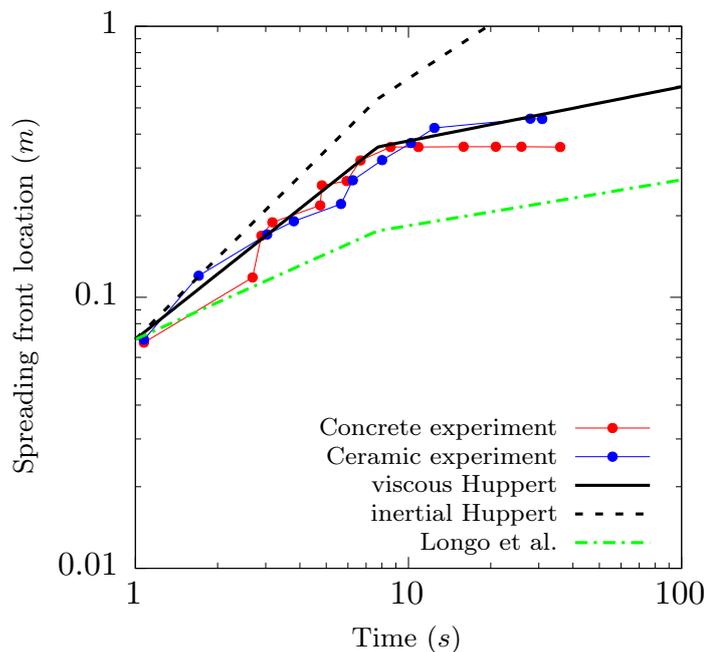


FIGURE 2.3 – Comparaison entre l'évolution du front en fonction du temps pour l'essai VEU7 et les solutions auto-similaires d'Huppert [30] et Longo et al. [59] pour différentes géométries. D'après cette comparaison, l'écoulement du corium dans le cadre de cet essai semble principalement visqueux durant la phase d'approvisionnement puis plus lent sur le substrat en béton par la suite.

## 2.2 Modèle viscoplastique anisotherme à surface libre

Fig. 2.4 montre un schéma de l'étalement. On y trouve deux domaines, notés par les indices  $f$  et  $s$  qui représentent respectivement la coulée et le substrat. Soit le domaine complet  $Q$ , un sous-domaine ouvert  $\mathbb{R}^3$  de bord régulier  $\partial Q$ . Il est séparé en  $Q = Q_f(t) \cup Q_s$  où  $Q_f(t)$  est la région de la coulée, et  $Q_s$  le substrat. La frontière de la coulée se sépare en  $\partial Q_f(t) = \Gamma_f(t) \cup \Gamma_s \cup \Gamma_w$  où  $\Gamma_f(t)$  est la surface libre de l'écoulement,  $\Gamma_s$  la frontière avec le substrat et  $\Gamma_w$  avec les murs verticaux. Enfin  $\Gamma_e$  correspond à la zone d'alimentation.

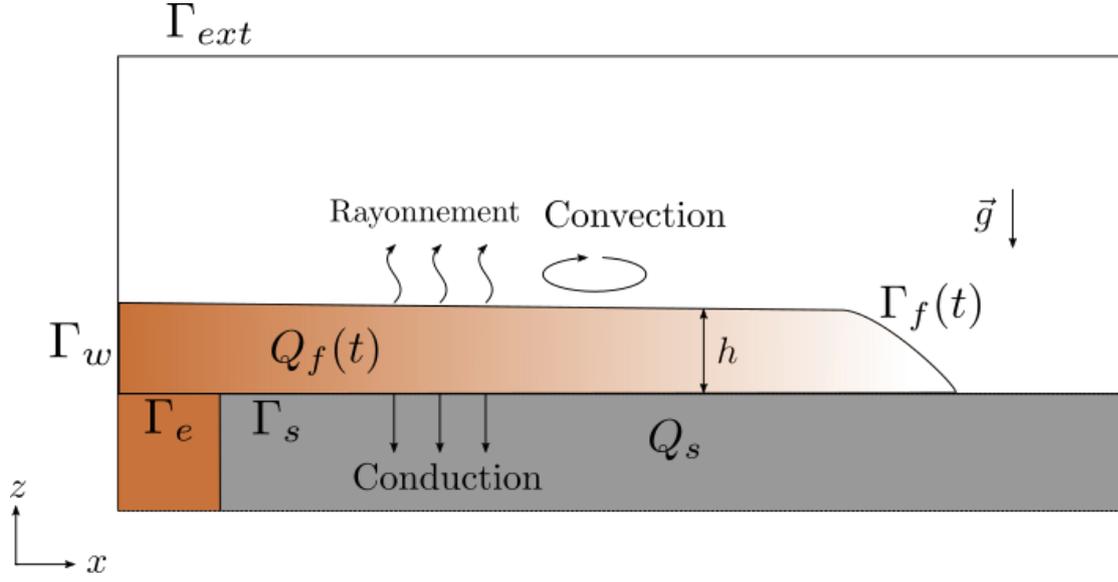


FIGURE 2.4 – Étalement du corium : géométrie et notations.

On considère que l'écoulement a pour loi de comportement celle viscoplastique d'Herschel-Bulkley [60, 19, 20], qui relie le tenseur des contraintes déviatoriques  $\boldsymbol{\tau}$  en fonction du tenseur des taux de déformation  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \left( K(\theta) \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{n-1} + \frac{\tau_y(\theta)}{|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|} \right) \dot{\boldsymbol{\gamma}} & \text{quand } \dot{\boldsymbol{\gamma}} \neq 0, \\ |\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_y(\theta) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.4a)$$

avec  $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T$ ,  $\mathbf{u}$  le champ de vitesse,  $\theta$  la température,  $n$  l'indice de fluidité (aussi appelé indice de loi puissance) ainsi que  $K(\theta)$  la consistance,  $\tau_y(\theta)$  la contrainte seuil, tout deux dépendants de la température. Ces deux derniers paramètres suivent le modèle de Shaw [16] avec le même coefficient :

$$\begin{aligned} K(\theta) &= K_e \exp \left( Arr \left( \frac{\theta_e - \theta}{\theta_e - \theta_a} \right) \right) \\ \tau_y(\theta) &= \tau_{y,e} \exp \left( Arr \left( \frac{\theta_e - \theta}{\theta_e - \theta_a} \right) \right) \end{aligned}$$

avec  $K_e$  et  $\tau_{y,e}$  les valeurs de  $K(\theta)$  et  $\tau_y(\theta)$  à la température de référence de l'alimentation  $\theta_e$ . En faisant l'hypothèse que la masse volumique  $\rho$  est constante, les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie deviennent :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.4b)$$

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \nabla p = \rho \mathbf{g} \quad (2.4c)$$

$$\rho c_p (\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta) - \nabla \cdot (k \nabla \theta) = \frac{\boldsymbol{\tau} : \dot{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \quad (2.4d)$$

avec  $p$  la pression,  $\mathbf{g}$  l'accélération de la gravité,  $c_p$  la chaleur spécifique et  $k$  le coefficient de conductivité thermique. On complète ces équations avec des conditions initiales et aux limites. On considère que la surface libre  $\Gamma_f(t)$  est décrite par la hauteur de la coulée  $h$  telle que  $\Gamma_f(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z = h(t, x, y)\}$ , dont l'équation de transport est :

$$\partial_t h + u_x \partial_x h + u_y \partial_y h - u_z = 0 \quad (2.4e)$$

avec  $u_x$ ,  $u_y$  et  $u_z$  les composantes du champ de vitesse dans un repère cartésien. Les conditions initiales en vitesse, température et hauteur sont :

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \text{ en } Q_f(t=0) \quad (2.4f)$$

$$\theta(t=0) = \theta_0 \text{ en } Q_f(t=0) \cup \Gamma_s \cup Q_s \quad (2.4g)$$

$$h(t=0) = h_0 \text{ sur } \Gamma_s \quad (2.4h)$$

où  $\mathbf{u}_0$ ,  $\theta_0$  et  $h_0$  proviennent d'observations expérimentales. Dans le cas du corium,  $h_0 = 0$ ,  $\mathbf{u}_0 = 0$  et  $\theta_0 = \theta_a$ , la température de l'air ambiant. On impose à la frontière avec le substrat une condition de non-glissement (Dirichlet), avec une vitesse verticale  $w_e$  non-nulle pour la zone source  $\Gamma_e$ , déterminée à partir du débit massique expérimental :

$$u_x = u_y = 0 \text{ et } u_z = w_e \text{ sur } \Gamma_s \cap \partial Q_f(t) \quad (2.4i)$$

On impose une condition de surface libre à la frontière  $\Gamma_f(t)$ , c'est à dire que la projection du tenseur des contraintes de Cauchy sur le vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}$  sortant du domaine de la coulée doit être nulle :

$$(\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_f(t) \quad (2.4j)$$

Les forces capillaires au front ne sont pas prises en comptes. En effet, le nombre d'Eötvös associé est de l'ordre de  $10^2$ , on peut donc les considérer comme étant négligeables. Dans la zone source  $\Gamma_e$ , une condition de Dirichlet en température est imposée :

$$\theta = \theta_e \text{ sur } \Gamma_s \cap \Gamma_e \quad (2.4k)$$

Et à la frontière entre le substrat et la coulée en dehors de la zone source, on considère que le transfert thermique est conductif :

$$\theta|_{Q_f} = \theta|_{Q_s} \text{ sur } \Gamma_s \setminus \Gamma_e \quad (2.4l)$$

$$k \mathbf{n} \cdot \nabla(\theta|_{Q_f}) = k_s \mathbf{n} \cdot \nabla(\theta|_{Q_s}) \text{ sur } \Gamma_s \setminus \Gamma_e \quad (2.4m)$$

On note  $\theta|_{Q_f}$  (respectivement  $\theta|_{Q_s}$ ) la restriction au domaine  $Q(t)$  (respectivement  $Q_s$ ) de la température  $\theta$ . Les transferts radiatifs et convectifs sont pris en compte à la surface libre  $\Gamma_f(t)$  :

$$k \mathbf{n} \cdot \nabla \theta + \epsilon \sigma_{SB} (\theta^4 - \theta_a^4) + \lambda(\theta - \theta_a) = 0 \text{ sur } \Gamma_f(t) \quad (2.4n)$$

avec  $\epsilon$  l'émissivité de la coulée,  $\sigma_{SB}$  la constante de Stefan-Boltzmann et  $\lambda$  le coefficient de transfert convectif. Le transfert thermique dans le substrat est considéré comme purement conductif dans un milieu semi-infini : les résultats expérimentaux présentés en fig.3.14 montrent que lors de l'étalement (arrêt de la coulée aux alentours de 10 s), le substrat n'est que peu profondément échauffé.

$$\rho_s c_{ps} \partial_t \theta - \nabla \cdot (k_s \nabla \theta) = 0 \quad (2.4o)$$

$$\theta(z = -\infty) = \theta_a \quad (2.4p)$$

$$\theta(z = 0) = \theta \quad (2.4q)$$

avec  $\rho_s$ ,  $c_{ps}$  et  $k_s$  respectivement la masse volumique, la chaleur spécifique et le coefficient de conduction du substrat.

## 2.3 Analyse dimensionnelle

Afin de réaliser une comparaison de l'étalement d'une lave volcanique et d'un corium prototypique lors de l'essai VEU7 ou lors d'un accident grave de réacteur nucléaire, une analyse dimensionnelle des équations précédentes est nécessaire. Nous réécrivons ici l'adimensionnement présenté dans [56] des équations d'un écoulement viscoplastique anisotherme à surface libre. Les inconnues sans dimension sont notées avec des tildes. Soit  $H$  la hauteur caractéristique de l'écoulement et  $L$  sa longueur caractéristique, permettant de définir le rapport d'aspect  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \frac{H}{L}.$$

La température est réécrite comme étant  $\theta = \tilde{\theta}(\theta_e - \theta_a) + \theta_a$  ainsi on exprime l'indice de consistance et la contrainte seuil :  $K(\theta) = K_e K(\tilde{\theta})$  et  $\tau_y(\theta) = \tau_{y,e} \tilde{\tau}_y(\tilde{\theta})$ , avec  $K_e = K(\theta_e)$  et  $\tau_{y,e} = \tau_y(\theta_e)$ . L'échelle de la vitesse horizontale utilisée provient de l'équilibre entre les terme visqueux et de gravité telle que présentée par Huppert (1982) [30] et Bernabeu et al. (2013) [21] :

$$U = \left( \frac{\rho |g| H^2}{K_e L} \right)^{1/n} H$$

avec l'échelle de la vitesse verticale  $W = \varepsilon U$ . Aussi, une viscosité caractéristique est donnée dans Huppert (1982),  $\eta = K_e (U/H)^{n-1}$ . On reformule le temps par  $t = T\tilde{t}$  avec l'échelle temporelle  $T = \frac{L}{\bar{v}}$  et l'échelle de pression  $p = P\tilde{p}$  avec  $P = \rho |g| H$ . En utilisant le changement suivant de variables :

$$x = L\tilde{x}, \quad y = L\tilde{y}, \quad z = H\tilde{z}, \quad h = H\tilde{h}, \quad u_x = U\tilde{u}_x, \quad u_y = U\tilde{u}_y, \quad u_z = W\tilde{u}_z,$$

on peut réécrire les équations (2.4a)-(2.4q) sans dimension. Pour le reste de ce chapitre, les équations étant sans dimension, les tildes sont omis par souci de légèreté de la notation. L'utilisation du rapport d'aspect permet d'introduire un caractère anisotropique aux équations et ainsi la réduction asymptotique du problème.

### Équation constitutive sans dimension

D'après Bernabeu et al. (2013) [21], on définit le nombre de Bingham  $Bi$  comme un rapport des aspects viscoplastiques et visqueux :

$$Bi = \frac{\tau_{y,e} H}{\eta U},$$

et on reformule de façon non dimensionnelle la loi de comportement d'Herschel-Bulkley 2.4a :

$$\begin{cases} \tau_{ij} = \left( \frac{\tau_{y,e} Bi}{\varepsilon |\dot{\gamma}|} + \varepsilon |\dot{\gamma}|^{n-1} \right) \dot{\gamma}_{ij} \\ \varepsilon |\boldsymbol{\tau}| < Bi \end{cases} \quad (2.5a)$$

En notant les normes des tenseurs  $|\dot{\gamma}| = \varepsilon^{-1} E$  et  $|\boldsymbol{\tau}| = \varepsilon^{-1} T$ , avec  $E = [\varepsilon^2 (\partial_x u_y + \partial_y u_x)^2 + 2\varepsilon^2 (\partial_x u_x)^2 + 2\varepsilon^2 (\partial_y u_y)^2 + 2\varepsilon^2 (\partial_x u_x + \partial_y u_y)^2 + (\partial_z u_x \varepsilon^2 \partial_x u_z)^2 + (\partial_z u_y \varepsilon^2 \partial_y u_z)^2]^{1/2}$  et  $T = [\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2 + \tau_{zz}^2) + \varepsilon^2 \tau_{xy}^2]^{1/2}$ .

### Équations adimensionnelles de conservation

L'équation de conservation de la masse (2.4b) reste inchangée :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.5b)$$

En définissant les nombres de Reynolds  $Re$  et de Froude  $Fr$  :

$$Re = \frac{\rho UL}{K_e},$$

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{|g|L}}$$

les équations de conservation de la quantité de mouvement projetées sur les axes  $/x_i$  avec  $i \in \{x, y\}$  deviennent :

$$(\partial_t u_i + u_x \partial_x u_i + u_y \partial_y u_i + u_z \partial_z u_i) = -\frac{1}{Fr^2} \partial_i p + \frac{1}{Re} \left( \partial_x \tau_{ix} + \partial_y \tau_{iy} + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z \tau_{iz} \right) \quad (2.5c)$$

et sa projection selon l'axe  $/z$  est :

$$(\partial_t u_z + u_x \partial_x u_z + u_y \partial_y u_z + u_z \partial_z u_z) = -\frac{1}{\varepsilon^2 Fr^2} \partial_z p + \frac{1}{\varepsilon^2 Re} (\partial_x \tau_{zx} + \partial_y \tau_{zy} + \partial_z \tau_{zz}) \quad (2.5d)$$

En utilisant les nombres de Péclet  $Pe$  et de Brinkman  $Br$  définis comme suit :

$$Pe = \frac{LU \rho c_p}{k}, \quad (2.5e)$$

$$Br = \frac{\eta U^2}{k(\theta_e - \theta_a)} \quad (2.5f)$$

on obtient la forme adimensionnelle de l'équation de conservation de l'énergie :

$$(\partial_t(\theta) + u \cdot \nabla \theta) = \frac{1}{Pe} ((\partial_{xx} \theta + \partial_{yy} \theta)) + \frac{1}{\varepsilon^2 Pe} (\partial_{zz} \theta) + \frac{Br}{2Pe} \left( \varepsilon^2 \sum_{\alpha, \beta} \tau_{\alpha\beta} \dot{\gamma}_{\alpha\beta} + \varepsilon^2 \tau_{zz} \dot{\gamma}_{zz} + \sum_{\alpha} \tau_{\alpha z} \dot{\gamma}_{\alpha z} \right) \quad (2.5g)$$

avec  $\alpha, \beta \in \{x, y\}^2$ . L'équation de transport de la surface libre (2.4e) n'est pas modifiée par ce procédé d'adimensionnement :

$$\partial_t h + u_x \partial_x h + u_y \partial_y h - u_z = 0 \quad (2.5h)$$

### Conditions initiales et aux limites sans dimension

De la même manière, les conditions initiales et aux limites sont adimensionnées de façon anisotropique. Les conditions initiales sont inchangées par ce procédé :

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \text{ dans } Q_f(t=0) \quad (2.5i)$$

$$\theta(t=0) = \theta_0 \text{ dans } Q_f(t=0) \cup \Gamma_s \cup Q_s \quad (2.5j)$$

$$h(t=0) = h_0 \text{ sur } \Gamma_s, \quad (2.5k)$$

tout comme les conditions de Dirichlet en température et vitesse :

$$u_x = u_y = 0 \text{ et } u_z = w_e \text{ sur } \Gamma_s \cap \partial Q_f(t) \quad (2.5l)$$

$$\theta = 1 \text{ sur } \Gamma_s \cap \Gamma_e. \quad (2.5m)$$

En développant le produit scalaire entre le vecteur normal unitaire sortant et le tenseur des contraintes de Cauchy en  $z = h$ , on obtient :

$$-(\varepsilon^2 \tau_{xx} - p) \partial_x(h) - \varepsilon^2 \tau_{xy} \partial_y(h) + \tau_{xz} = 0 \quad (2.5n)$$

$$-\varepsilon^2 \tau_{xy} \partial_x(h) - (\varepsilon^2 \tau_{yy} - p) \partial_y(h) + \tau_{yz} = 0 \quad (2.5o)$$

$$-\varepsilon^2 \tau_{xz} \partial_x(h) - \varepsilon^2 \tau_{yz} \partial_y(h) + \varepsilon^2 \tau_{zz} + p = 0 \quad (2.5p)$$

Le transfert conductif à la frontière  $\Gamma_s$  devient :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 (\partial_x(h) \partial_x(\theta|_{Q_f}) + \partial_y(h) \partial_y(\theta|_{Q_f})) - \partial_z(\theta|_{Q_f}) = \\ - \frac{k_s}{k} (\varepsilon^2 (\partial_x(h) \partial_x(\theta|_{Q_s}) + \partial_y(h) \partial_y(\theta|_{Q_s})) - \partial_z(\theta|_{Q_s})) \end{aligned} \quad (2.5q)$$

et pour  $\Gamma_e$ , la condition devient  $\theta = 1$ . Le transfert thermique à la surface libre  $\Gamma_f(t)$  adimensionné s'écrit :

$$-\varepsilon^2 (\partial_x(h) \partial_x(\theta) + \partial_y(h) \partial_y(\theta)) + \partial_z(\theta) + Rp_\psi(\theta)\theta + Nu\theta = 0, \quad (2.5r)$$

où  $R = \frac{H\varepsilon\sigma_{SB}(\theta_e - \theta_a)^3}{k}$  un nombre de rayonnement,  $Nu = \frac{\lambda H}{k}$  le nombre de Nusselt,  $\psi = \frac{\theta_a}{\theta_e - \theta_a}$  un rapport de température et  $p_\psi = (\theta)^3 + 4\psi(\theta)^2 + 6\psi^2(\theta) + 4\psi^3$  un polynôme utilisé afin de linéariser le terme de rayonnement. En considérant le transfert conductif dans le substrat comme purement vertical, on obtient :

$$\partial_t \theta_s = Fo \partial_{zz} \theta_s \quad (2.5s)$$

avec le nombre de Fourier  $Fo = \frac{kT}{L^2}$  et la condition initiale et celle aux limites :

$$\theta_s = \theta \text{ sur } \Gamma_s \quad (2.5t)$$

$$\theta_s(z = -\infty) = 0 \quad (2.5u)$$

$$\theta_s(t = 0) = 0 \quad (2.5v)$$

## 2.4 Comparaison lave/corium

L'analyse dimensionnelle réalisée en §2.3 nous a permis de mettre en exergue des nombres adimensionnels afin de comparer l'éruption d'une lave volcanique étudiée par Bernabeu et al. [35] avec l'étalement d'un corium prototypique lors l'essai VEU7 décrit en §2.1 ou lors d'un accident grave d'un réacteur nucléaire. Ils sont calculés à partir des propriétés thermohydrauliques des écoulements et thermophysiques des matériaux données dans les tableaux 2.1 et 2.2. Celles des laves sont issues de mesures in situ de l'éruption en 2010 du Piton de la Fournaise ou d'études générales [16, 61, 17, 62, 63]. Celles du corium proviennent des mesures sur l'essai VEU7 et de la littérature [36, 9, 14, 64, 11, 65, 66, 67]. Les critères de similitudes utilisés sont donnés dans la table 2.3. Ces propriétés sont prises à la température initiale  $\theta_e$ , à savoir 1423 K pour la lave et 2450 K pour le corium.

TABLE 2.1 – Propriétés thermohydrauliques de l'écoulement d'une lave volcanique du Piton de la Fournaise [16, 61, 17, 62, 63], du corium de l'essai VEU7 [9, 36, 14, 64, 11, 65, 66, 67] et du cas réacteur.

Quantité	Symbole	Lave	Corium	Réacteur
Hauteur caractéristique $m$	$H$	1	$6.5 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-1}$
Longueur caractéristique $m$	$L$	$10^3$	$4.0 \cdot 10^{-1}$	$10^1$
Rapport d'aspect –	$\varepsilon = \frac{H}{L}$	$10^{-3}$	0.15	$1.5 \cdot 10^{-2}$
Vitesse caractéristique $m.s^{-1}$	$U$	$2.16 \cdot 10^{-3}$	1.53	1.6
Température d'entrée du fluide $K$	$\theta_e$	1423	2450	2640
Temp. de l'env. et init. du sub. $K$	$\theta_a$	303	303	303

Le nombre de Péclet est élevé dans les trois cas, ce qui indique que le transfert de chaleur dans la coulée est majoritairement advectif plutôt que convectif. Le nombre de Stanton est utilisé dans le tableau 2.3 à la place du nombre de Nusselt car celui-ci n'est pas un critère de similitude. Il est relativement faible par rapport au nombre de rayonnement  $R$ , ainsi le transfert à la surface libre est dominé par ce rayonnement. Dans le cas d'un étalement sous eau, qui est possible à la fois dans le cas de la lave et celui du corium, ce mécanisme n'est peut-être plus dominant, les

TABLE 2.2 – Propriétés matériaux d’une coulée de lave du Piton de la Fournaise [16, 61, 17, 62, 63], du corium prototypique de l’essai VEU7 [9, 36, 14, 64, 11, 65, 66, 67] et du cas réacteur.

Quantité	Symbole	Lave	VEU7	Réacteur
Masse volumique de la coulée ( $kg.m^{-3}$ )	$\rho$	2200	5100	6797
Masse volumique de l’air ( $kg.m^{-3}$ )	$\rho_a$	1.2	1.2	1.2
Viscosité à la température $\theta_e$ ( $Pa.s$ )	$K_e$	$10^4$	$2.24 \cdot 10^1$	$9.19 \cdot 10^{-3}$
Contrainte seuil à la temp. $\theta_e$ ( $Pa$ )	$\tau_{y,e}$	$10^2$	$10^2$	1
Émissivité (–)	$\epsilon$	0.95	0.8	0.8
Conductivité thermique ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ )	$k$	2	3	2.45
Chaleur spécifique ( $J.kg^{-1}.K^{-1}$ )	$c_p$	1225	995.6	713
Coefficient convectif ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ )	$\lambda$	80	300	300

TABLE 2.3 – Critères de similitude, calculés à partir des données des tableaux 2.1 et 2.2.

Critère de similitude	Lave	Corium	Réacteur
Nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho UL}{K_e}$	$4.75 \cdot 10^{-1}$	$1.40 \cdot 10^2$	$1.18 \cdot 10^7$
Nombre de Bingham $Bi = \frac{\tau_{y,e} L}{\eta U}$	4.630	$1.890 \cdot 10^{-1}$	$1.17 \cdot 10^2$
Nombre de Péclet $Pe = \frac{\rho c_p UL}{k}$	$2.91 \cdot 10^6$	$1.69 \cdot 10^5$	$3.17 \cdot 10^8$
Nombre de Brinkman $Br = \frac{U^2 K_e}{k(\theta_e - \theta_a)}$	$2.08 \cdot 10^{-5}$	$1.25 \cdot 10^{-2}$	$5.12 \cdot 10^{-6}$
Nombre de Stanton $St = \frac{\lambda}{\rho U c_p} = \frac{Nu}{Pe}$	$1.37 \cdot 10^{-5}$	$1.85 \cdot 10^{-4}$	$1.38 \cdot 10^{-4}$
Nombre de Rayonnement $R = \frac{\epsilon \sigma_{SB} (\theta_e - \theta_a)^3 L}{k}$	$3.78 \cdot 10^1$	$2.70 \cdot 10^1$	$3.48 \cdot 10^1$

échanges convectifs du fait de l’ébullition à la surface libre étant potentiellement plus élevés.

Les étalements de lave et de corium sont tout deux laminaires, leur nombre de Reynolds étant inférieur à 1000. Cependant, les forces inertielles ont plusieurs ordres de grandeur de plus dans le second cas. De plus, le cas VEU7 n’est pas représentatif d’un hypothétique étalement d’accident grave nucléaire : l’écoulement y serait turbulent car la longueur d’étalement y serait certainement plus grande et la quantité de matière plus élevée.

Le nombre de Brinkman est considéré dans tous les cas comme faible et donc la variation d’énergie du fait de la contrainte de cisaillement est négligée.

Le nombre de Bingham pour le corium est plus faible que dans le cas des laves, en effet les propriétés utilisées dans ce premier cas sont à plus haute température. En utilisant le modèle de Rammaciotti et al. [11] pour la viscosité dynamique et celui d’Ancey et Jorrot [68] pour la contrainte seuil, on obtient un nombre de Bingham de 2 pour un corium prototypique à 1500 K, une température

plus proche de celle de la lave. Dans le cas réacteur, la longueur caractéristique étant plus grande et la viscosité fortement plus faible, le nombre de Bingham est même plus de deux fois plus grand que dans le cas des laves, ce qui traduit un aspect viscoplastique non négligeable dans ce cas.

À partir de ces résultats, nous pensons que le comportement de l'étalement du corium lors de l'essai VEU7 est similaire à celui de la lave, ce qui justifie l'utilisation du modèle viscoplastique anisotherme développé par Bernabeu et al [35]. Cependant, il est nécessaire d'apporter des précisions sur la partie inertielle : celle-ci est négligée dans le cas des laves, ici il est moins clair que ce phénomène peut l'être. Nous calculons donc les temps caractéristiques des différents phénomènes afin de compléter cette analyse : les temps inertiel, visqueux et hydrostatique sont respectivement  $t_{inertia} = \frac{L}{U} = 0.26s$ ,  $t_{viscosity} = \frac{H^2\rho}{K_e} = 0.96s$  et  $t_{hydrostatic} = \frac{LU}{gH} = 0.96s$  tous du même ordre. Le temps inertiel est faible vis-à-vis du temps de l'expérience ( $\sim 10 s$ ), ce qui signifie que les termes visqueux et gravitaire dominent pour la majorité de sa durée l'écoulement. Par ailleurs, le temps caractéristique de la diffusion thermique  $t_{thermal} = \frac{H^2\rho c_p}{k} = 7150s$  a 4 ordres de grandeur de plus, ce qui indique de faibles variations de température dans la hauteur de l'écoulement, cependant des variations locales proches des interfaces peuvent venir influencer l'écoulement à travers le modèle de Shaw.



## Chapitre 3

# Modélisation de l'étalement d'un corium viscoplastique lors d'un accident grave d'un réacteur à eau pressurisée

Ce chapitre correspond à l'article "A viscoplastic approach to corium spreading during a severe nuclear accident" accepté par le journal Nuclear Engineering and Design. Il reprend d'une part le modèle bidimensionnel développé par Bernabeu et al. [35], réduction du modèle tridimensionnel présenté en section §2.2 et présente d'autre part une comparaison entre l'étalement de laves volcaniques et celui d'un corium prototypique tout oxyde lors de l'essai VEU7 réalisé au CEA Cadarache [9] (§2.1).

Il montre la pertinence de la modélisation viscoplastique du corium, notamment à l'aide de solutions auto-similaires décrites dans la section §2.1, présente une analyse de sensibilité sur les paramètres de la loi de comportement d'Herschel-Bulkley en se basant sur les résultats expérimentaux de l'essai VEU7. Il démontre aussi la possibilité de reconstruire les champs tridimensionnels en vitesse et température à partir des solutions bidimensionnelles. Cela permet une comparaison entre les températures mesurées dans le substrat lors de l'expérience et celles simulées à l'aide de Rheolef [48]. Les écarts observés mettent en évidence la nécessité d'étudier le dégazage du substrat quand sa température est supérieure à celle de vaporisation de l'eau.

## A viscoplastic approach to corium spreading during a severe nuclear accident

Thomas Schiano<sup>a,b,\*</sup>, Barbara Bigot<sup>a</sup>, Jean-François Haquet<sup>a</sup>, Pierre Saramito<sup>b</sup>, Claude Smutek<sup>c</sup>

<sup>a</sup>CEA, DES, IRESNE, DTN, SMTA, LMAG, Cadarache F-13108 St Paul Lez Durance France

<sup>b</sup>Laboratoire Jean Kuntzmann, Grenoble-Alpes University, 700 Avenue Centrale, 38400 Saint Martin d'Hères

<sup>c</sup>Laboratoire GéoSciences Réunion, Réunion University, Institut de Physique du Globe de Paris, Sorbonne Paris-Cité, 15 av. René Cassin, 97400 Saint-Denis

---

### Abstract

A viscoplastic model for lava is presented, and its use for corium spreading is argued with dimensionless numbers. It describes the tridimensional flow as non-Newtonian and non-isothermal. Using an adaptive finite element method based on C++ library Rheolef, simulations are ran and compared to the VEU7 corium spreading test. A sensitivity analysis on the viscoplastic parameters of corium that are not well-known is conducted. Tridimensional solution of the problem is computed from the bidimensional height-averaged solution.

*Keywords:* Spreading, Corium, Lava, Severe accidents, Simulation

---

## 3.1 Introduction

During a nuclear reactor severe accident such as those of Three Mile Island, Chernobyl or Fukushima, it is crucial to contain the radiological consequences to the power plant. A severe accident of a Pressurized Water Reactor (PWR) occurs when the nuclear fuel, in case of loss of cooling, melts and mixes with the core structures (assemblies and internal structures) to form a magma so-called corium (mixture of oxides and metals at 3000K). Several strategies are studied to cool the corium and to limit its propagation in the reactor plant in order to avoid the outside contamination : the In-Vessel Retention (IVR) whose purpose is to contain and cool the corium in the vessel lower head ; and the Ex-Vessel Retention (EVR) whose purpose is to spread the corium on the basemat to promote its cooling and prevent basemat ablation by increasing the corium cooling surface and thus reducing the thermal load on the reactor structure. End of spreading serves as the initial condition of the subsequent EVR part, called the Molten Core-Concrete Interaction (MCCI) [9]. This paper focuses on the EVR strategy dedicated to the corium spreading. Understanding the corium spreading is a crucial issue for mitigation strategies in future reactors to assess the consequences of a severe ac-

cident during the propagation of corium and to implement efficient solutions of corium cooling before the integrity of the containment barrier is threatened. In the 90's, the EVR strategy was integrated into the design of European Pressurized Reactor (EPR) in which a core-catcher concept is dedicated to the spreading of the melt on a concrete basemat [4]. In this context, in early 2000s, prototypic corium spreading experiments such as the VULCANO tests [9] and subsequent benchmark on the VEU7 test [36] provide valuable experimental data for a laminar regime corresponding to the end of the spreading. More recently, the VEU9 test in the same facility yielded more insight on the use of sacrificial material on spreading sections [69, 51]. These data tests allow evaluating the safety codes. Current industrial corium spreading codes including THEMA [12] and MELTSPREAD [13] describe the corium as a Newtonian fluid with the finite difference method as spatial discretization or CORFLOW [14] using a regularized viscoplastic Binghamian description of the fluid through the finite volume method. More recently, MELTSPREAD-CORQUENCH [70] as shown capabilities to describe debris cooling by water ingression, crust anchoring and melt eruption mechanisms during spreading, and a new Moving Particle Semi-implicit (MPS) method has been proposed by Yamaji et al. [71] for MCCI in severe accidents.

High density and temperature fluid spreading is an issue met in many situations such as volcanic lava flows and nuclear severe accidents. These are described by complex multiphase flows characterized by coupled multi-physics phenomena such as solidification due to heat transfers (at the surface by radiation or by convection in the presence of water, with the substrate by conduction), the rheology of the fluid (possibly non Newtonian) or interactions with the substrate (ablation, degassing). A viscoplastic (non Newtonian) description of corium has been gathering interest since the viscosity and yield stress measurements made by Roche et al. [64]. The presence of a solid fraction in corium due to its non eutectic properties lead us to consider a greater range of fluid behavior. Fig. 3.1 presents the stress tensor according to the deformation rate tensor and allows illustrating the different behaviors of a fluid according to the Herschel-Bulkley [20] viscoplastic model that depends on two parameters : the fluid index,  $n$ , and yield stress,  $\tau_y$ . For  $n = 1$  and  $\tau_y = 0$ , this fluid is considered as Newtonian, for  $n = 1$  and  $\tau_y \neq 0$  as viscoplastic Binghamian [60], and for  $n \neq 1$  and  $\tau_y \neq 0$  as general viscoplastic.

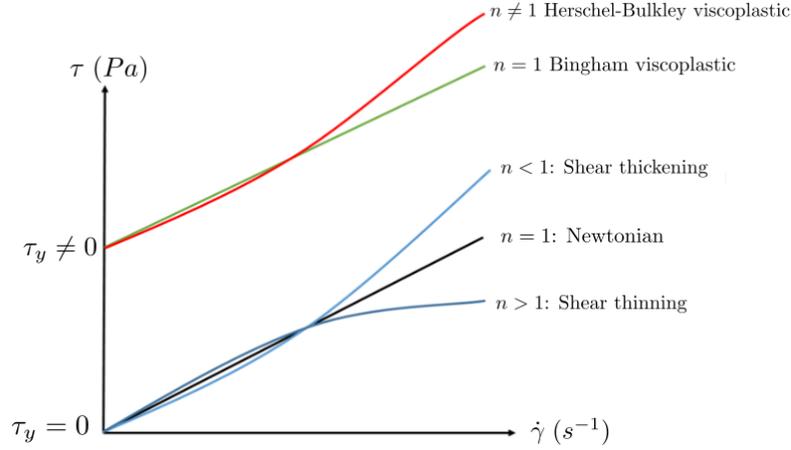


FIGURE 3.1 – Stress tensor according to deformation rate tensor illustrating the different behaviors of a fluid according to the Herschel-Bulkley model with two parameters : the fluid index,  $n$ , and yield stress,  $\tau_y$ . For  $n = 1$  and  $\tau_y = 0$ , fluid is considered as Newtonian, for  $n = 1$  and  $\tau_y \neq 0$  as Binghamian, and for  $n \neq 1$  as viscoplastic.

As pointed out by Saramito and Wachs [24], the regularization approach currently used in industrial codes lacks a general convergence result of the solution with the regularization parameter and cannot follow the unyielded regions of a yield stress fluid flow with the deformation rate tensor  $\dot{\gamma} = 0$ . Recently, Bernabeu et al. [21, 35] derived a new unregularized model for the lava flows using shallow-depth approximation for tridimensional cooling of viscoplastic fluid with a bidimensional height-averaged finite element approach and the simulations were successfully compared to lava flows. Here, we propose to adapt this viscoplastic model to the corium spreading with a second-order temperature polynomial approximation with non-constant viscosity using a model based on Shaw law [16]. A comparison between lava and corium flow regime through similarity criteria and simulations of the VEU7 test are then presented. A sensitivity analysis for Shaw model parameter, fluid index and yield stress of the Herschel-Bulkley viscoplastic model is also performed. Tridimensional velocity and temperature fields are reconstructed from the bidimensional height-averaged solution, substrate temperature is also calculated and compared to the experimental measurements. Finally, we discuss about results.

## 3.2 Mathematical model

In this section, we present the viscoplastic model. Fig. 3.2 shows the spreading scheme with the melt spread. It involves three domains, denoted by the indices  $f, s$  that represent respectively the melt, the substrate and the ambient environment of the spread. Let  $Q$  be an open set of  $\mathbb{R}^3$  of regular border  $\partial Q$  be the whole domain. It splits as  $Q = Q_f(t) \cup Q_s$  where  $Q_f(t)$  is the melt flow region, and  $Q_s$  the substrate. The boundary of the melt flow region also splits as  $\partial Q_f(t) = \Gamma_f(t) \cup \Gamma_s \cup \Gamma_w$  where  $\Gamma_f(t)$  is the free surface of the flow,  $\Gamma_s$  the horizontal plane where the melt is in contact with the substrate and  $\Gamma_w$  the vertical walls. Finally, a part  $\Gamma_e \subset \Gamma_s$  corresponds to the alimentation region, where there is an inflow.

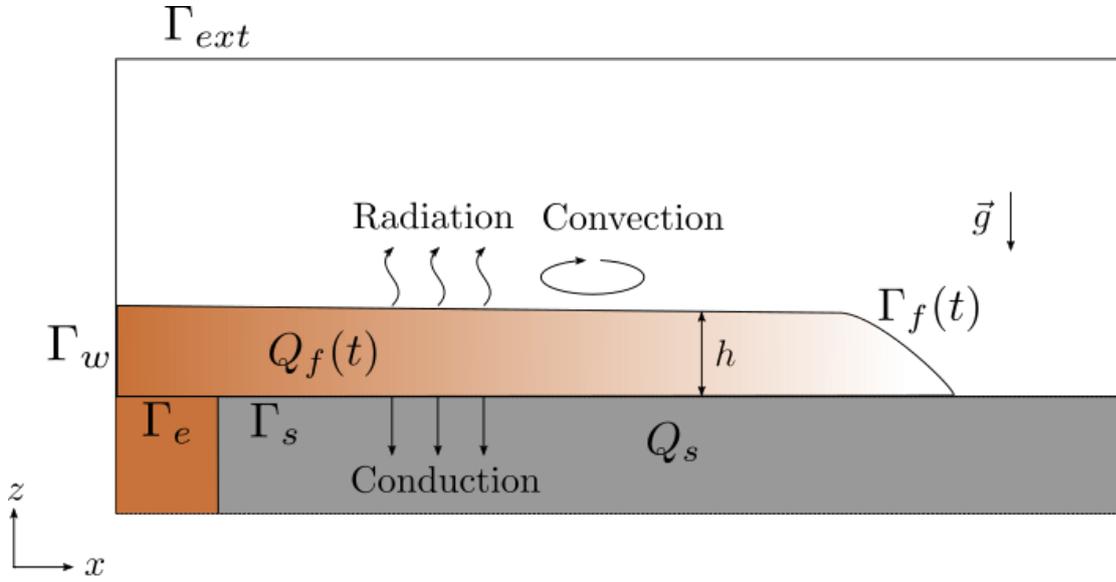


FIGURE 3.2 – Corium spreading : its geometry and notations.

### 3.2.1 Tridimensional model

The Herschel-Bulkley model expresses the deviatoric part  $\boldsymbol{\tau}$  of the Cauchy stress tensor in the melt as

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \left( K(\theta) \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{n-1} + \frac{\tau_y(\theta)}{|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|} \right) \dot{\boldsymbol{\gamma}} & \text{when } \dot{\boldsymbol{\gamma}} \neq 0, \\ |\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_y(\theta) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3.1a)$$

where  $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T$  is the shear rate tensor,  $\mathbf{u}$  is the velocity and  $\theta$  is the temperature. Also  $K(\theta)$  is the temperature-dependent consistency,  $\tau_y(\theta)$ , the temperature-

dependent yield stress and  $n$  is the power-law index, As depicted on Fig. 3.1, for  $\tau_y = 0$  and  $n = 1$ , the fluid is Newtonian, and  $K(\theta)$  is the temperature-dependent consistency index. Here, the temperature dependence of both consistency index and yield stress follow the Shaw model with the same coefficient [16] :

$$\begin{aligned} K(\theta) &= K_e \exp \left( Arr \left( \frac{\theta_e - \theta}{\theta_e - \theta_a} \right) \right) \\ \tau_y(\theta) &= \tau_{y,e} \exp \left( Arr \left( \frac{\theta_e - \theta}{\theta_e - \theta_a} \right) \right) \end{aligned}$$

with  $K_e$  and  $\tau_{y,e}$ , the value of  $K(\theta)$  and  $\tau_y(\theta)$  at the inlet reference temperature  $\theta_e$ . The values of the constants  $\tau_{y,e}$ ,  $K_e$  and  $Arr$  are determined through the viscosity and yield stress measurements of Roche et al. [64] and Ramacciotti et al. [11]. Assuming a constant density  $\rho$ , the mass conservation equation in the melt reduces to

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1b)$$

while the momentum conservation equation in the melt reads :

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \nabla p = \rho \mathbf{g} \quad (3.1c)$$

where  $p$  is the pressure. Conversely, the energy conservation equation in the melt expresses :

$$\rho c_p (\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta) - \nabla \cdot (k \nabla \theta) = \boldsymbol{\tau} : \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (3.1d)$$

where  $c_p$  is the specific heat capacity of the melt and  $k$ , its the heat conduction coefficient. Note the friction dissipation term  $\boldsymbol{\tau} : \dot{\boldsymbol{\gamma}}$  in the right-hand-side. Assuming that the substrate  $Q_s$  behaves as a rigid solid, the energy conservation equation in the substrate is :

$$\rho_s c_{ps} \partial_t \theta - \nabla \cdot (k_s \nabla \theta) = 0 \quad (3.1e)$$

where  $\rho_s$  is the density of the substrate,  $c_{ps}$ , its specific heat capacity, and  $k_s$ , its heat conduction coefficient. The set of equations (3.1a)-(3.1e) is closed by initial and boundary conditions. First, assume that the free surface  $\Gamma_f(t)$  could explicitly be described by the melt height function  $h$  such that

$$\Gamma_f(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z = h(t, x, y) \right\}$$

where, by convention, the plane  $z = 0$  coincides with the melt-substrate interface  $\Gamma_s$ , see Fig. 3.2. Note that the height  $h(t, x, y)$  is defined for all  $t > 0$  and  $(x, y) \in \Gamma_s$ . Then, the transport of the free surface by the flow writes :

$$\partial_t h + u_x \partial_x h + u_y \partial_y h - u_z = 0 \quad (3.1f)$$

The initial conditions velocity, height and temperature are :

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \text{ in } Q_f(t=0) \quad (3.1g)$$

$$\theta(t=0) = \theta_0 \text{ in } Q_f(t=0) \cup \Gamma_s \cup Q_s \quad (3.1h)$$

$$h(t=0) = h_0 \text{ on } \Gamma_s \quad (3.1i)$$

where  $\mathbf{u}_0$ ,  $\theta_0$  and  $h_0$  are known from experimental measurements. It corresponds to  $h_0 = 0$ ,  $\mathbf{u}_0 = 0$  and  $\theta_0 = \theta_a$ , the atmospheric temperature. A Dirichlet condition for velocity on the substrate plane  $\Gamma_s$  is considered, as they are considered as no-slip boundaries. It is completed with the inlet velocity condition for the  $z$ -component :

$$u_x = u_y = 0 \text{ and } u_z = w_e \text{ on } \Gamma_s \cap \partial Q_f(t) \quad (3.1j)$$

where  $w_e$  is the inlet velocity, which is deduced from the measured flow rate. On the vertical walls  $\Gamma_w$ , the no-slip boundary condition simply becomes  $\mathbf{u} = 0$ . On the free surface  $\Gamma_f(t)$ , surface tension effects are neglected, so the normal Cauchy stress is just zero, i.e. :

$$(\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma_f(t) \quad (3.1k)$$

where  $\mathbf{n}$  denotes the outward unit normal at  $Q_f(t)$  on the free surface  $\Gamma_f(t)$ . A Dirichlet condition for temperature on  $\Gamma_s$  is given to model inlet temperature in its inlet region  $\Gamma_e$  :

$$\theta = \theta_e \text{ on } \Gamma_s \cap \Gamma_e \quad (3.1l)$$

On  $\Gamma_s$  but outside of this inlet region  $\Gamma_e$ , the melt is in contact with the substrate : the temperature is continuous across  $\Gamma_s$  while the heat transfer is considered to be mostly conductive due to high Fourier number :

$$\theta|_{Q_f} = \theta|_{Q_s} \text{ on } \Gamma_s \setminus \Gamma_e \quad (3.1m)$$

$$k \mathbf{n} \cdot \nabla(\theta|_{Q_f}) = k_s \mathbf{n} \cdot \nabla(\theta|_{Q_s}) \text{ on } \Gamma_s \setminus \Gamma_e \quad (3.1n)$$

where  $\theta|_{Q_f}$  (resp.  $\theta|_{Q_s}$ ) denotes the restriction of the temperature  $\theta$  in the melt (resp. substrate) region and  $\mathbf{n}$  is the outward unit normal at  $Q_f(t)$  on the substrate plane  $\Gamma_s$ . On the free surface  $\Gamma_f(t)$ , both radiative and convective heat transfers with the environment are considered :

$$k \mathbf{n} \cdot \nabla \theta + \epsilon \sigma_{SB} (\theta^4 - \theta_a^4) + \lambda(\theta - \theta_a) = 0 \text{ on } \Gamma_f(t) \quad (3.1o)$$

where  $\epsilon$  is the emissivity,  $\sigma_{SB}$ , the Stefan-Boltzmann constant and  $\lambda$ , the convective heat transfer coefficient. Finally, the temperature at the bottom of the substrate is assumed to tend to the atmospheric one :

$$\theta(z = -\infty) = \theta_a. \quad (3.1p)$$

The set of equations (3.1a)-(4.3s) defines the tridimensional viscoplastic melt spreading problem with four unknowns  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}, p, h)$  that depends both upon time and space, while the computational space is time-dependent since it involves a free-surface.

### 3.2.2 Bidimensional reduced model

In 2013, Bernabeu et al. [21] showed that the tridimensional isothermal viscoplastic free-surface problem could be reduced as a bidimensional one in terms of the height  $h$  only as unknown. This reduction bases on an asymptotic analysis, assuming that the aspect ratio of the height versus the horizontal length is small. In 2016, Bernabeu et al. [35] extended this result to non-isothermal viscoplastic free-surface flows. In that case, all the unknowns of the tridimensional problem express explicitly in terms of only the height  $h$  and the vertical-averaged temperature  $\bar{\theta}$ . The notation  $\bar{\xi}$  represents the vertical-averaged value of a quantity, defined for all  $\xi$  by

$$\bar{\xi}(t, x, y) = \begin{cases} \frac{1}{h(t, x, y)} \int_0^{h(t, x, y)} \xi(t, x, y, z) dz & \text{when } h(t, x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

we obtain the following formulation from Bernabeu et al. [35], the tridimensional problem (3.1a)-(4.3s) reduces to find  $(h, \bar{\theta})$  defined on  $\Gamma_s$  such that the height  $h$  satisfies

$$\begin{cases} \partial_t h - \nabla_{\parallel} \cdot (\mu(h, \bar{\theta}) \nabla_{\parallel} h) = w_e & \text{in } ]0, T[ \times \Omega & (3.2a) \\ h(t=0) = h_0 & \text{in } \Omega & (3.2b) \\ \mathbf{n} \cdot \nabla_{\parallel} h = 0 & \text{on } ]0, T[ \times \partial\Omega, & (3.2c) \end{cases}$$

where  $\Omega \subset \Gamma_s$  denotes the bidimensional bounded computational domain,  $T > 0$  is the final time of computation and  $\mathbf{n}$  is the outward unit normal on its boundary in the horizontal plane. Also, for convenience, the notation  $\nabla_{\parallel} = (\partial_x, \partial_y)$  is introduced. The  $\mu$  diffusion coefficient in the previous parabolic equation (3.2a) is given by :

$$\mu(h, \bar{\theta}) = \begin{cases} \frac{n \left\{ (n+1) \rho g h |\nabla_{\parallel} h| + n \tau_y(\bar{\theta}) \right\} \left\{ \rho g h |\nabla_{\parallel} h| - \tau_y(\bar{\theta}) \right\}^{1+\frac{1}{n}}}{(n+1) (2n+1) (\rho g)^2 |\nabla_{\parallel} h|^3 K(\bar{\theta})^{\frac{1}{n}}} & \text{when } \rho g h |\nabla_{\parallel} h| > \tau_y(\bar{\theta}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Note that the consistency  $K(\bar{\theta})$  and the yield stress  $\tau_y(\bar{\theta})$  involves now the vertical-averaged temperature  $\bar{\theta}$ . Also, for a Newtonian fluid, i.e.  $n = 1$  and  $\tau_y = 0$ ,

we observe that  $\mu = \rho gh^3/(3K)$  and then (3.2a) reduces to the usual lubrication equation for a Newtonian fluid, as expected. In the general case, the solution  $h$  depends upon the vertical-averaged temperature  $\bar{\theta}$ , which is provided by a coupled equation.

The tridimensional energy conservation (3.1d) in the melt is also reduced to a bidimensional one by introducing a closure shape function  $\varphi$ , which is a second order polynomial that satisfies  $\bar{\varphi} = 1$ , such that  $\theta(t, x, y, z) = \varphi(t, x, y, z) \bar{\theta}(t, x, y)$ . Then,  $\bar{\theta}$  satisfies also a bidimensional evolution equation, see Bernabeu et al. [35], appendix A for details.

Bernabeu et al. [35] have shown that no significant improvement in terms on temperature distribution is gained from using a third order polynomial distribution function  $\varphi$  over a second order one. We thus use the former here, with  $\varphi = az^2 + bz + c$ , and neglect the  $\nabla_{\parallel} \cdot (h(\bar{\varphi} \bar{\mathbf{u}}_{\parallel} - \bar{\mathbf{u}}_{\parallel}))$  term by taking  $\bar{\varphi} \bar{\mathbf{u}}_{\parallel} = \bar{\mathbf{u}}_{\parallel}$ . The energy conservation (3.1d) together with its associated boundary and initial conditions become :

$$\begin{cases} h(\partial_t \bar{\theta} + \bar{\varphi} \bar{\mathbf{u}}_{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel} \bar{\theta}) + \left( -\frac{2ah}{\rho c_p / k} \right) \bar{\theta} \\ \quad = w_e(\theta_e - \bar{\theta}) \mathbb{I}_{\Gamma_e} \text{ in } ]0, T[ \times \Omega & (3.3a) \\ \bar{\theta}(t=0) = \theta_a \text{ in } \Omega & (3.3b) \\ \mathbf{n} \cdot \nabla_{\parallel} \bar{\theta} = 0 \text{ on } ]0, T[ \times \partial \Omega & (3.3c) \end{cases}$$

with  $\mathbb{I}_{\Gamma_e}$  the indicator function for the alimention region and

$$\begin{cases} \partial_z \varphi + \left( \frac{\epsilon \sigma_{SB} (\theta_e - \theta_a)^3}{k} p_{\psi}(\bar{\theta} \varphi) + \frac{\lambda}{k} \right) \varphi = 0 \text{ on } ]0; +\infty[ \times \partial \Omega_f(t) & (3.4a) \\ -\partial_z \varphi + \frac{k_s}{k} \left( \frac{\rho c_p}{k \pi t} \right)^{1/2} \varphi = 0 \text{ on } ]0; +\infty[ \times \Gamma_s & (3.4b) \end{cases}$$

with  $p_{\psi}(\bar{\theta} \varphi) = (\bar{\theta} \varphi)^3 + 4\psi(\bar{\theta} \varphi)^2 + 6\psi^2(\bar{\theta} \varphi) + 4\psi^3$ ,  $\psi = \frac{\theta_a}{\theta_e - \theta_a}$ , used in order to linearise the radiation term and  $\bar{\mathbf{u}}_{\parallel}$  the vertical-averaged velocity along the x-axis and the y-axis :

$$\bar{\mathbf{u}}_{\parallel} = \begin{cases} -\frac{n \left\{ (n+1) \rho gh |\nabla_{\parallel} h| + n \tau_y(\bar{\theta}) \right\} \left\{ \rho gh |\nabla_{\parallel} h| - \tau_y(\bar{\theta}) \right\}^{1+\frac{1}{n}}}{(n+1) (2n+1) h (\rho g)^2 |\nabla_{\parallel} h|^3 K(\bar{\theta})^{\frac{1}{n}}} \nabla_{\parallel}(h) & \text{when } \rho gh |\nabla_{\parallel} h| > \tau_y(\bar{\theta}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

### 3.2.3 Numerical resolution in the melt

The nonlinear reduced bidimensional problem in  $(h, \bar{\theta})$  is discretized using a second-order backward finite difference scheme in time (BDF2), see Bernabeu et al. [35]. The resulting sequence of nonlinear problems are solved using an under-relaxed fixed point algorithm. These equations are discretized spatially using an adaptive finite element method based on the procedure introduced by Roquet and Saramito [72] using the Rheolef C++ library [48] and the bamg mesh generator [73]. At each time step, the mesh is adapted to follow the front by using the height  $h$  as an adaptation criterion, since it shows sharp gradients at this location, resulting in Fig. 3.3.

Once the solution  $(h, \bar{\theta})$  of the reduced problem has been solved numerically. The tridimensional solution  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}, p)$  of the initial problem in the melt  $\Omega_f$  is then obtained from explicit expressions as a post-treatment, see Bernabeu et al. [35].

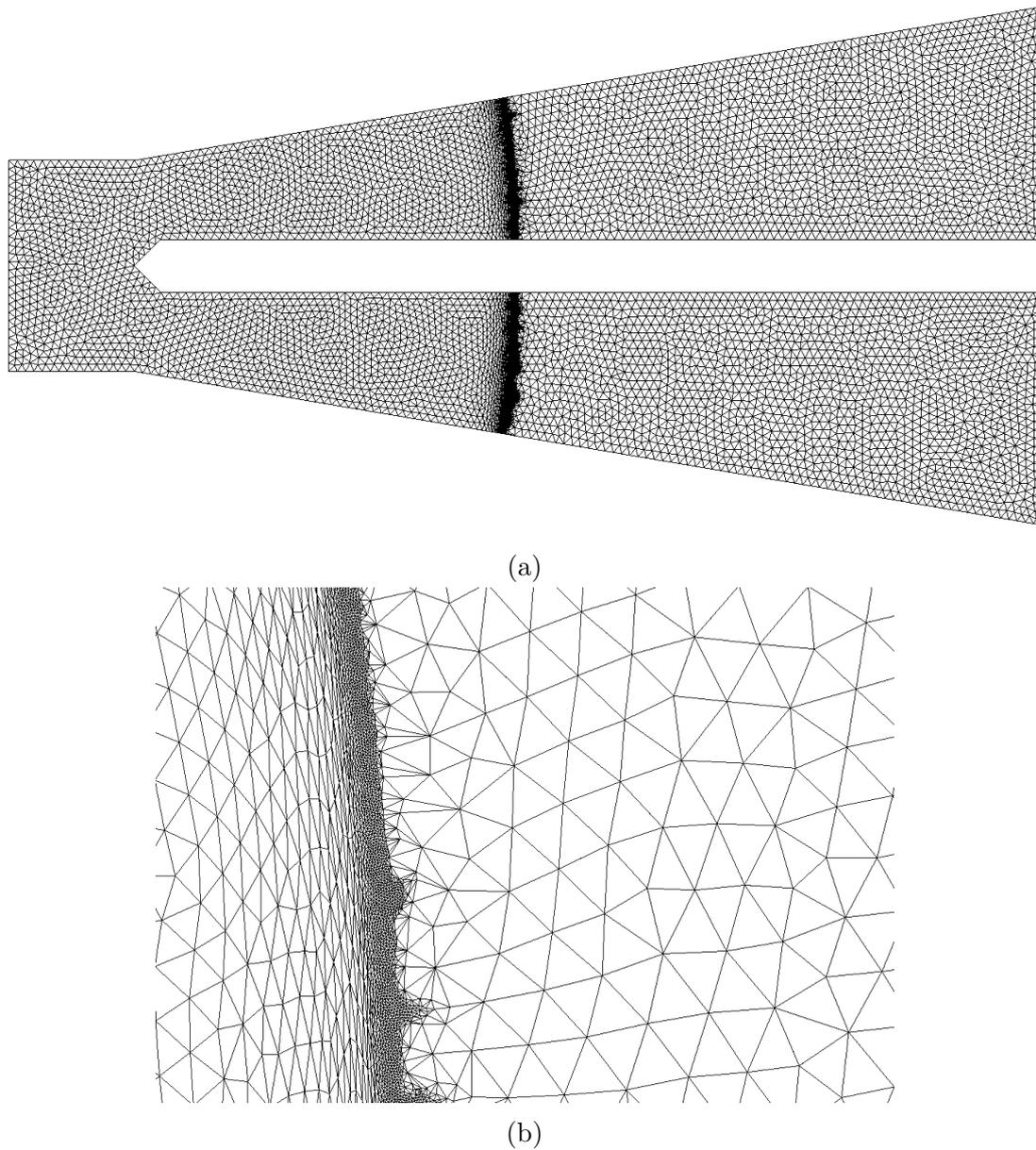


FIGURE 3.3 – (a) Auto-generated mesh and (b) Zoom of mesh (a) at the front of the spread.

### 3.2.4 Explicit expression in the substrate

The temperature  $\theta$  in the substrate could also be deduced from explicit expressions. Indeed, following to Carslaw and Jaeger [54, p. 58-64], the time-discretized solution to a conduction problem such as (3.1e) in a semi-infinite domain writes

for all  $(x, y) \in \Omega$  and  $z < 0$  :

$$\begin{aligned} \theta(t_n, x, y, z) = \theta_a + \sum_{k=1}^n (\theta(t_k, x, y, 0) - \theta_a) & \left[ \mathbb{I}_{]t_{k-1}, t_k[}(t_n) \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha(t_n - t_{k-1})}} \right) \right\} \right. \\ & \left. + \mathbb{I}_{]t_k, +\infty[}(t_n) \left\{ \operatorname{erf} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha(t_n - t_k)}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha(t_n - t_{k-1})}} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

where  $\alpha = k_s/(\rho_s c_{ps})$  the thermal diffusivity and  $\mathbb{I}_S(\xi)$  denotes the indicator function, which is one when its argument  $\xi$  belongs to the set  $S$  and zero otherwise. Also,  $\theta(t_k, x, y, 0)$  denotes the temperature at the interface between the melt and the substrate, which is known from the previous computation. Description of the temperature field in the substrate is of major importance in the case of severe accidents, as it yields information on the integrity of the power plant.

### 3.3 Comparison between lava and corium

The preceding dimensional conservation equations and their boundary conditions give rise to a set of dimensionless number. The values of the material and geometrical properties are given in tab. 3.1 and 3.2, taken from the 2010 Piton de la Fournaise measurements and lava studies [16, 61, 17, 62, 63] for lava and from general corium material investigations and the VEU7 test [9, 36, 14, 64, 11, 65, 66, 67] for corium. Using those properties, the dimensionless numbers for both materials and experiments are computed and compared in tab. 3.3. The properties are taken at initial temperature  $\theta_e$  for lava and corium, respectively 1423 K and 2450 K. We take the characteristic velocity  $U = \left( \frac{\rho g H^2}{K_e L} \right)^{1/n} H$ .

The values of the Péclet number Pe between lava and corium flows are of the same order of magnitude, with high values indicating that heat transfer in the bulk is mainly advective for both cases. The Stanton number St replaces the Nusselt number as the latter is not a similarity criterion. Its relatively low value compared to the radiation number  $R$  informs us that at the free surface, the heat transfer is predominantly radiative in nature. In the case of underwater spreading, that may not be true.

In the case of both lava and corium spreading, the Reynolds number indicates that the flow is laminar, though inertial forces are two orders of magnitudes greater

TABLE 3.1 – Flow properties of the Piton de la Fournaise lava eruption [16, 61, 17, 62, 63] and of the VEU7 corium spreading test [9, 36, 14, 64, 11, 65, 66, 67].

Quantity	Symbol	Lava	Corium
Characteristic height $m$	$H$	1	$6.5 \cdot 10^{-2}$
Characteristic length $m$	$L$	$10^3$	$4.0 \cdot 10^{-1}$
Aspect ratio	$\varepsilon = \frac{H}{L}$	$10^{-3}$	0.15
Characteristic velocity $m.s^{-1}$	$U$	$2.16 \cdot 10^{-3}$	1.53
Inlet fluid temperature $K$	$\theta_e$	1423	2450
Initial substrate and air temperature $K$	$\theta_a$	303	303

TABLE 3.2 – Material properties of the Piton de la Fournaise lava eruption [16, 61, 17, 62, 63] and of the VEU7 corium spreading test [9, 36, 14, 64, 11, 65, 66, 67].

Quantity	Symbol	Lava	Corium
Spread density ( $kg.m^{-3}$ )	$\rho$	2200	5100
Air density ( $kg.m^{-3}$ )	$\rho_a$	1.2	1.2
Dynamic viscosity at temperature $\theta_e$ ( $Pa.s$ )	$K_e$	$10^4$	$2.24 \cdot 10^1$
Yield stress at temperature $\theta_e$ ( $Pa$ )	$\tau_{y,e}$	$10^2$	$10^2$
Emissivity ( $-$ )	$\epsilon$	0.95	0.8
Thermal conductivity ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ )	$k$	2	3
Specific heat ( $J.kg^{-1}.K^{-1}$ )	$c_p$	1225	995.6
Convective heat transfer coefficient with air ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ )	$\lambda$	80	300

in the latter case. However, the VEU7 spreading test does not have the same scales of an hypothetical spreading process in the case of a nuclear severe accident, notably in terms of length and velocity. In that configuration, the flow regime would probably be turbulent with high values of the Reynolds number.

The Brinkman number is three orders of magnitude higher for corium than for lava, indicating a higher influence on the system's energy variation from the shear stress, it remains low enough to be negligible.

The Bingham number for corium is lower than for lava, though it uses properties at a higher temperature. Using the model developed by Rammaciotti et al. [11] for dynamic viscosity and Ancy and Jorrot [68] for the yield stress, we obtain a Bingham number of 2 for a corium at 1500  $K$ , a temperature close to that of lava.

Though the order of magnitude differ for some of these similarity criteria, they stay in the same regime range hence we expect the behavior of corium spreading to be sensibly similar to that of lava, justifying the use of a viscoplastic model for corium spreading, though it is necessary to know the temperature evolution during the spreading to judge if this comparison is relevant.

The computation of characteristic times completes this dimensional analysis :

TABLE 3.3 – Dimensionless numbers, computed using the data from Tables 3.1 and 3.2.

Similarity criterion	Lava	Corium
Reynolds number : $Re = \frac{\rho UL}{K_e}$	$4.75 \cdot 10^{-1}$	$1.40 \cdot 10^2$
Bingham number : $Bi = \frac{\tau_{y,e} L}{K_e U}$	4.630	$1.890 \cdot 10^{-1}$
Péclet number : $Pe = \frac{\rho c_p UL}{k}$	$2.91 \cdot 10^6$	$1.69 \cdot 10^5$
Brinkman number : $Br = \frac{U^2 K_e}{k(\theta_e - \theta_a)}$	$2.08 \cdot 10^{-5}$	$1.25 \cdot 10^{-2}$
Stanton number : $St = \frac{\lambda}{\rho U c_p} = \frac{Nu}{Pe}$	$1.37 \cdot 10^{-5}$	$1.85 \cdot 10^{-4}$
Radiation number : $R = \frac{\epsilon \sigma_{SB} (\theta_e - \theta_a)^3 L}{k}$	$3.78 \cdot 10^1$	$2.70 \cdot 10^1$

the inertial, viscous and hydrostatic characteristic times, respectively  $t_{inertia} = \frac{L}{U} = 0.26s$ ,  $t_{viscosity} = \frac{H^2 \rho}{K_e} = 0.96s$  and  $t_{hydrostatic} = \frac{LU}{gH} = 0.96s$  are of the same order, while the characteristic time for thermal diffusion  $t_{thermal} = \frac{H^2 \rho c_p}{k} = 7150s$  is 4 orders of magnitude greater. The timescale of the VEU7 test is  $\sim 10s$ , thus we expect only minor influence of temperature change in the conservation equations of the spreading, though it may change physical properties through the use of the Shaw model.

This dimensional analysis coupled with our subsequent use of self-similar solutions shows that the dominant balance in the VEU7 spreading experiment is the gravity-viscosity one.

### 3.4 Experimental facilities

Experiments to study prototypical corium spreading have been conducted in facilities such as FARO [5] and VULCANO [9]. The VEU7 experiment has been performed in the latter. It consists in the melting of corium using plasma torches, its pouring in a stabilization pool, then its spreading on a test section constituted of two channels with two different substrates, a concrete one and a ceramic one, as depicted on fig. 3.4,3.5. In our simulation, the two channels geometry is represented, as well as the stabilization pool as shown on fig. 3.5. The inlet velocity condition is computed from the constant mass flow rate of  $4.3 \text{ kg/s}$  for a duration of  $7.7 \text{ s}$  according to [36]. It is implemented in the code so that the inlet velocity at the borders of the stabilization pool is null using a first order polynomial distribution such that its integral over the inlet domain is equal to the experimental flow rate. The results from (4.4o) are compared to experimental data from thermocouples located at  $x = 12 \text{ cm}$  and depth varying from  $z = -2 \text{ mm}$  to  $z = -12 \text{ mm}$  in the next section. The position of the topmost thermocouple is known with an uncertainty of  $\pm 1.5 \text{ mm}$ .



FIGURE 3.4 – Post-mortem view of the VEU7 test, from Journeau et al. [36]

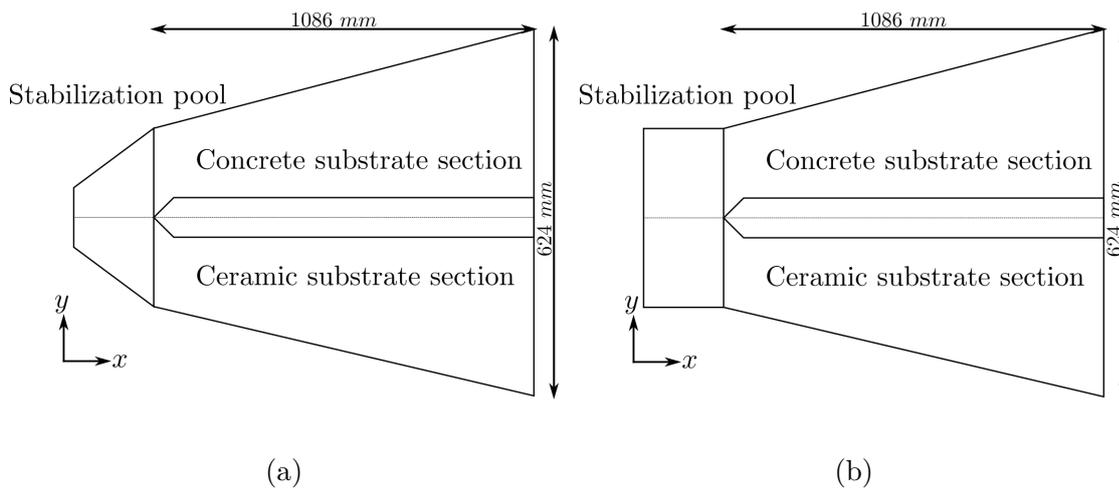


FIGURE 3.5 – (a) VEU7 spreading test diagram and (b) geometry used for simulations

Though the Reynolds number computed in tab.3.3 is greater than 1, the comparison of the experimental position of the spreading front advance and self-similar solutions obtained from viscous-gravity balance by Huppert [30] and Longo et al. [59] on fig. 3.6 shows good agreement. Based on this comparison, our physical model should properly represent the phenomena of the spreading, even though the inertia term is lacking.

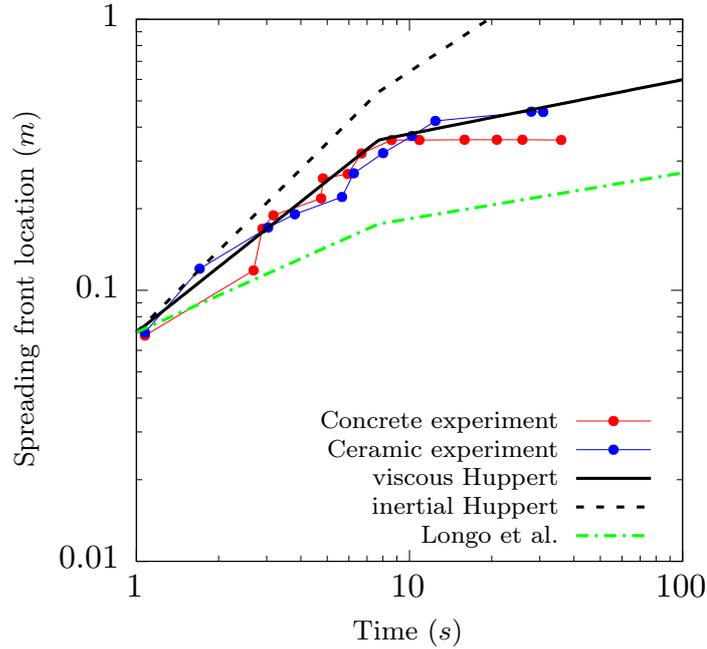


FIGURE 3.6 – Experimental front position evolution and its comparison to self-similar solutions from [30, 59] for various geometries. We assume from this comparison that the process of corium spreading is mainly viscous during corium inlet feeding.

### 3.5 Results and Discussion

Numerical simulations were performed to test the ability of a code developed by Bernabeu et al. [35] for lava flow to reproduce corium spreading experiments. We choose to use the physical parameters provided in the VEU7 benchmark [36] in order to be able to compare our results to those already existing. As shown on fig. 3.7, mass is satisfactorily conserved.

In our model, the parameters  $Arr$  the Shaw law coefficient,  $n$  the fluid index and  $\tau_{y,e}$  the yield stress are not given in the benchmark conducted by Journeau et al. [36] and few studies have been conducted on them for a Herschel-Bulkley behavior law for corium such as that of Roche et al. [64]. Thus we conduct a sensitivity analysis on them to determine the limits of our model on the spreading length evolution.

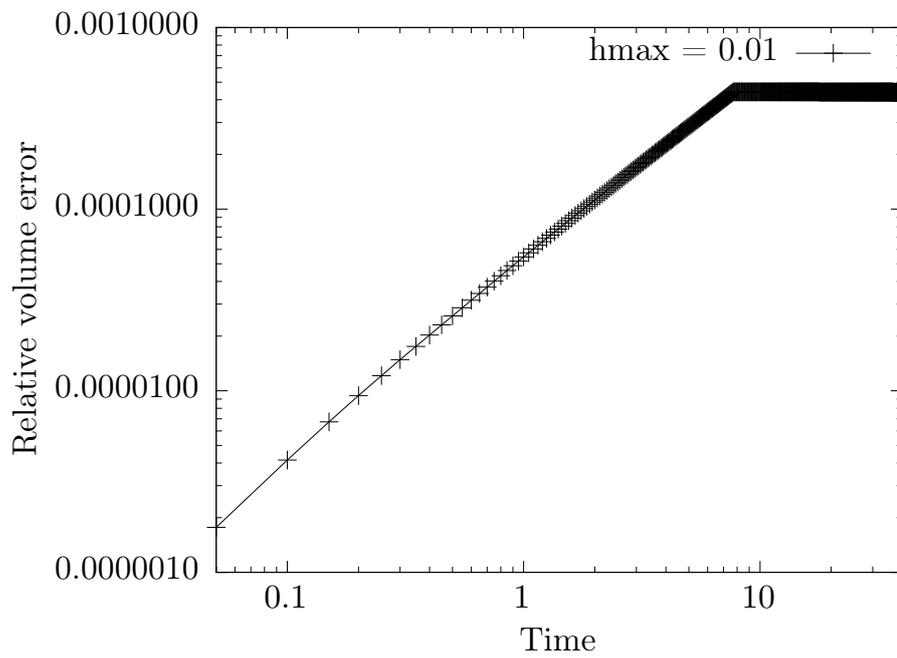


FIGURE 3.7 – Relative error between the computed volume and the theoretical one. As density is considered constant, it is related to mass conservation.

### 3.5.1 Sensitivity analysis

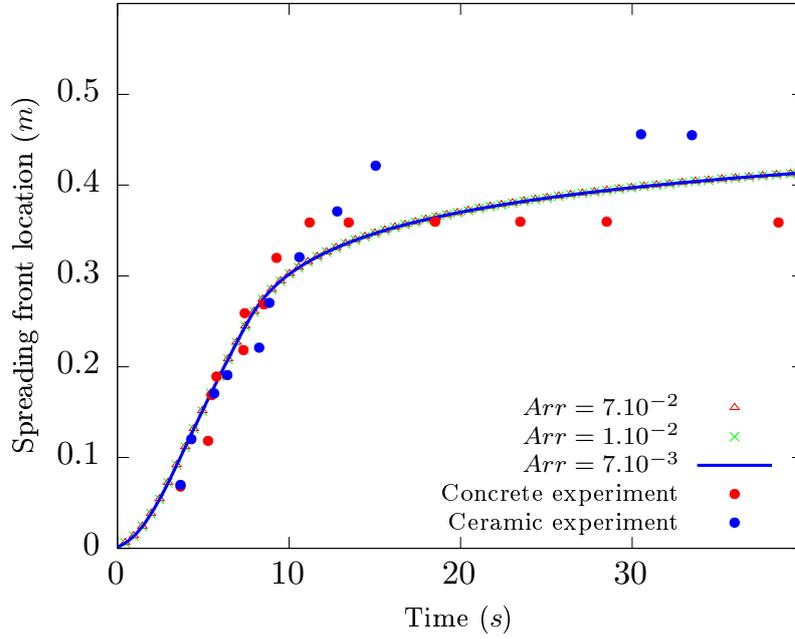


FIGURE 3.8 – Simulated front progress for  $n = 1$ ,  $\tau_y = 100 \text{ Pa}$  and different values of the Shaw model coefficient  $Arr$ , and experimental results for the VEU7 test, for both concrete and ceramic substrate channels.

The coefficient  $Arr$  has an influence on the evolution of rheological properties of the fluid against temperature, the characteristic time for heat diffusion is  $t_{thermal} = \frac{H^2 \rho c_p}{k} = 7150 \text{ s}$ , which is two orders of magnitude greater than the flow time. Fig. 3.8 shows that for different values of this coefficient around those computed from the works of Roche et al. [64] and Ramacciotti et al. [11], it has almost no influence. We thus keep the value  $Arr = 7.10^{-3}$  from Roche et al. [64] for the following simulations.

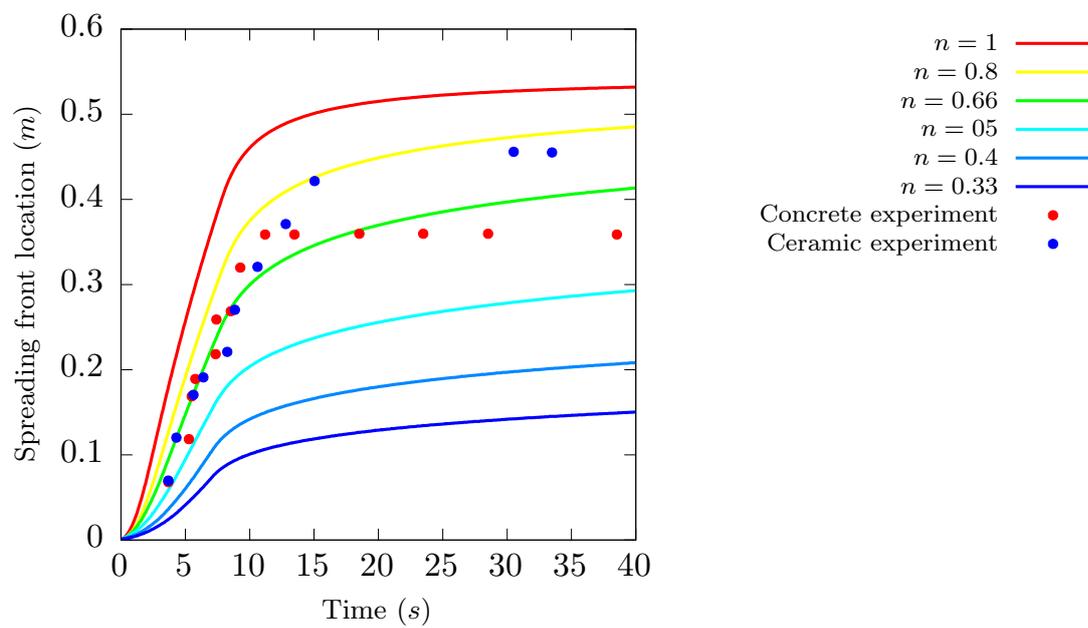


FIGURE 3.9 – Simulated front progress for  $Arr = 7.10^{-3}$ ,  $\tau_y = 100 Pa$  and different values of the fluid index  $n$ , and experimental results for the VEU7 test, for both concrete and ceramic substrate channels.

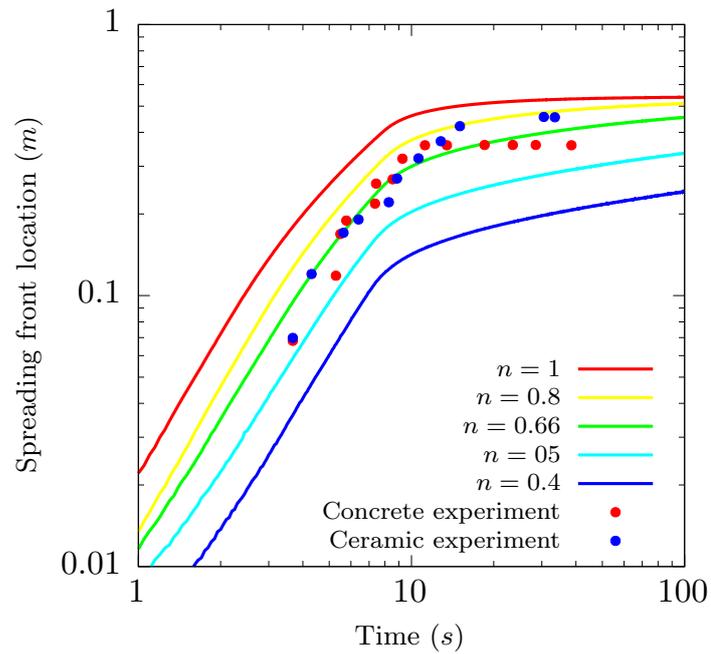


FIGURE 3.10 – Simulated front progress for  $Arr = 7.10^{-3}$ ,  $\tau_y = 100 Pa$  and different values of the fluid index  $n$ , and experimental results for the VEU7 test, for both concrete and ceramic substrate channels. log-log representation of fig. 3.9

The fluid index  $n$  has a strong influence on both the slope of the spreading front evolution, its stopping time and final location as shown on fig. 3.9. According to this figure, the value of  $n = 1$  corresponding to the Binghamian model yields a clearer asymptote, though the logarithmic representation fig. 3.10 shows better agreement in terms of slope for the value  $n = 0.66$  before the end of the corium supply, excepted for the first experimental point that corresponds to a corium splash (experimental artefact in the VEU7 test). To keep a better agreement with experimental spreading dynamic, the latter value is used for further analysis.

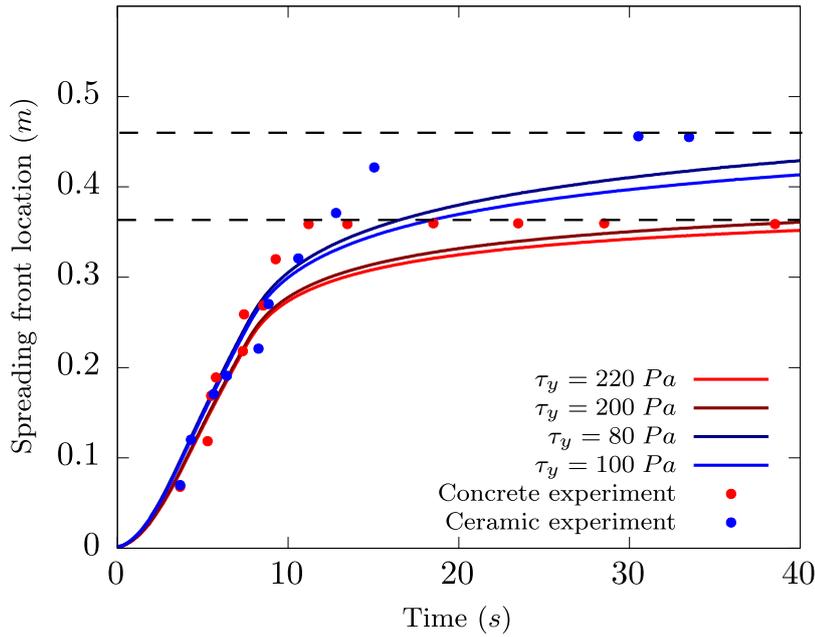


FIGURE 3.11 – Simulated front progress for  $n = 0.66$ ,  $Arr = 7.10^{-3}$  and different values of the initial yield stress  $\tau_y$ , and experimental results for the VEU7 test, for both concrete and ceramic substrate channels.

According to fig. 3.11, values of  $\tau_y = 50 Pa$  and  $\tau_y = 200 Pa$  show the best agreement in terms of spreading dynamic, respectively for the spread on the ceramic and concrete substrates. The difference in the two values for the same experiment could be explained by the uncertainties on the symmetry of the experimental flow rate and a lack of a degassing model for the concrete substrate, that was observed by Journeau et al. [9]. Though the complete stop is not reached in these cases, the velocity of the front edge shown on fig. 3.12 decreases faster than exponentially, indicating an asymptote. This differs from newtonian models where the melt would spread infinitely for an infinite time, where a viscoplastic model

gives a finite spread in a infinite time.

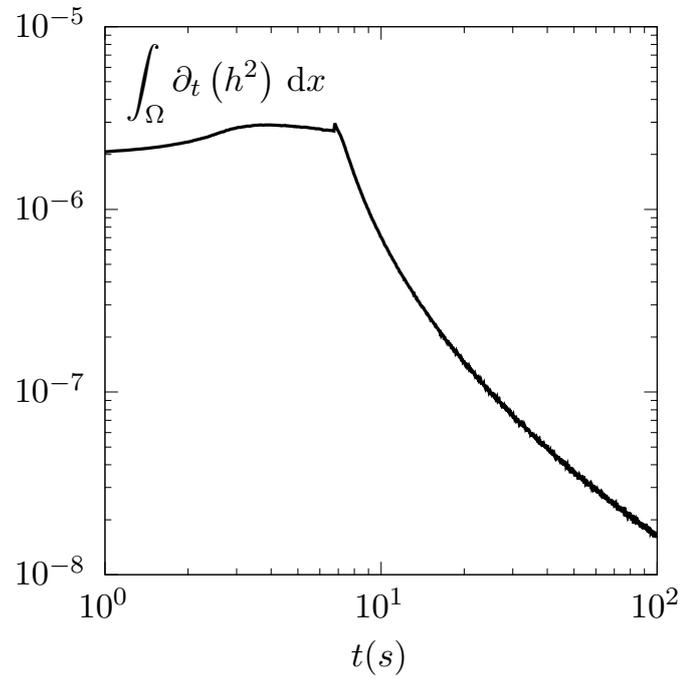


FIGURE 3.12 – Evolution of  $\int_{\Omega}(h^2)dx$ , for the simulation with  $n = 0.66$  and  $\tau_y = 200 Pa$ . It shows that the movement of the melt slows down quickly once corium source stops at  $t = 7.7s$ .

### 3.5.2 3D Visualisation of velocity and temperature field

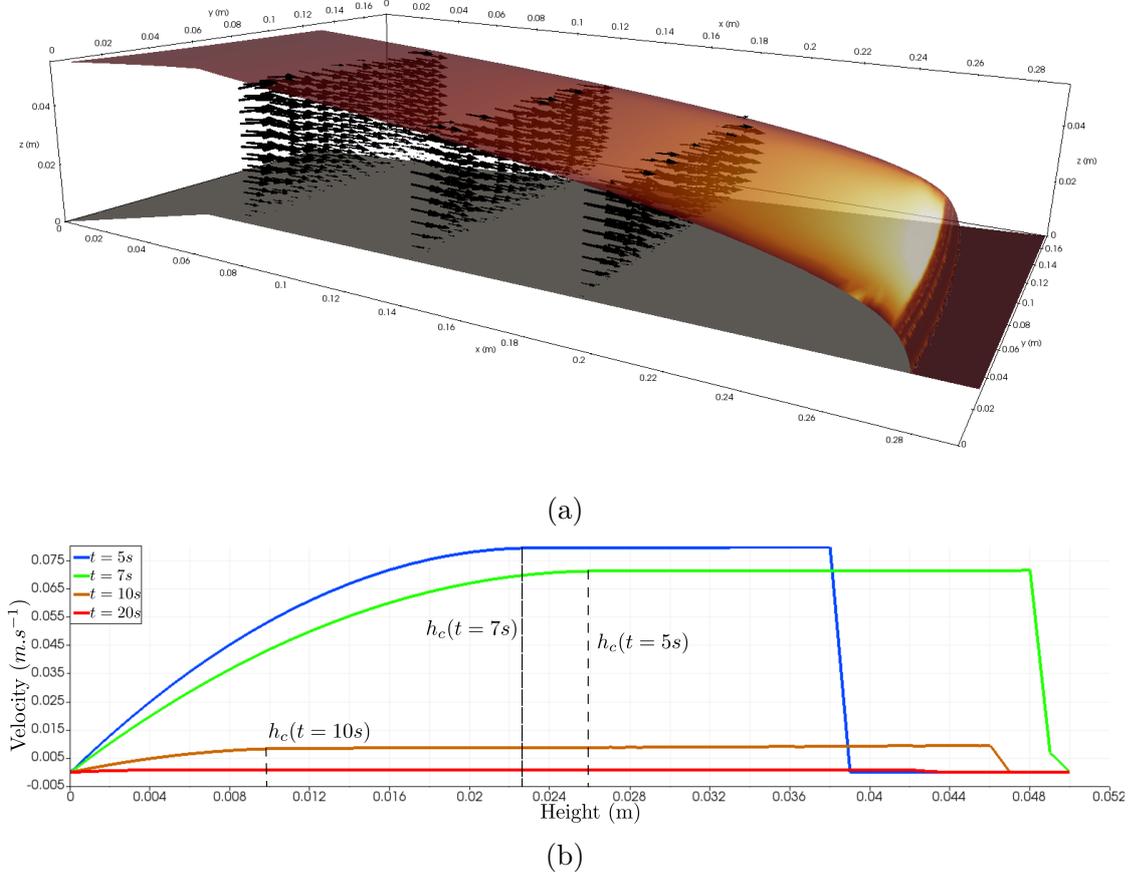


FIGURE 3.13 – (a) Tridimensional reconstruction of the velocity. The top surface color represents height-averaged temperature. (b) Velocity profiles along the  $z$ -axis at  $t = 5$  s (during melt supplying),  $t = 7$  s (close to the end of melt supplying),  $t = 10$  s (after the end of melt supply, toward melt front stop) and  $t = 20$  s at  $x = 12$  cm and  $y = 10$  cm

Using the two dimensional solution  $(h, \bar{\theta})$  and the dimensionless equations yielded through the process of vertical averaging described in Bernabeu et al. [35], we compute and visualize the tridimensional velocity and temperature profiles, enabling faster computation. Fig. 3.13 shows the enlargement of the plug region defined by the plug height  $h_c$  above which the viscoplastic fluid behaves as a pseudo-solid, effectively having a rigid body movement. We also see a rise in height during supply of the melt, followed by a decrease due to spread from gravity effect.

### 3.5.3 Temperature field in the substrate

Using the solution by Carslaw and Jaeger (4.46), we compare the temperature evolution of the substrate in the simulation with that measured experimentally at the location  $x = 12 \text{ cm}$  and various depths. The topmost thermocouple is located at  $z = -2 \pm 1.5 \text{ mm}$ , and as shown on fig.3.14, the simulation at the lower boundary of this interval is in good agreement with the experiment. The largest differences between simulation and experiment are found for temperatures above  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ , which can be partially explained by the gas release in the substrate. The temperature profiles presented in fig. 3.15 confirm that the first few millimeters of the substrate attain degassing temperature during the spreading. We can assume that molten core concrete interaction starts before the end of the spreading. Concrete ablation depth is estimated to be lesser than a millimeter at the time of spread stop, though we are overestimating substrate temperature since we are not modelling free water and  $\text{CO}_2$  phase change here. This is in accordance with our lack of chemical reaction model in the spreading process.

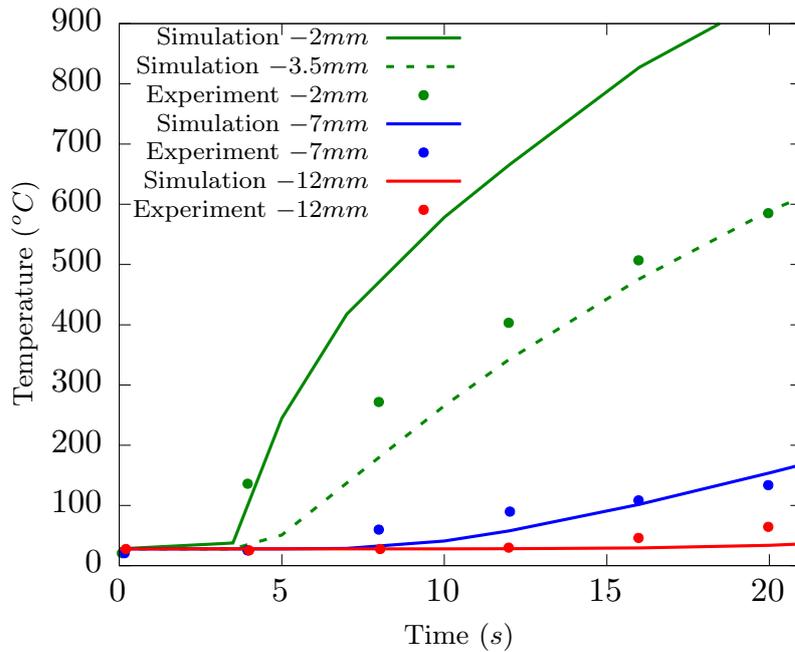


FIGURE 3.14 – Concrete substrate temperature evolution for the VEU7 experiment and its simulation, for thermocouples at  $x = 12 \text{ cm}$ ,  $y = 10 \text{ cm}$  and  $z = -2, -7, -12 \text{ mm}$ .

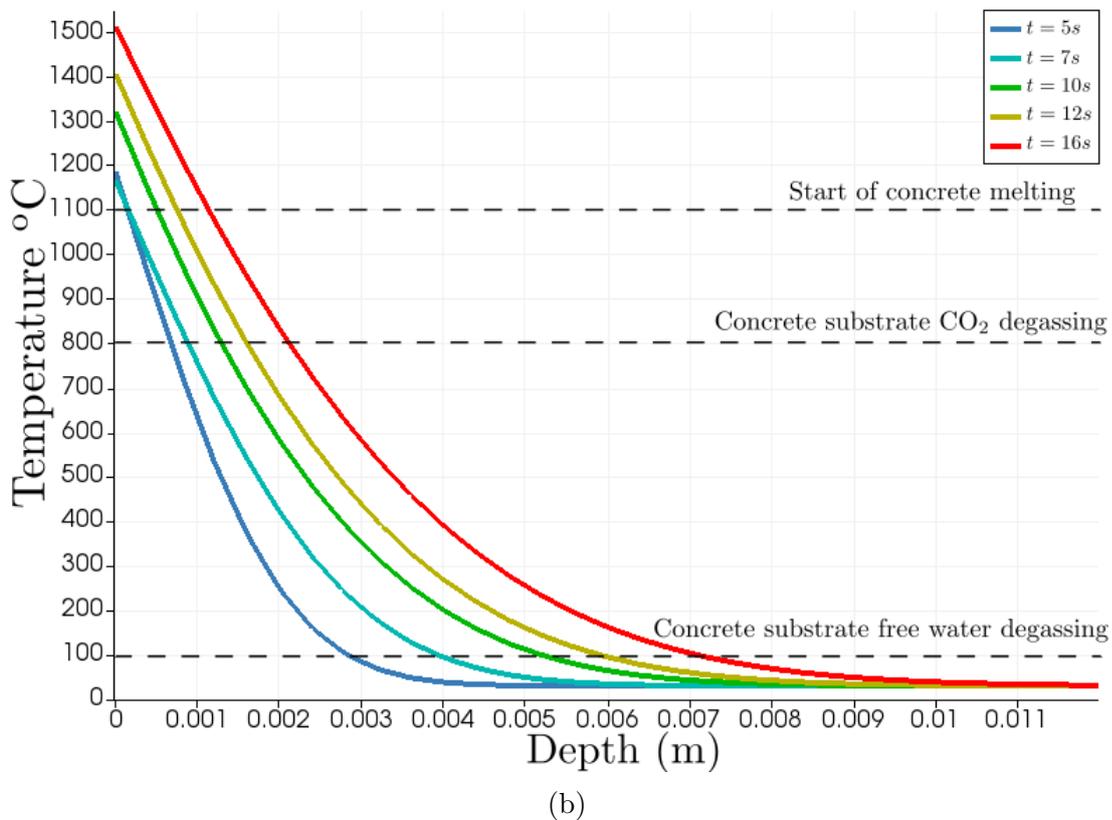
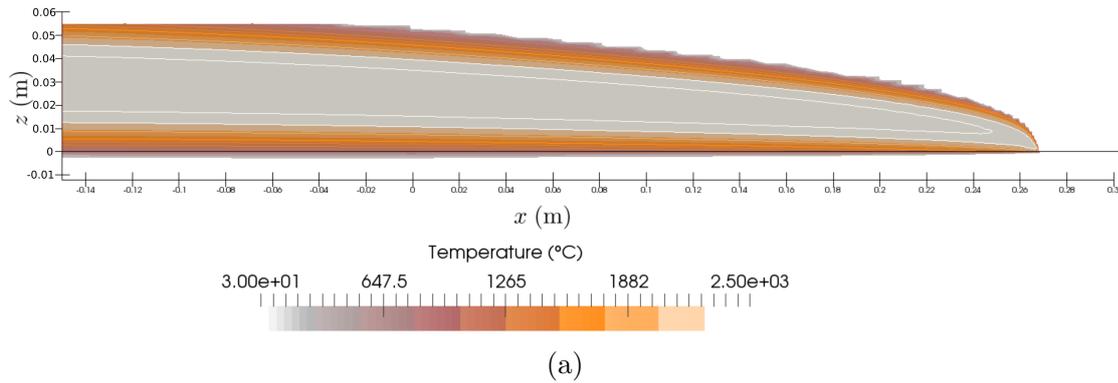


FIGURE 3.15 – (a) Temperature at  $y = 10 \text{ cm}$  and  $t = 5 \text{ s}$ , in both the melt and the substrate. (b) Concrete substrate temperature evolution for the VEU7 simulation at  $x = 12 \text{ cm}$  and  $y = 10 \text{ cm}$ .

### 3.5.4 Comparison to other nuclear accident spreading code

We compare the present model simulation with the CORFLOW [14, 74], LAVA [75] and THEMA [12] codes results provided in the VEU7 benchmark by Journeau

et al. [36] on fig. 3.16. For the THEMA and CORFLOW codes as well as ours, using the same corium properties for the spreading on the different substrates yields similar dynamic and final spreading length. In LAVA, Journeau et al. [36] obtained different spreading length for both substrates by adding an extra heat loss term on concrete of the order of  $500 \text{ kW/m}^2$  to take into account the gas sparging observed on this side.

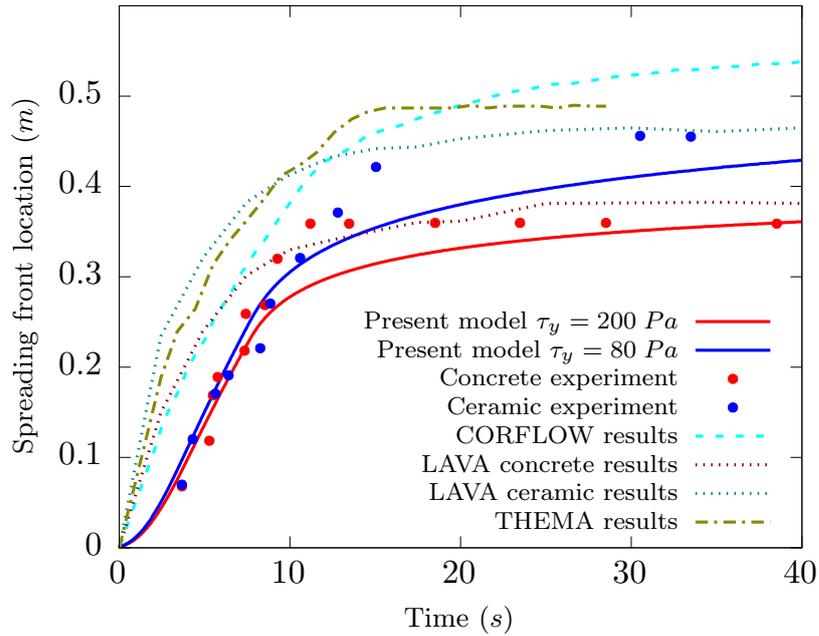


FIGURE 3.16 – Comparison between the LAVA, CORFLOW, THEMA codes and the present model

Overall, all four codes provide satisfactory results in terms of spreading front evolution and final length. The use of the Herschel-Bulkley (3.1a) constitutive law enable us to provide closer results in terms of dynamics during the corium inlet feeding period and to add another potential explanation for the corium stoppage. Indeed, observations on the VEU7 experiment in [9] show that the formation of a crust happens after complete stop of the spreading, meaning that conditions on a stop temperature or solid fraction might not be enough to explain it. The use of an adaptative mesh also greatly reduces computation time : a similar simulation using THEMA lasts a week, while CPU time for the present algorithm is around 4 hours.

## 3.6 Conclusions

Lava and corium flows have been compared and arguments for the modelling of the latter as a non-isothermal free-surface viscoplastic flow have been presented. Results on the spreading of corium using the model developed by Bernabeu et al. [35] have been compared to the VEU7 experiment [36]. Both the spreading length and temperature evolution in the substrate show encouraging agreement. Future work will use a more representative thermal distribution in the fluid height and gas release from the substrate. More experimental investigation on the material properties of corium, mainly its yield stress and fluid index are needed to improve its understanding under cooling conditions. Moreover, in other experiments, the effect of MCCI in the spreading process might be greater, necessitating chemical description in the model to take it into account. Improving the comprehension of these phenomena would give greater insight on corium spreading in the scope of the EVR strategy.

### 3.7 Évaluation de l'échauffement du substrat

Dans l'article présenté ci-dessus, une solution discrète de l'équation de la chaleur unidimensionnelle dans un domaine semi-infini avec une condition limite à l'interface substrat-corium dépendant du temps est établie à partir de celles de Carslaw et Jaeger [54]. Nous en donnons la démonstration dans cette section. Cette solution est implémentée par la suite dans notre routine de post-traitement afin de comparer l'échauffement du substrat expérimental et simulé. Comme seuls quelques millimètres sont échauffés dans l'épaisseur de l'ordre du mètre du substrat, comme présenté sur la figure 3.14, ce dernier est considéré comme semi-infini.

#### 3.7.1 Équation de la chaleur dans un milieu infini

Soit le problème (P1) qui correspond à l'équation de la chaleur sans conditions aux limites :

$$\partial_t \theta|_{Q_s} = \frac{1}{Fo} \partial_{zz} \theta|_{Q_s} \forall t > 0, \forall z \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

**Proposition 3.7.1.** *Une solution de (P1) est :*

$$\theta_{s1}(t, z) = t^{-1/2} e^{-z^2 Fo/(4t)} \quad (3.7)$$

Démonstration :

$$\partial_t \theta_{s1} = -\frac{1}{2} t^{-3/2} e^{-z^2 Fo/(4t)} + \frac{z^2 Fo}{4} t^{-5/2} e^{-z^2 Fo/(4t)},$$

$$\partial_z \theta_{s1} = -t^{-3/2} \frac{z Fo}{2} e^{-z^2 Fo/(4t)},$$

$$\partial_{zz} \theta_{s1} = -t^{-3/2} \frac{Fo}{2} e^{-z^2 Fo/(4t)} + \frac{z^2 Fo^2}{4} t^{-5/2} e^{-z^2 Fo/(4t)},$$

et

$$\partial_t \theta_{s1} - \frac{1}{Fo} \partial_{zz} \theta_{s1} = 0.$$

#### 3.7.2 Milieu semi-infini à température initiale constante et température à l'interface $z = 0$ nulle

Afin de passer d'un milieu infini à un milieu semi-infini, on cherche une solution du même type que (3.7), mais respectant des conditions limites. Les conditions aux limites à l'infini ne sont pas exprimées, car elles sont prises égales à la condition

initiale.

Soit le problème (P2) : Trouver  $\theta|_{Q_s}$  tel que :

$$\partial_t \theta|_{Q_s} = \frac{1}{Fo} \partial_{zz} \theta|_{Q_s}, \forall t, z > 0 \quad (3.8a)$$

$$\theta|_{Q_s}(t = 0, z) = A, \forall z > 0, \quad (3.8b)$$

$$\theta|_{Q_s}(t, z = 0) = 0, \forall t > 0 \quad (3.8c)$$

avec A une constante arbitraire.

**Lemme 3.7.1.**

$$\int_0^z t^{-1/2} e^{-z'^2 Fo/(4t)} dz' = \sqrt{\frac{\pi}{Fo}} \operatorname{erf} \left( \frac{z\sqrt{Fo}}{2\sqrt{t}} \right) \quad (3.9)$$

En posant  $\xi = \frac{z'\sqrt{Fo}}{2\sqrt{t}}$  et  $dz' = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{Fo}} d\xi$ , la partie à gauche de 3.9 devient :

$$\begin{aligned} \int_0^{z\sqrt{Fo}/(2\sqrt{t})} \frac{2}{\sqrt{Fo}} e^{-\xi^2} d\xi &= \frac{2}{\sqrt{Fo}} \int_0^{z\sqrt{Fo}/(2\sqrt{t})} e^{-\xi^2} d\xi \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{Fo}} \operatorname{erf} \left( \frac{z\sqrt{Fo}}{2\sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

**Proposition 3.7.2.** La solution de (P2) est :

$$\theta_{s2}(t, z) = \sqrt{\frac{\pi}{Fo}} \operatorname{erf} \left( \frac{z\sqrt{Fo}}{2\sqrt{t}} \right) \quad (3.10)$$

Démonstration :

$$\partial_t \theta_{s2} = -\frac{1}{2} t^{-3/2} z e^{-\frac{z^2 Fo}{4t}},$$

$$\partial_z \theta_{s2} = t^{-1/2} e^{-\frac{z^2 Fo}{4t}},$$

$$\partial_{zz} \theta_{s2} = \frac{Fo}{2} t^{-3/2} z e^{-\frac{z^2 Fo}{4t}}.$$

$\theta_{s2}(t, z)$  vérifie bien (3.8a) :

$$\partial_t \theta_{s2} - \frac{1}{Fo} \partial_{zz} \theta_{s2} = 0.$$

$$\theta_{s2}(t = 0, z) = \frac{\pi}{Fo},$$

qui est bien une constante arbitraire, donc (3.8b) est bien vérifiée, et enfin :

$$\theta_{s2}(t, z = 0) = 0,$$

donc  $\theta_{s2}(t, z)$  est solution de (P2), en considérant que la constante arbitraire  $A$  vaut  $\frac{\pi}{Fo}$ .

### 3.7.3 Milieu semi-infini, température initiale nulle et condition limite constante

Afin de passer du cas où la chaleur se propage dans un milieu semi-infini à température initiale constante et à condition à  $z = 0$  nulle, au cas où la température initiale est nulle et la condition à  $z = 0$  est constante, on soustrait la solution précédente à une solution constante :

Soit le problème (P3) : trouver  $\theta_{|Q_s}$  tel que :

$$\partial_t \theta_{|Q_s} = \frac{1}{Fo} \partial_{zz} \theta_{|Q_s}, \forall t, z > 0 \quad (3.11a)$$

$$\theta_{|Q_s}(t = 0, z) = 0, \forall z > 0, \quad (3.11b)$$

$$\theta_{|Q_s}(t, z = 0) = \theta_0, \forall t > 0 \quad (3.11c)$$

**Proposition 3.7.3.** *La solution de (P3) est :*

$$\theta_{s3}(t, z) = \theta_0 \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{z\sqrt{Fo}}{2\sqrt{t}} \right) \right). \quad (3.12)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \theta_{s3}(t, z) &= \theta_0 \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{z\sqrt{Fo}}{2\sqrt{t}} \right) \right) \\ &= \theta_0 - \theta_0 \theta_{s2}(t, z) \sqrt{\frac{Fo}{\pi}}, \end{aligned}$$

ainsi  $\theta_{s3}(t, z)$  vérifie (3.11a).

$$\theta_{s3}(t = 0, z) = 0,$$

et

$$\theta_{s3}(t, z = 0) = \theta_0,$$

donc  $\theta_{s3}(t, z)$  vérifie (3.11b) et (3.11c), donc c'est la solution du problème (P3).

### 3.7.4 Milieu semi-infini à température initiale nulle et surface à température évoluant avec le temps

Soit le problème (P4) : trouver  $\theta|_{Q_s}$  tel que :

$$\partial_t \theta|_{Q_s} = \frac{1}{Fo} \partial_{zz} \theta|_{Q_s}, \forall t, z > 0 \quad (3.13a)$$

$$\theta|_{Q_s}(t = 0, z) = 0, \forall z > 0, \quad (3.13b)$$

$$\theta|_{Q_s}(t, z = 0) = \theta(t), \forall t > 0 \quad (3.13c)$$

Afin de passer du problème à température à l'interface  $z = 0$  constante à un problème variable, on discrétise le domaine temporel en intervalles  $]\lambda; \lambda + \epsilon[$ .

On définit donc le problème (P $\lambda$ ) :

$$\partial_t \theta|_{Q_s} = \frac{1}{Fo} \partial_{zz} \theta|_{Q_s}, \forall t, z > 0 \quad (3.14a)$$

$$\theta|_{Q_s}(t = 0, z) = 0, \forall z > 0, \quad (3.14b)$$

$$\theta|_{Q_s}(t, z = 0) = \mathbb{I}_{] \lambda; +\infty[}(t) \theta(\lambda), \forall t > 0 \quad (3.14c)$$

On rappelle la définition de la fonction indicatrice  $\mathbb{I}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [a, b], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

**Lemme 3.7.2.** *La solution de (P $\lambda$ ) est :*

$$\theta_{s\lambda}(t, z) = \mathbb{I}_{] \lambda; +\infty[}(t) \theta(\lambda) \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{z\sqrt{Fo}}{2\sqrt{t - \lambda}} \right) \right). \quad (3.15)$$

Il s'agit en fait d'une homothétie selon  $t$  de  $\lambda$  du problème (P3).

On définit de manière analogue à (P $\lambda$ ) le problème (P $\lambda + \epsilon$ ).

**Lemme 3.7.3.** *La solution de (P $\lambda + \epsilon$ ) est :*

$$\theta_{s\lambda+\epsilon}(t, z) = \theta(\lambda) \mathbb{I}_{] \lambda+\epsilon; +\infty[}(t) \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{z\sqrt{Fo}}{2\sqrt{t - \lambda - \epsilon}} \right) \right). \quad (3.16)$$

Enfin, le problème (P $\epsilon$ ), qui correspond au cas où le milieu est initialement à température nulle puis une température  $\theta(\lambda)$  est appliquée en  $z = 0$  entre  $]\lambda; \epsilon[$  :

$$\partial_t \theta|_{Q_s} = \frac{1}{Fo} \partial_{zz} \theta|_{Q_s}, \forall t, z > 0 \quad (3.17a)$$

$$\theta|_{Q_s}(t = 0, z) = 0, \forall z > 0, \quad (3.17b)$$

$$\theta|_{Q_s}(t, z = 0) = \mathbb{I}_{] \lambda; \lambda+\epsilon[}(t) \theta(\lambda), \forall t > 0 \quad (3.17c)$$

**Lemme 3.7.4.** *La solution de  $(P\epsilon)$  est :*

$$\theta_{s\epsilon}(t, z) = \theta_{s\lambda}(t, z) - \theta_{s\lambda+\epsilon}(t, z) = \theta(\lambda) \left[ \mathbb{I}_{]_{\lambda, \lambda+\epsilon}[}(t) \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{z\sqrt{Fo}}{2\sqrt{t-\lambda}} \right) \right) + \mathbb{I}_{]_{\lambda+\epsilon, +\infty}[}(t) \left( \operatorname{erf} \left( \frac{z\sqrt{Fo}}{2\sqrt{t-\lambda-\epsilon}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{z\sqrt{Fo}}{2\sqrt{t-\lambda}} \right) \right) \right] \quad (3.18)$$

Il s'agit de la base de discrétisation de notre problème (P4). Ainsi en sommant les différents intervalles on obtient :

**Théorème 3.7.5.** *La solution discrète du problème  $(P4)$  est :*

$$\begin{aligned} \theta_{|Q_s}(t_n, x_i, y_i, -z_j) = & \sum_{k=1}^n \theta_k(x_i, y_i) \left[ \mathbb{I}_{]_{t_{k-1}, +\infty}[}(t_n) \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{-z_j\sqrt{Fo}}{2\sqrt{t_n - t_{k-1}}} \right) \right) - \mathbb{I}_{]_{t_k, +\infty}[}(t_n) \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{-z_j\sqrt{Fo}}{2\sqrt{t_n - t_k}} \right) \right) \right] \\ & = \sum_{k=1}^n \theta_k(x_i, y_i) \left[ \mathbb{I}_{]_{t_{k-1}, t_k}[}(t_n) \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{-z_j\sqrt{Fo}}{2\sqrt{t_n - t_{k-1}}} \right) \right) + \right. \\ & \quad \left. \mathbb{I}_{]_{t_k, +\infty}[}(t_n) \left( \operatorname{erf} \left( \frac{-z_j\sqrt{Fo}}{2\sqrt{t_n - t_k}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{-z_j\sqrt{Fo}}{2\sqrt{t_n - t_{k-1}}} \right) \right) \right] \quad (3.19) \end{aligned}$$

C'est cette solution qui est codée afin de représenter l'échauffement du substrat. La boucle temporelle sur  $k$  permet de prendre en compte l'historique de la température  $\theta$  de la coulée.

### 3.7.5 Pseudo-code pour l'implémentation de la solution

```

for  $n \geq 0$  do
  lire  $\bar{\theta}(X, Y)$  du corium. ;
   $\theta_{n,i,j} = 0$  ;
  for  $(Xi, Yi) \in \text{noeuds de } \mathcal{T}_h$  do
    for  $k \in [1; n]$  do
       $C_{k,i} = \theta_k(Xi, Yi, z = 0) = c\bar{\theta}_k(Xi, Yi)$ ;
      for  $j \in [0; nz]$  do
        if  $k < n$  then
           $\theta_{n,i,j+} = C_{k,i} \left[ \text{erf} \left( \frac{-z_j \sqrt{Fo}}{2\sqrt{t_n - t_k}} \right) - \text{erf} \left( \frac{-z_j \sqrt{Fo}}{2\sqrt{t_n - t_{k-1}}} \right) \right]$ ;
          ;
        else  $\theta_{n,i,j+} = C_{k,i} \left( 1 - \text{erf} \left( \frac{-z_j \sqrt{Fo}}{2\sqrt{t_n - t_{k-1}}} \right) \right)$ ;
          ;
        end
      end
    end
  end
  Écrire  $\theta_{n,i,j}$ ;
end

```

**Algorithm 1:** Pseudo-code pour la résolution de l'équation de la chaleur dans le substrat pour une coulée de corium à température  $\theta(t, x, y, z)$



# Chapitre 4

## Modélisation d'un écoulement viscoplastique mince anisotherme avec dégazage

Ce chapitre présente les hypothèses réalisées sur la modélisation d'un écoulement diphasique, menant à l'établissement d'un modèle de mélange dit "one-fluid". Ce modèle est ensuite utilisé dans l'article soumis à l'International Journal of Multiphase Flow, rédigé par Thomas Schiano, Barbara Bigot, Jean-François Haquet, Pierre Saramito et Claude Smutek. Puis la réduction du modèle de couche mince diphasique est développée, ainsi que son algorithme de résolution tel qu'implémenté dans Rheolef [48] et enfin des détails de l'implémentation sont donnés avec une dernière évaluation du dégazage.

### 4.1 Calcul de la vitesse relative d'une bulle dans un écoulement de corium

Afin de déterminer le modèle multiphasique le plus pertinent (mono-fluide avec glissement scalaire ou drift-flux, level-set, VOF...), il est nécessaire de déterminer la vitesse relative entre le milieu continu (ici, le corium), et la phase dispersée (la vapeur d'eau issue du dégazage du substrat). Pour ce faire, un pré-calcul portant sur la trajectoire d'une bulle isolée dans un champ de vitesses comparable à celui obtenu dans le cas monophasique de l'étalement d'un corium est réalisé.

#### 4.1.1 Calcul de la forme d'une bulle dans un étalement de corium

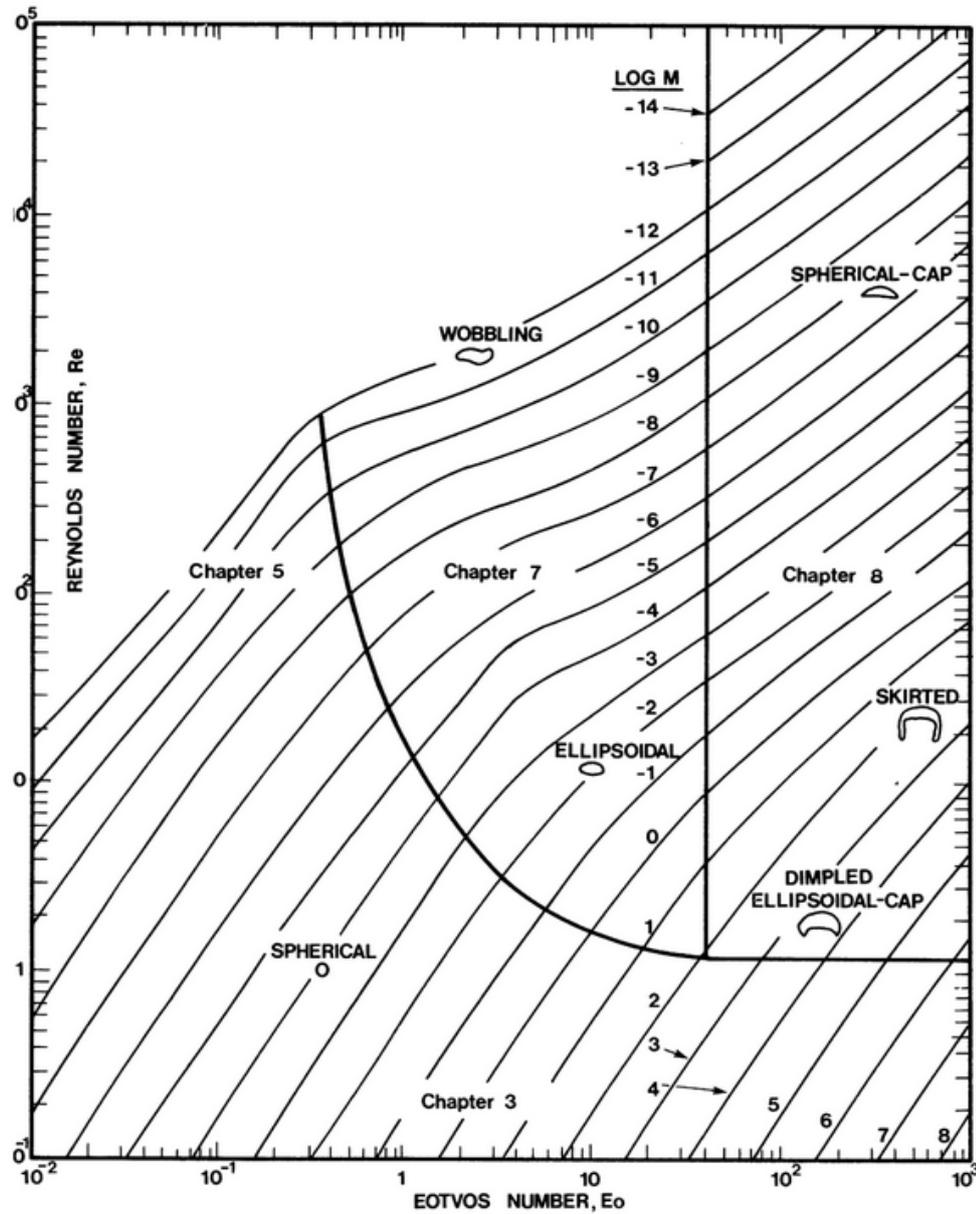


FIGURE 4.1 – Diagramme pour déterminer la forme d'une bulle en fonction des paramètres adimensionnels ( $E_o$ ,  $Re$ ,  $M$ ) (extrait de [76]).

Pour caractériser les forces s'exerçant sur cette bulle isolée, il est nécessaire d'en déterminer sa forme dans un écoulement pour en déduire son coefficient de traînée. La figure 4.1 de Clift et al. [76] permet d'évaluer cette forme en fonction des nombres de Reynolds, Morton et d'Eötvös/Bond. On utilise les définitions de ces

nombres proposées par Maxworthy et al. 1996 [77] pour calculer leurs valeurs. En considérant que le diamètre équivalent  $d_b$  de la bulle est comparable à la longueur capillaire, on considère que :

$$d_b = \sqrt{\frac{\sigma_{cap}}{\Delta\rho g}}, \quad (4.1a)$$

avec  $\sigma_{cap}$  la tension de surface,  $\Delta\rho$  la différence de masse volumique entre les phases et  $g$  le module de l'accélération de la gravité.

Ce paramètre nous permet de déterminer le nombre d'Eötvös,  $EO = \frac{\rho_1 d_b^2 g}{\sigma_{cap}}$ , et de Morton,  $M = \frac{g \nu_1^4 \rho_1^3}{\sigma_{cap}^3}$ , avec  $\rho_1$  la masse volumique du milieu continu et  $\nu_1$  sa viscosité cinématique. À l'aide des valeurs données dans la table 4.1, on obtient  $EO = 1.49$ ,  $M = 439.66$  et  $\log(M) = 2.64$ , ce qui indique d'après la figure 4.1 que les bulles ont une forme sphérique.

TABLE 4.1 – Propriétés physiques du corium (1) et de la vapeur d'eau (2) nécessaires au calcul de la forme des bulles. [36, 78]

$\rho_1$	5100 kg.m <sup>-3</sup>
$\rho_2$	0.590 kg.m <sup>-3</sup>
$d_b$	3.9.10 <sup>-3</sup> m
$\sigma_{cap}$	4.94.10 <sup>-1</sup> N.m <sup>-1</sup>
$\mu_1$	22.4 Pa.s

#### 4.1.2 Calcul de la trajectoire d'une bulle lors d'un étalement

En considérant une bulle sphérique obéissant à la loi des gaz parfaits, on écrit l'équilibre des forces sur la bulle selon l'axe vertical d'après Le Roy de Bonneville [79] et Magnaudet [80] :

$$F_N = F_G - F_D \quad (4.1b)$$

Avec  $F_N$  la force de masse ajoutée,  $F_G$  la force d'Archimède et  $F_D$  la force de traînée. On néglige ici la force de Tchen (d'histoire) et l'inertie de la bulle par rapport à la force de masse ajoutée. On considère que la traînée suit la loi de Stokes, ainsi pour une bulle sphérique de diamètre  $d_b$  on a :

$$\rho_1 V_2 \frac{du_2}{dt} = \rho_1 V_2 g - 3\pi\mu_1 d_b u_2, \quad (4.1c)$$

avec  $\mu_1$  la viscosité du milieu continu,  $V_2$  le volume de la bulle et  $u_2$  sa vitesse verticale. En supposant que la bulle est compressible et à l'équilibre thermique avec le milieu continu, on a :

$$P_2 V_2 = nRT, \quad (4.1d)$$

avec  $P_2$  la pression partielle du gaz,  $n$  le nombre de moles,  $R$  la constante molaire des gaz parfaits et  $T$  la température :

$$\frac{d}{dt}(P_2 V_2) = 0 \quad (4.1e)$$

$$P_2 \frac{dV_2}{dt} + V_2 \frac{dP_2}{dt} = 0 \quad (4.1f)$$

On donne une expression des différents termes de (4.1f), en utilisant la loi de Laplace-Young :

$$\begin{cases} P_2 = P_\infty + \rho_1 g h + \frac{4\sigma_{cap}}{d_b}, \\ \frac{dP_2}{dt} = \rho_1 g \frac{dh}{dt} - 4\sigma_{cap} d_b^{-2} \frac{d(d_b)}{dt}, \\ V_2 = \frac{\pi}{6} d_b^3, \\ \frac{dV_2}{dt} = \frac{\pi}{2} d_b^2 \frac{d(d_b)}{dt}, \end{cases}$$

avec  $P_\infty$  la pression atmosphérique. On remplace les termes dans (4.1f) par leurs expressions :

$$\frac{\pi}{6} d_b^3 \left( \rho_1 g \frac{dh}{dt} - 4\sigma_{cap} d_b^{-2} \frac{d(d_b)}{dt} \right) + \frac{\pi}{2} d_b^2 \frac{d(d_b)}{dt} \left( P_\infty + \rho_1 g h + 4\sigma_{cap} d_b^{-2} \right) = 0 \quad (4.1g)$$

On factorise par  $\frac{dh}{dt}$  et  $\frac{d(d_b)}{dt}$  :

$$\rho_1 g \frac{dh}{dt} = \frac{d(d_b)}{dt} \left( 4\sigma_{cap} d_b^{-2} - \frac{3}{d_b} (P_\infty + \rho_1 g h + 4\sigma_{cap} d_b^{-1}) \right) \quad (4.1h)$$

On obtient une équation différentielle sur le diamètre de la bulle :

$$\frac{d(d_b)}{dt} = \frac{-\rho_1 g \frac{dh}{dt}}{\left( 8\sigma_{cap} d_b^{-2} + 3d_b^{-1} (P_\infty + \rho_1 g h) \right)} \quad (4.1i)$$

On définit la hauteur de la bulle  $h = h_0 - \int_0^t u_2 dt$  avec  $h_0$  la hauteur initiale de la bulle, donc

$$\frac{dh}{dt} = -u_2. \quad (4.1j)$$

Enfin, l'équation différentielle sur la vitesse verticale  $u_2$  de la bulle devient :

$$\frac{du_2}{dt} = g - 18\nu_1 d_b^{-2} u_2 \quad (4.1k)$$

Le système composé des équations différentielles du premier ordre (4.1i), (4.1j) et (4.1k) est résolu à l'aide de la fonction `odeint` de la librairie `scipy.integrate` de python 3.8.

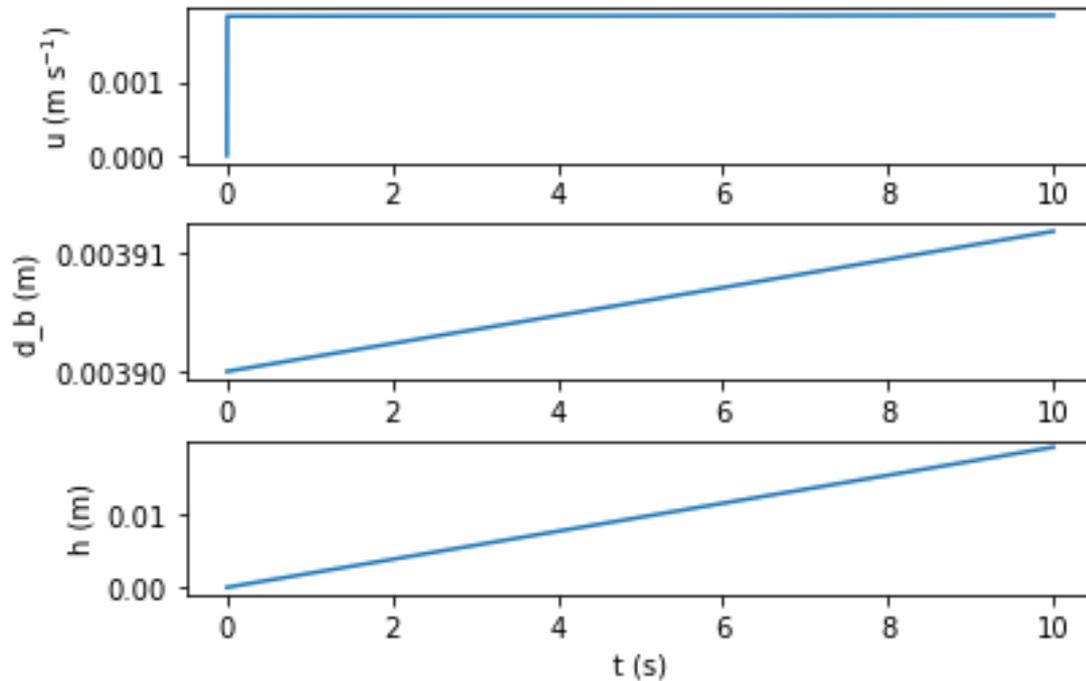


FIGURE 4.2 – Évolutions temporelles de la vitesse, le diamètre et la hauteur d'une bulle de vapeur d'eau au cours du temps dans un écoulement de corium.

La vitesse verticale et l'élévation de la bulle sont suffisamment faibles pour considérer que la vitesse relative entre les deux milieux est faible devant leur vitesse moyenne. Par conséquent les bulles sont principalement advectées par l'écoulement de la phase continue.

L'évolution du diamètre de la bulle est petite vis-à-vis de son diamètre initial, ainsi on peut considérer que la vapeur d'eau est incompressible dans notre cas, comme montré sur la fig. 4.2.

### 4.1.3 Établissement d'un modèle diphasique à vitesse moyenne à surface libre

#### Définitions

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  le domaine ouvert borné supposé contenant deux fluides et  $V$  un sous-domaine ouvert régulier quelconque de  $\Omega$ . Soient  $v_1$  et  $v_2$  les volumes de ces deux constituants dans  $V$ . Par la suite, nous considérerons que le constituant 1 sera du corium et le constituant 2 sera de la vapeur d'eau. On peut définir le volume de  $V$ ,  $v = mes(V) = v_1 + v_2$  et les sous-domaines de deux constituants  $V = V_1 \cup V_2$  avec  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , afin de s'assurer que seul le fluide 1 existe dans le volume  $V_1$  et de même pour le volume  $V_2$ . On définit la fraction volumique du fluide 1 dans un volume  $V$  à l'instant  $t$  par :

$$\phi(V, t) = \frac{mes(V_1)}{mes(V)}$$

Cette définition est valable pour tout voisinage  $V$  contenant  $x \in \Omega$ , on peut donc définir la fraction volumique en  $x$  par :

$$\phi(x, t) = \lim_{mes(V) \rightarrow 0, x \in V} \frac{mes(V_1)}{mes(V)} \in [0; 1]$$

Quand  $\phi = 1$ , c'est uniquement le composant 1 (le corium) qui est présent. Ensuite, on définit la masse volumique du mélange en  $x$  à l'instant  $t$  :

$$\rho(x, t) = \lim_{mes(V) \rightarrow 0, x \in V} \frac{mes(V_1)\rho_1 + mes(V_2)\rho_2}{mes(V)} = \rho_1\phi + \rho_2(1 - \phi)$$

Enfin, on définit de manière volumique (en comparaison à des définitions massiques comme dans [81]) la vitesse de mélange  $\mathbf{u}$  et la vitesse relative entre les phases  $\mathbf{w}$  à partir des champs de vitesses des différentes phases, notés  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1\phi + \mathbf{u}_2(1 - \phi)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$$

d'où :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} + (1 - \phi)\mathbf{w}$$

et

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \phi\mathbf{w}$$

### Équations de conservation

On écrit les équations de conservation de la masse pour les deux constituants :

$$\partial_t(\rho_1\phi) + \nabla \cdot (\rho_1\phi\mathbf{u}_1) = 0 \quad (4.2a)$$

$$\partial_t(\rho_2(1-\phi)) + \nabla \cdot (\rho_2(1-\phi)\mathbf{u}_2) = 0 \quad (4.2b)$$

En sommant (4.2a)/ $\rho_1$  + (4.2b)/ $\rho_2$  et en considérant  $\rho_1$  et  $\rho_2$  constants, on a l'équation de conservation de la masse du mélange :

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}) = 0. \quad (4.2c)$$

En prenant (4.2a), en remplaçant  $u_1$  par  $u$  et  $w$  et avec (4.2c), on obtient l'équation de transport de la fraction volumique :

$$\partial_t\phi + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi + \nabla \cdot (\phi(1-\phi)\mathbf{w}) = 0 \quad (4.2d)$$

Le troisième terme de l'équation (4.2d) exprime le mouvement relatif entre les phases. Il a pour intérêt de conserver numériquement la valeur de  $\phi$  dans le domaine  $[0; 1]$ . Pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement des deux fluides, on a :

$$\partial_t(\rho_1\phi\mathbf{u}_1) + \nabla \cdot (\rho_1\phi\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{1,tot}) + \mathbf{f}_1 \quad (4.2e)$$

$$\partial_t(\rho_2(1-\phi)\mathbf{u}_2) + \nabla \cdot (\rho_2(1-\phi)\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{2,tot}) + \mathbf{f}_2 \quad (4.2f)$$

Avec  $\boldsymbol{\sigma}_{i,tot}$ ,  $i \in 1, 2$ , le tenseur des contraintes de Cauchy et  $\mathbf{f}_i$  les forces volumiques auxquelles le milieu  $i$  est soumis. Nous souhaitons réécrire ces équations en terme de vitesse moyenne  $\mathbf{u}$  et relative  $\mathbf{w}$ , pour cela nous sommes terme à terme les équations (4.2e) et (4.2f) en remplaçant  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  par leurs expressions. Par ailleurs, avec les résultats préliminaires de la partie §4.1, nous faisons l'hypothèse que les termes en vitesse relative  $\mathbf{w}$  sont petits devant ceux en  $\mathbf{u}$ . La somme des termes temporels donne :

$$\rho_1\phi\mathbf{u}_1 + \rho_2(1-\phi)\mathbf{u}_2 = \rho(\phi)\mathbf{u} + (\rho_1 - \rho_2)(1-\phi)\phi\mathbf{w} \approx \rho(\phi)\mathbf{u}$$

La somme des termes advectifs se réduit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \rho_1\phi\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 + \rho_2(1-\phi)\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 = \\ & \rho(\phi)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + (\rho_1 - \rho_2)(1-\phi)\phi(\mathbf{u} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{u}) + (1-\phi)\phi(\rho_1 + \rho_2 - \rho(\phi))\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \\ & \approx \rho(\phi)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \end{aligned}$$

Afin de pouvoir écrire la somme des termes de diffusion visqueuse, on commence par réécrire le tenseur des taux de déformation des deux fluides :

$$D(\mathbf{u}_1) = D(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}(-\nabla\phi \otimes \mathbf{w} + (-\nabla\phi \otimes \mathbf{w})^T + (1-\phi)\nabla\mathbf{w} + ((1-\phi)\nabla\mathbf{w})^T) \approx D(\mathbf{u})$$

$$D(\mathbf{u}_2) = D(\mathbf{u}) - \frac{1}{2}(\nabla\phi \otimes \mathbf{w} + (\nabla\phi \otimes \mathbf{w})^T + (1+\phi)\nabla\mathbf{w} + ((1+\phi)\nabla\mathbf{w})^T) \approx D(\mathbf{u})$$

On considère le fluide 1 viscoplastique suivant la loi constitutive d'Herschel-Bulkley et le fluide 2 newtonien. En faisant respectivement sur l'indice de consistance du mélange  $K(\theta, \phi)$  et la contrainte seuil  $\tau_y(\theta, \phi)$  les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} K(\theta, \phi) &= \phi K_1(\theta) + (1-\phi)K_2 \\ \tau_y(\theta, \phi) &= \phi\tau_{y,1} \end{cases}$$

on a :

$$\begin{cases} K(\theta, \phi) &= \phi K_e \exp\left(\text{Arr}\left(\frac{\theta_e - \theta}{\theta_e - \theta_a}\right)\right) + (1-\phi)K_2 \\ \tau_y(\theta, \phi) &= \phi\tau_{y,e} \exp\left(\text{Arr}\left(\frac{\theta_e - \theta}{\theta_e - \theta_a}\right)\right) \end{cases}$$

avec  $K_e$  l'indice de consistance du composant 1 et  $\tau_{y,e}$  sa contrainte seuil à sa température d'entrée  $\theta_e$ , cf §2.2. Ainsi on obtient la formulation suivante du tenseur des contraintes déviatoriques du mélange corium/vapeur d'eau :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \left( K(\theta, \phi) \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{n-1} + \frac{\tau_y(\theta, \phi)}{|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|} \right) \dot{\boldsymbol{\gamma}} & \text{quand } \dot{\boldsymbol{\gamma}} \neq 0, \\ |\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_y(\theta, \phi) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour ce mélange le tenseur des contraintes de Cauchy s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}_{tot} = -p\mathbb{I} + \boldsymbol{\tau}$$

avec la pression du mélange  $p = p_1 + p_2$  la somme des pressions partielles. Enfin, la somme des forces volumiques donne  $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}$ . On choisit ici de modéliser ces forces avec le modèle de Continuum Surface Force (CSF) de Brackbill et al. [47] :

$$\partial_t(\rho(\phi)\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho(\phi)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \nabla \cdot (-p\mathbb{I} + 2K(\phi)D(\mathbf{u})) + \rho(\phi)\mathbf{g} + \sigma_{cap}\kappa \frac{\nabla\phi}{2} \quad (4.2g)$$

avec  $\sigma_{cap}$  la tension de surface et  $\kappa = \nabla \cdot \left( -\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right)$  la courbure de l'interface diffuse. Le terme de forces capillaires devient donc  $\sigma_{cap} \frac{\nabla^2\phi}{|\nabla\phi|} \nabla\phi$ .

On peut écrire l'équation de conservation de l'énergie sur le mélange en considérant sa conductivité thermique comme  $k(\phi) = \phi k_e + (1 - \phi)k_2$ , avec  $k_e$  et  $k_2$  respectivement la conductivité thermique des phases 1 et 2 et en utilisant l'eq.(4.2c), tel que décrit dans [82, 83] :

$$\rho(\phi)c_p(\partial_t(\theta) + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta) - \nabla \cdot (k(\phi)\nabla \theta) = 0 \quad (4.2h)$$

### Conditions initiales et aux limites

On s'intéresse à l'établissement des conditions initiales et aux limites  $\partial\Omega$  pour un mélange. Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1\phi(t=0) + \mathbf{u}_2(1 - \phi(t=0)), \quad (4.2i)$$

$$\theta(t=0) = \theta_0, \quad (4.2j)$$

$$\phi(t=0) = \phi_0. \quad (4.2k)$$

Les conditions de Dirichlet en vitesse deviennent :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1\phi + \mathbf{u}_2(1 - \phi) \text{ en } \partial\Omega \quad (4.2l)$$

La condition sur une hypothétique surface libre devient :

$$\boldsymbol{\sigma}_{tot} \cdot \mathbf{n}_f(t) = \mathbf{0} \text{ en } \partial\Omega \quad (4.2m)$$

avec  $\mathbf{n}_f(t)$  la normale sortant au domaine  $\Omega$ . Les conditions aux limites sur la température sont inchangées par rapport au cas monophasique du fait de l'hypothèse d'équilibre thermique entre les phases. Par la suite, nous présentons un article basé sur cette modélisation de mélange multiphasique, pour un écoulement anisotherme viscoplastique de faible épaisseur. Il permet d'étendre le travail sur l'analyse asymptotique des écoulements isothermes monophasiques de faible épaisseur de Liu et Mei [31] et Balmforth et al. [32] ainsi que ceux de Bernabeu et al. [21, 35] sur les écoulements viscoplastiques de faible épaisseur isothermes puis anisothermes sur une topologie arbitraire, à un écoulement multiphasique viscoplastique anisotherme de faible épaisseur.

## Modelling spreading with degassing using anisotherm viscoplastic multiphase shallow water approximation

Thomas Schiano<sup>a,b</sup>, Barbara Bigot<sup>a,\*</sup>, Jean-François Haquet<sup>a</sup>, Pierre Saramito<sup>b</sup>, Claude Smutek<sup>c</sup>

<sup>a</sup>CEA, DES, IRESNE, DTN, SMTA, LMAG, Cadarache F-13108 St Paul Lez Durance France

<sup>b</sup>Laboratoire Jean Kuntzmann, Grenoble-Alpes University, 700 Avenue Centrale, 38400 Saint Martin d'Hères

<sup>c</sup>Laboratoire GéoSciences Réunion, Réunion University, Institut de Physique du Globe de Paris, Sorbonne Paris-Cité, 15 av. René Cassin, 97400 Saint-Denis

---

### Abstract

A tridimensional multiphase viscoplastic anisotherm free surface model is developed, it is reduced to an height-averaged bidimensional model and its use for molten nuclear core spreading is argued with dimensionless numbers. It describes the tridimensional flow as non-Newtonian, non-isothermal and a mixture of a continuous phase and gas released from a substrate. Using an adaptive finite element method based on C++ library Rheolef, simulations are ran. A sensitivity analysis on the numerical parameters and the gas inflow rate are conducted. Tridimensional solution of the problem is computed from the bidimensional height-averaged solution.

*Keywords:* Spreading, Free-surface, Shallow Water, Degassing, Phase field, Modelling, Numerical Simulation

---

## 4.2 Introduction

High density and temperature fluid spreading is an issue met in many situations such as volcanic lava flows [84, 61] and nuclear severe accidents [4, 9]. These are described by complex multiphase flows characterized by coupled multi-physics phenomena such as solidification due to heat transfers (at the surface by radiation or by convection in the presence of water, with the substrate by conduction), the rheology of the fluid (possibly non Newtonian) or interactions with the substrate (ablation, degassing). A viscoplastic (non Newtonian) description of corium has been gathering interest since the viscosity and yield stress measurements made by Roche et al. [64]. They lead us to consider a greater range of fluid behavior. Fig. 4.3 presents the stress tensor according to the deformation rate tensor and allows illustrating the different behaviors of a fluid according to the Herschel-Bulkley [20] viscoplastic model that depends on two parameters : the fluid index,  $n$ , and yield stress,  $\tau_y$ . For  $n = 1$  and  $\tau_y = 0$ , this fluid is considered as Newtonian, for  $n = 1$  and  $\tau_y \neq 0$  as viscoplastic Binghamian [60], and for  $n \neq 1$  and  $\tau_y \neq 0$  as general viscoplastic.

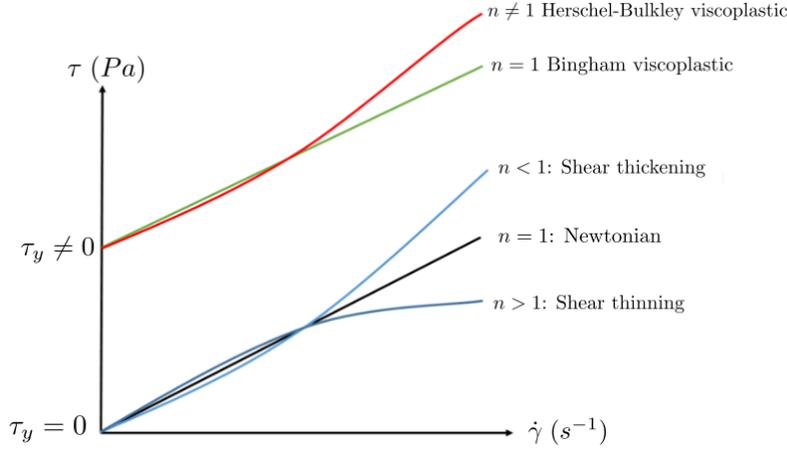


FIGURE 4.3 – Stress tensor according to deformation rate tensor illustrating the different behaviors of a fluid according to the Herschel-Bulkley model with two parameters : the fluid index,  $n$ , and yield stress,  $\tau_y$ . For  $n = 1$  and  $\tau_y = 0$ , fluid is considered as Newtonian, for  $n = 1$  and  $\tau_y \neq 0$  as Binghamian, and for  $n \neq 1$  as viscoplastic.

As pointed out by Saramito and Wachs [24], the regularization approach currently used in industrial codes lacks a general convergence result of the solution with the regularization parameter and cannot follow the unyielded regions of a yield stress fluid flow with the deformation rate tensor  $\dot{\gamma} = 0$ .

The use of asymptotic analysis to provide shallow approximations for free surface viscoplastic flows has been introduced by Liu and Mei [31] and further experimental and mathematical analysis was performed by Balmforth et al. [32]. Spread over an arbitrary topography was studied by Bernabeu et al. [21]. Adding thermal effects has shown to be more complex as the energy equation does not reduce to a bidimensional one using the asymptotic analysis approach. Bercovici and Lin investigated this particular issue for Newtonian fluids in [33] and Balmforth et al. [34] built upon it to propose a model with temperature-dependent consistency and temperature-independent yield stress for shallow viscoplastic flows. Then, Bernabeu et al. [35] proposed a model with height-averaged temperature-dependent consistency and yield-stress comparing second and third order polynomial vertical distribution of temperature.

Here, we propose to adapt this viscoplastic model to shallow anisotherm multi-phase spreading with a second-order temperature polynomial approximation with non-constant viscosity using a model based on Shaw law [16] and first-order volume fraction polynomial approximation.

To account for the effect of degassing, we base our method on the phase field method which has been introduced by Cahn and Hilliard [42] then enhanced in Allen and Cahn [43]. We use a mixture model as described in [39, 40], using relative velocity models from the works of Hibiki and Ishii [44, 41, 45] and the continuum surface force model by Brackbill et al. [47].

We first present the tridimensional model, then perform a dimensional analysis on it before giving its reduced form by expanding on the process provided by Bernabeu et al. [35]. Then, using the C++ library Rheolef [48], sensitivity analysis is performed on numerical parameters and gas inflow velocity. Finally, we discuss the tridimensional reconstructed results.

### 4.3 Mathematical model

In this section, we present the multiphase viscoplastic model. Fig. 4.4 shows the spreading scheme with the melt spread. It involves three domains, denoted by the indices f,s and ext that represent respectively the melt, the substrate and the ambient environment of the spread. Let  $Q$  be an open set of  $\mathbb{R}^3$  of regular border  $\partial Q$  be the whole domain. It splits as  $Q = Q_f(t) \cup Q_s$  where  $Q_f(t)$  is the melt flow region, and  $Q_s$  the substrate. The boundary of the melt flow region also splits as  $\partial Q_f(t) = \Gamma_f(t) \cup \Gamma_s \cup \Gamma_w$  where  $\Gamma_f(t)$  is the free surface of the flow,  $\Gamma_s$  the horizontal plane where the melt is in contact with the substrate where degassing happens and  $\Gamma_w$  the vertical walls. Finally, a part  $\Gamma_e \subset \Gamma_s$  corresponds to the melt alimentation region, where there is an inflow.

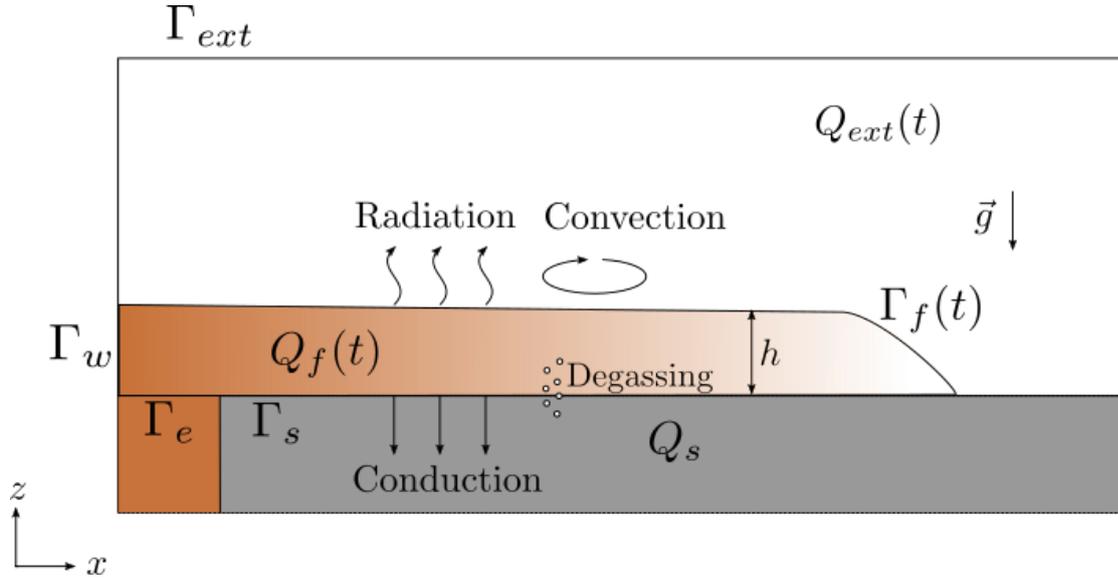


FIGURE 4.4 – Multiphase spreading : its geometry and notations

### 4.3.1 Tridimensional mixture model

We use the phase field method equation used by Chiu [85], replacing the curvature proportional term by a relative velocity dependent one in order to track the volume fraction of the melt  $\phi$ , such as :

$$\partial_t \phi + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi + \nabla \cdot (\phi(1 - \phi)\mathbf{w}) = 0 \quad (4.3a)$$

where  $\mathbf{u} = \phi\mathbf{u}_1 + (1 - \phi)\mathbf{u}_2$  is the volumetric mixture velocity with  $\mathbf{u}_1$  and  $\mathbf{u}_2$  respectively the continuous and dispersed velocities and  $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  is the relative velocity between phases, following the model from Damian and Nigro [39], we model it by neglecting relative velocity along the  $x$  and  $y$  directions with a constitutive law :

$$w_z = w_s \phi(1 - \phi) \quad (4.3b)$$

the  $w_s$  constant can be interpreted as in [39] by the terminal velocity of a single bubble moving in a continuous phase and we can determine it using the drag laws provided by Hibiki and Ishii in [45] for bubbly flows from which we use  $w_s = \sqrt{2} \left( \frac{|g| \sigma_{cap} (\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1^2} \right)^{1/4}$ , with  $\rho_1$  and  $\rho_2$  the density of media 1 and 2 and  $\sigma_{cap}$  the surface tension. This assumption is justified for our application in section §4.4.

We model the two phases using a mixture model that uses the Herschel-Bulkley constitutive equation, which expresses the deviatoric part  $\boldsymbol{\tau}$  of the Cauchy stress

tensor in the melt as

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \left( K(\theta, \phi) \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{n-1} + \frac{\tau_y(\theta, \phi)}{|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|} \right) \dot{\boldsymbol{\gamma}} & \text{when } \dot{\boldsymbol{\gamma}} \neq 0, \\ |\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_y(\theta, \phi) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (4.3c)$$

where  $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T$  is the shear rate tensor and  $\theta$  is the temperature. Also  $K(\theta, \phi)$  is the temperature and volume fraction-dependent consistency index,  $\tau_y(\theta, \phi)$ , the temperature-dependent yield stress and  $n$  is the power-law index, As depicted on Fig. 4.3, for  $\tau_y = 0$  and  $n = 1$ , the fluid is Newtonian, and  $K(\theta, \phi)$  is the temperature and volume fraction-dependent viscosity. Here, the temperature dependence of both consistency index and yield stress follow the Shaw model with the same coefficient [16] :

$$\begin{aligned} K(\theta, \phi) &= \phi K_e \exp \left( Arr \left( \frac{\theta_e - \theta}{\theta_e - \theta_a} \right) \right) + (1 - \phi) K_2 \\ \tau_y(\theta, \phi) &= \phi \tau_{y,e} \exp \left( Arr \left( \frac{\theta_e - \theta}{\theta_e - \theta_a} \right) \right) \end{aligned}$$

with  $K_e$  and  $\tau_{y,e}$ , the value of  $K(\theta, \phi)$  and  $\tau_y(\theta, \phi)$  at the inlet reference temperature  $\theta_e$  and with  $\phi = 1$ . The values of the constants  $\tau_{y,e}$ ,  $K_e$  and  $Arr$  are determined through the viscosity and yield stress measurements of Roche et al. [64] and Ramacciotti et al. [11] for the application in this article.  $K_2$  is the value of  $K(\theta, \phi)$  for  $\phi = 0$ . Assuming a constant density for both phases for the continuous phase and the dispersed phase and a mixture density of  $\rho(\phi) = \phi \rho_1 + (1 - \phi) \rho_2$ , the mass conservation equation of the mixture yields :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.3d)$$

and using the continuum surface force (CSF) model by Brackbill et al. [47], the momentum conservation equation becomes :

$$\partial_t(\rho(\phi) \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho(\phi) \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \nabla \cdot (-p \mathbb{I} + \boldsymbol{\tau}) - \sigma_{cap} \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \nabla \phi + \rho(\phi) \mathbf{g} \quad (4.3e)$$

where  $p$  is the pressure and  $\mathbf{g}$  the gravity vector. The energy conservation equation reads :

$$\rho(\phi) c_p (\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta) - \nabla \cdot (k(\phi) \nabla \theta) = 0 \quad (4.3f)$$

with  $c_p$  the specific heat capacity and  $k$  the volume fraction-dependent heat conduction coefficient, with  $k(\phi) = \phi k_e + (1 - \phi) k_2$ ,  $k_e$  its value for the first phase

and  $k_2$  its value for the second one. As in [35] and [49], we neglect the friction dissipation term and temperature-driven buoyancy. Considering the substrate  $Q_s$  as a rigid solid that is not ablated, the energy conservation equation in the substrate is :

$$\rho_s c_{ps} \partial_t \theta - \nabla \cdot (k_s \nabla \theta) = 0 \quad (4.3g)$$

where  $\rho_s$  is the density of the substrate,  $c_{ps}$ , its specific heat capacity, and  $k_s$ , its heat conduction coefficient. Finally, we close the set of equations (4.3c)-(4.3g) with initial and boundary conditions. We assume that the free surface  $\Gamma_f(t)$  can be explicitly described by the mixture height function  $h$  by :

$$\Gamma_f(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z = h(t, x, y)\}$$

where, by convention, the plane  $z = 0$  coincides with the melt-substrate interface  $\Gamma_s$ , see Fig. 4.4. Note that the height  $h(t, x, y)$  is defined for all  $t > 0$  and  $(x, y) \in \Gamma_s \cup \Gamma_e$ . Then, the transport of the free surface by the flow writes :

$$\partial_t h + u_x \partial_x h + u_y \partial_y h - u_z = 0 \quad (4.3h)$$

The initial conditions on velocity, height, temperature and volume fraction read :

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \text{ in } Q_f(t=0) \quad (4.3i)$$

$$h(t=0) = h_0 \text{ on } \Gamma_s \quad (4.3j)$$

$$\theta(t=0) = \theta_0 \text{ in } Q_f(t=0) \cup \Gamma_s \cup Q_s \quad (4.3k)$$

$$\phi(t=0) = \phi_0 \text{ in } Q_f(t=0) \cup \Gamma_s \cup Q_s \quad (4.3l)$$

where  $\mathbf{u}_0$ ,  $h_0$ ,  $\theta_0$  and  $\phi_0$  are known from experimental measurements. In the following study, they correspond to  $h_0 = 0$ ,  $\mathbf{u}_0 = 0$ ,  $\theta_0 = \theta_a$ , the atmospheric temperature and  $\phi_0 = 0$ . A Dirichlet condition for velocity on the substrate plane  $\Gamma_s$  and the inlet plane  $\Gamma_e$  is used, as they are considered as no-slip boundaries. It is completed with the inlet velocity condition for the  $z$ -component :

$$u_x = u_y = 0 \text{ and } u_z = w_e \text{ on } (\Gamma_e \cup \Gamma_s) \cap \partial Q_f(t) \quad (4.3m)$$

where  $w_e$  is the inlet velocity, which is deduced from the measured flow rate for the region  $\Gamma_e \cap \partial Q_f(t)$  and from the degassing flow rate for the substrate contact region  $\Gamma_s \cap \partial Q_f(t)$ . On the vertical walls  $\Gamma_w$ , the no-slip boundary condition simply becomes  $\mathbf{u} = 0$ . On the free surface  $\Gamma_f(t)$ , surface tension effects are neglected, so the normal Cauchy stress is just zero, i.e. :

$$(\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma_f(t) \quad (4.3n)$$

where  $\mathbf{n}$  denotes the outward unit normal at  $Q_f(t)$  on the free surface  $\Gamma_f(t)$ . A Dirichlet condition for temperature on  $\Gamma_s$  is given to model inlet temperature in its inlet region  $\Gamma_e$  :

$$\theta = \theta_e \text{ on } \Gamma_e \quad (4.3o)$$

On  $\Gamma_s$  but outside of this inlet region  $\Gamma_e$ , the melt is in contact with the substrate : the temperature is continuous across  $\Gamma_s$  while the heat transfer is considered to be dominantly conductive :

$$\theta|_{Q_f} = \theta|_{Q_s} \text{ on } \Gamma_s \setminus \Gamma_e \quad (4.3p)$$

$$k \mathbf{n} \cdot \nabla(\theta|_{Q_f}) = k_s \mathbf{n} \cdot \nabla(\theta|_{Q_s}) \text{ on } \Gamma_s \setminus \Gamma_e \quad (4.3q)$$

where  $\theta|_{Q_f}$  (resp.  $\theta|_{Q_s}$ ) denotes the restriction of the temperature  $\theta$  in the melt (resp. substrate) region and  $\mathbf{n}$  is the outward unit normal at  $Q_f(t)$  on the substrate plane  $\Gamma_s$ . On the free surface  $\Gamma_f(t)$ , both radiative and convective heat transfers with the environment are taken into account :

$$k \mathbf{n} \cdot \nabla \theta + \epsilon \sigma_{SB} (\theta^4 - \theta_a^4) + \lambda(\theta - \theta_a) = 0 \text{ on } \Gamma_f(t) \quad (4.3r)$$

with  $\epsilon$  is the emissivity,  $\sigma_{SB}$ , the Stefan-Boltzmann constant and  $\lambda$ , the convective heat transfer coefficient. Finally, the temperature at the bottom of the substrate is assumed to tend to the atmospheric one :

$$\theta(z = -\infty) = \theta_a. \quad (4.3s)$$

A Dirichlet condition for volume fraction is given on  $\Gamma_s$  and  $\Gamma_e$ , presuming that each border can release only one type of phase :

$$\phi = 1 \text{ on } \Gamma_e \quad (4.3t)$$

$$\phi = 0 \text{ on } \Gamma_s \quad (4.3u)$$

The set of equations (4.3c)-(4.3u) defines the tridimensional multiphase viscoplastic melt spreading problem with six unknowns ( $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}, p, h, \theta, \phi$ ) that is time and space-dependent, while the computational space is time-dependent since it involves a free-surface.

### 4.3.2 Dimensional analysis

In 2013, Bernabeu et al. [21] has shown that the tridimensional isothermal viscoplastic free-surface problem could be reduced as a bidimensional one in terms of the height  $h$  only as unknown. This reduction bases on a dimensional and asymptotic analysis, assuming that the aspect ratio of the height versus the horizontal

length is small. This result was extended in 2016 in Bernabeu et al. [35] for anisotherm viscoplastic free-surface flows, with the height  $h$  and the height-averaged temperature  $\bar{\theta}$  as unknowns. We define the height average  $\bar{\xi}$  of any quantity  $\xi$  by :

$$\bar{\xi}(t, x, y) = \begin{cases} \frac{1}{h(t, x, y)} \int_0^{h(t, x, y)} \xi(t, x, y, z) dz & \text{when } h(t, x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Here we perform the same reduction process for tridimensional anisotherm multiphase viscoplastic free-surface flows. We neglect the effect of temperature and volume fraction vertical variation on density, consistency index, yield stress and heat conduction coefficient, so they depend only on the vertical averaged temperature and volume fraction :  $\rho(\phi) = \rho(\bar{\phi})$ ,  $K(\theta, \phi) = K(\bar{\theta}, \bar{\phi})$ ,  $\tau_y(\theta, \phi) = \tau_y(\bar{\theta}, \bar{\phi})$  and  $k(\phi) = k(\bar{\phi})$ . The problem is rewritten using dimensionless quantities and unknowns that are compared in order to simplify it using physical arguments. Those dimensionless unknowns are denoted with tildes. Let  $H$  be the characteristic flow height and  $L$  its characteristic horizontal length, we introduce the aspect ratio :

$$\varepsilon = \frac{H}{L}.$$

Temperature is written as  $\theta = \tilde{\theta}(\theta_e - \theta_a) + \theta_a$ , volume fraction is already dimensionless. Hence density, consistency index, yield stress and heat conduction coefficient are expressed as  $\rho(\phi) = \rho_1 \tilde{\rho}(\tilde{\phi})$ ,  $K(\theta, \phi) = K_e K(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$  and  $\tau_y(\theta, \phi) = \tau_{y,e} \tilde{\tau}_y(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ ,  $k(\phi) = k_e k(\tilde{\phi})$  with  $\rho_e = \rho(1)$ ,  $K_e = K(1, 1)$ ,  $\tau_{y,e} = \tau_y(1, 1)$  and  $k_e = k(1)$ . Horizontal velocity scaling is taken from viscous gravity balance as in Huppert (1982) [30] and Bernabeu et al. (2013) [21] :

$$U = \left( \frac{\rho_e g H^2}{K_e L} \right)^{1/n} H$$

and the vertical velocity scaling is  $W = \varepsilon U$ . A characteristic viscosity is also given in Huppert (1982),  $\eta = K_e (U/H)^{n-1}$ . We also consider the time scale  $t = T \tilde{t}$  with  $T = \frac{L}{U}$  and the pressure scale  $p = P \tilde{p}$  with  $P = \rho_e g H$ . Using the variable change :

$$x = L \tilde{x}, \quad y = L \tilde{y}, \quad z = H \tilde{z}, \quad h = H \tilde{h}, \quad u_x = U \tilde{u}_x, \quad u_y = U \tilde{u}_y, \quad u_z = W \tilde{u}_z,$$

we rewrite the set of equations (4.3c)-(4.3u) in a dimensionless manner, omitting the tildes thereafter.

### Dimensionless constitutive equation

Following the work in Bernabeu et al. (2013) [21], we introduce the Bingham number  $Bi$  :

$$Bi = \frac{\tau_{y,e}H}{\eta U},$$

and we give the non-dimensional version of Herschel-Bulkley constitutive equation 4.3c :

$$\begin{cases} \tau_{ij} = \left( \frac{B(\theta,\phi)}{\varepsilon|\dot{\gamma}|} + \varepsilon|\dot{\gamma}|^{n-1} \right) \dot{\gamma}_{ij} \\ \varepsilon|\boldsymbol{\tau}| < Bi \end{cases} \quad (4.4a)$$

with  $B(\theta, \phi) = Bi\tau_y(\theta, \phi)$ .

### Dimensionless conservation equations

The dimensionless mass conservation equation (4.3d) becomes :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.4b)$$

Introducing the Reynolds  $Re$ , Froude  $Fr$  and Weber  $We$  numbers :

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\rho_e U L}{K_e}, \\ Fr &= \frac{U}{\sqrt{gL}}, \\ We &= \frac{\rho_e U^2 L}{\sigma_{cap}}, \end{aligned}$$

the momentum conservation equation along  $x_i$ -axis with  $i \in \{x, y\}$  becomes :

$$\begin{aligned} (\partial_t(\rho(\phi)u_i) + u_x\partial_x(\rho(\phi)u_i) + u_y\partial_y(\rho(\phi)u_i) + u_z\partial_z(\rho(\phi)u_i)) &= -\frac{1}{Fr^2}\partial_i p \\ &+ \frac{1}{Re} \left( \partial_x\tau_{ix} + \partial_y\tau_{iy} + \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_z\tau_{iz} \right) + \frac{1}{\varepsilon We} \left( -\nabla \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right) \partial_i\phi, \end{aligned} \quad (4.4c)$$

and the momentum equation along  $z$ -axis is :

$$\begin{aligned} (\partial_t(\rho(\phi)u_z) + u_x\partial_x(\rho(\phi)u_z) + u_y\partial_y(\rho(\phi)u_z) + u_z\partial_z(\rho(\phi)u_z)) &= \frac{1}{\varepsilon^2 Fr^2} \left( \frac{g}{|g|} \rho(\phi) - \partial_z p \right) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2 Re} (\partial_x\tau_{zx} + \partial_y\tau_{zy} + \partial_z\tau_{zz}) + \frac{1}{\varepsilon^3 We} \left( -\nabla \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right) \partial_z\phi \end{aligned} \quad (4.4d)$$

Using the Peclet number  $Pe$  :

$$Pe = \frac{LU\rho_e c_p}{k_e},$$

we have the dimensionless energy conservation equation :

$$(\partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta) = \frac{1}{\rho(\phi)Pe} (k(\phi)(\partial_{xx}\theta + \partial_{yy}\theta)) + \frac{1}{\varepsilon^2 \rho(\phi)Pe} (k(\phi)\partial_{zz}\theta). \quad (4.4e)$$

The volume fraction conservation equation (4.3a) and the transport equation (4.3h) are left unchanged by this process. Henceforth, we consider that the flow is gravitational, so  $Fr^2 = \mathcal{O}(\varepsilon)$  and moreover that  $Re = \mathcal{O}(1)$  and  $Bi = \mathcal{O}(1)$  in  $\varepsilon$  and thus neglect the inertial term of the momentum equation. We also make the hypothesis that  $We = \mathcal{O}(\varepsilon^{-4})$  so as to neglect the surface tension term. In order to keep part of the temperature diffusion, we also assume that  $Pe = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ .

### Dimensionless initial and boundary conditions

The initial and boundary conditions follow the same process of anisotropic dimensionless rewriting. The initial conditions and the Dirichlet conditions are left unchanged by this. After expanding the dot product with the outbound normal, the dimensionless free-surface condition on the Cauchy stress at  $z = h$  becomes :

$$-(\varepsilon^2 \tau_{xx} - p)\partial_x(h) - \varepsilon^2 \tau_{xy}\partial_y(h) + \tau_{xz} = 0 \quad (4.4f)$$

$$-\varepsilon^2 \tau_{xy}\partial_x(h) - (\varepsilon^2 \tau_{yy} - p)\partial_y(h) + \tau_{yz} = 0 \quad (4.4g)$$

$$-\varepsilon^2 \tau_{xz}\partial_x(h) - \varepsilon^2 \tau_{yz}\partial_y(h) + \varepsilon^2 \tau_{zz} + p = 0 \quad (4.4h)$$

The conductive heat transfer equation at the  $\Gamma_s$  boundary expresses as :

$$\varepsilon^2(\partial_x(h)\partial_x(\theta|_{Q_f}) + \partial_y(h)\partial_y(\theta|_{Q_f})) - \partial_z(\theta|_{Q_f}) = -\frac{k_s}{k}\varepsilon^2(\partial_x(h)\partial_x(\theta|_{Q_s}) + \partial_y(h)\partial_y(\theta|_{Q_s})) - \partial_z(\theta|_{Q_s}) \quad (4.4i)$$

and for  $\Gamma_e$ ,  $\theta = 1$ . The heat transfer condition at the free-surface  $\Gamma_f(t)$  yields :

$$-\varepsilon^2(\partial_x(h)\partial_x(\theta) + \partial_y(h)\partial_y(\theta)) + \partial_z(\theta) + Rp_\psi(\theta)\theta + Nu\theta = 0, \quad (4.4j)$$

where  $R = \frac{H\varepsilon\sigma_{SB}(\theta_e - \theta_a)^3}{k}$  a radiation number,  $Nu = \frac{\lambda H}{k}$  the Nusselt number,  $\psi = \frac{\theta_a}{\theta_e - \theta_a}$  a temperature ration and  $p_\psi = (\theta)^3 + 4\psi(\theta)^2 + 6\psi^2(\theta) + 4\psi^3$  a polynomial used to linearize the radiation term.

### Dimensionless heat transfer in the substrate

Considering purely vertical conduction in the substrate, we have in  $Q_s$  :

$$\partial_t \theta_s = Fo \partial_{zz} \theta_s \quad (4.4k)$$

with the Fourier number  $Fo = \frac{kT}{L^2}$  and the initial and boundary conditions :

$$\theta_s = \theta \text{ on } \Gamma_s \quad (4.4l)$$

$$\theta_s(z = -\infty) = 0 \quad (4.4m)$$

$$\theta_s(t = 0) = 0 \quad (4.4n)$$

According to Carslaw and Jaeger [54, p. 58-64], this problem has a time-discrete solution, for all  $(x, y) \in \Omega$  and  $z < 0$  :

$$\begin{aligned} \theta(t_n, x, y, z) = \sum_{k=1}^n \theta(t_k, x, y, 0) & \left[ \mathbb{I}_{]t_{k-1}, t_k[}(t_n) \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{z\sqrt{Fo}}{2\sqrt{(t_n - t_{k-1})}} \right) \right\} \right. \\ & \left. + \mathbb{I}_{]t_k, +\infty[}(t_n) \left\{ \operatorname{erf} \left( \frac{z\sqrt{Fo}}{2\sqrt{(t_n - t_k)}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{z\sqrt{Fo}}{2\sqrt{(t_n - t_{k-1})}} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.4o)$$

where  $\mathbb{I}_S(\xi)$  denotes the indicator function, which is one when its argument  $\xi$  belongs to the set  $S$  and zero otherwise.

### 4.3.3 Bidimensional reduction

We rewrite the bidimensional reduced non-isotherm single-phase model from Bernabeu et al. (2016) by using the height-averaged volume fraction dependent parameters  $\rho(\bar{\phi})$ ,  $K(\bar{\theta}, \bar{\phi})$ ,  $\tau_y(\bar{\theta}, \bar{\phi})$  and  $k(\bar{\phi})$ . The model reduces to :

(P) find  $h$ ,  $\bar{\theta}$  and  $\phi$  satisfying :

$$\partial_t h - \nabla_{2D}(\mu_n(K, B, h, \bar{\theta}, \bar{\phi}, |\nabla_{2D}h|)\nabla_{2D}h) = u_z(z=0) \text{ in } ]0; +\infty[ \times \Omega \quad (4.5a)$$

$$\mu_n = \begin{cases} \frac{n\rho(\bar{\phi})^{1/n}K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n}[(n+1)h\psi + nB(\bar{\theta}, \bar{\phi})][h\psi - B(\bar{\theta}, \bar{\phi})]^{(n+1)/n}}{(n+1)(2n+1)\psi^3} & \text{if } h\psi > B(\bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.5b)$$

$$h(t=0) = h_0 \text{ on } \Omega \quad (4.5c)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } ]0; +\infty[ \times \partial\Omega \quad (4.5d)$$

$$h(\partial_t \bar{\theta} + \bar{\mathbf{u}}_{2D} \cdot \nabla \bar{\theta}) - u_z(z=0)(1 - \bar{\theta}) - \frac{k(\bar{\phi})}{\rho(\bar{\phi})Pe} [\partial_z \phi] \bar{\theta} = 0 \text{ in } ]0; +\infty[ \times \Omega \quad (4.5e)$$

$$\bar{\theta}(t=0) = \bar{\theta}_0 \text{ sur } \Omega \quad (4.5f)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } ]0; +\infty[ \times \partial\Omega \quad (4.5g)$$

$$\begin{cases} \bar{\varphi} = 1 \\ \partial_z \varphi + Rp_\mu(\bar{\theta}\varphi) + Nu\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_f(t) \\ -\partial_z \varphi + \frac{k_s}{k} \sqrt{\frac{Pe_s}{\pi t}} \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_s \text{ et } \bar{\theta}\varphi = 1 \text{ sur } \Gamma_e \\ \bar{\varphi}\bar{\mathbf{u}}_{2D} = \bar{\mathbf{u}}_{2D} \end{cases} \quad (4.5h)$$

$$\partial_t \phi + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi + \nabla \cdot (\phi(1 - \phi)w_z) = 0 \text{ in } ]0; +\infty[ \times Q(t) \quad (4.5i)$$

$$\phi(t=0) = \phi_0 \text{ in } Q(t) \quad (4.5j)$$

$$\phi = 1 \text{ on } ]0; +\infty[ \times \Gamma_e \quad (4.5k)$$

$$\phi = 0 \text{ on } ]0; +\infty[ \times \Gamma_s \quad (4.5l)$$

$$\text{with } \mathbf{u}_{2D} = \begin{cases} \frac{n}{n+1} |\nabla_{2D}h|^{1/n} \rho(\bar{\phi})^{1/n} K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n} \frac{\nabla_{2D}h}{|\nabla_{2D}h|} [(h_c - z)^{(n+1)/n} - h_c^{(n+1)/n}] & \text{si } z \in [0; h_c[ \\ -\frac{n}{n+1} |\nabla_{2D}h|^{1/n} \rho(\bar{\phi})^{1/n} K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n} \frac{\nabla_{2D}h}{|\nabla_{2D}h|} h_c^{(n+1)/n} & \text{si } z \in [h_c; h], \end{cases}$$

and the plug height  $h_c(t, x, y) = \max\left(0, h - \frac{B(\bar{\theta}, \bar{\phi})}{\rho(\bar{\phi})|\nabla_{2D}h|}\right)$ . The subscript  $_{2D}$  denotes the vectors in the  $(0xy)$  planes, such that  $\mathbf{u}_{2D} = (u_x, u_y)$ .

It remains to reduce the equations on the volume fraction (4.5i)-(4.5l) as they are still defined in the tridimensional domain  $Q(t)$ . Integrating eq.(4.5i) and using the mass conservation equation (4.4b) and the transport equation (4.5a), we have :

$$h\partial\bar{\phi} + \nabla_{2D}(h\bar{\phi}\bar{\mathbf{u}}_{2D}) - \nabla_{2D}(h\bar{\mathbf{u}}_{2D})\bar{\phi} + u_z(z=0)(\bar{\phi} - \phi(z=0)) + [(1 - \phi)\phi w_z]_0^h = 0 \quad (4.5m)$$

We follow the process used by Bernabeu et al. (2016) [35] for the vertical distribution of  $\theta$  for the volume fraction by introducing a similar unknown function  $\zeta$

satisfying  $\bar{\zeta} = 1$  and  $\bar{\zeta}\bar{\mathbf{u}}_{2D} = \bar{u}_{2D}$  chosen so that  $\phi(t, x, y, z) = \zeta(t, x, y, z)\bar{\phi}(t, x, y)$ . With this notation, the boundary conditions become :

$$\zeta(z = 0)\bar{\phi} = 1 \text{ on } \Gamma_e \quad (4.5n)$$

$$\zeta(z = 0)\bar{\phi} = 0 \text{ on } \Gamma_s \quad (4.5o)$$

Assuming that due to high viscosity and density of the continuous phase, the gas will remain stuck towards the bottom of the spread and transported, thus we apply a first order by parts for its vertical distribution :

$$\zeta(t, x, y, z) = \begin{cases} az + b & \text{for } z \in [0; z_c[ \\ \frac{1}{\bar{\phi}} & \text{for } z \in [z_c; h]. \end{cases} \quad (4.5p)$$

Where  $z_c$  is the height below which there is a two phase mixture.

Finally, the multiphase bidimensional reduced problem is obtained by replacing in (P) eqs(4.5i)-(4.5l) by :

$$h(\partial\bar{\phi} + \bar{u}_{2D} \cdot \nabla_{2D}(\bar{\phi})) + u_z(0)\bar{\phi}(1 - \zeta(0)) + [(1 - \bar{\phi}\zeta)\bar{\phi}\zeta w_z]_0^h = 0 \text{ in } ]0; +\infty[ \times \Omega \quad (4.5q)$$

$$\bar{\phi}(t = 0) = \bar{\phi}_{init} \text{ on } \Omega \quad (4.5r)$$

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\mathbf{n}} = 0 \text{ on } ]0; +\infty[ \times \partial\Omega \quad (4.5s)$$

As shown in [35], ignoring the conditions on the vertical profiles  $\bar{\zeta}\bar{\mathbf{u}}_{2D} = \bar{u}_{2D}$  and  $\bar{\varphi}\bar{\mathbf{u}}_{2D} = \bar{u}_{2D}$  to simplify their expressions yields acceptable error, thus here we use respectively first order by parts and second order polynomials.

### 4.3.4 Numerical resolution

Firstly, the problem (P) is discretized versus time using a, implicit second-order variable step finite difference scheme (BFD2) as in [21, 35, 49]. At each time step, an under-relaxed fixed point algorithm is used to solve the nonlinear subproblems in  $h$ ,  $\bar{\theta}$  and  $\bar{\phi}$ . Finally, these equations are spatially discretized using a finite element method based on the C++ library Rheolef [48] on a rectangular geometry (see Fig. 3.3). We use the adaptive meshing option this library provides based on the BAMG code [73] by refining the mesh around the front of the flow, where our variables gradients are the greatest.

For the inlet velocity  $u_z(z = 0)$ , we use a spatial distribution so that it annuls around the line  $x = 0$ , where the vertical boundary conditions on  $\varphi$  and  $\zeta$  change, in order to reduce numerical instabilities. For the region  $x > 0$ , corresponding to where degassing takes place, we consider that gas is provided from the substrate

due to energy transfer from the melt, thus  $u_z(t, x > 0, y, z = 0) > 0$  only if the melt is present ( $h(t, x, y) > 0$ ).

To prevent numerical instabilities around  $x = 0$ , the boundary conditions (4.5n) and (4.5o) have been modified around the line  $x = 0$  by instead using the following continuous boundary condition :

$$\phi(z = 0) = f(x)|_{x_c} = \frac{1}{2}\text{erfc}(x/x_c). \quad (4.6a)$$

In the region  $-x_c < x < x_c$ , the first order polynomial by parts vertical distribution  $\zeta(t, x, y, z)$  becomes :

$$\zeta = \begin{cases} az + \frac{f_{x_c}(x)}{\phi} & \text{for } z \in [0; z_c[ \\ b = \frac{1}{\phi} & \text{for } z \in [z_c; h] \end{cases} \quad (4.6b)$$

using the same conditions on  $\zeta$  as in the system(4.5p), we obtain :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{z_c\phi}(1 - f_{x_c}(x)) \\ b = \frac{1}{\phi} \end{cases} \quad (4.6c)$$

By replacing  $w_z$  and  $\zeta$  by their values in eq.(4.5q), we have the following equation that is implemented in our simulation :

$$h(\partial\bar{\phi} + \bar{\zeta}\bar{u}_{2D} \cdot \nabla_{2D}(\bar{\phi})) + u_z(0)\bar{\phi}(1 - \frac{f_{x_c}(x)}{\phi}) - \frac{c_0}{c_f}(1 - f_{x_c}(x))^2\bar{\phi}f_{x_c}^2(x) = 0 \quad (4.6d)$$

Those two numerical approximations are depicted on fig.4.6.

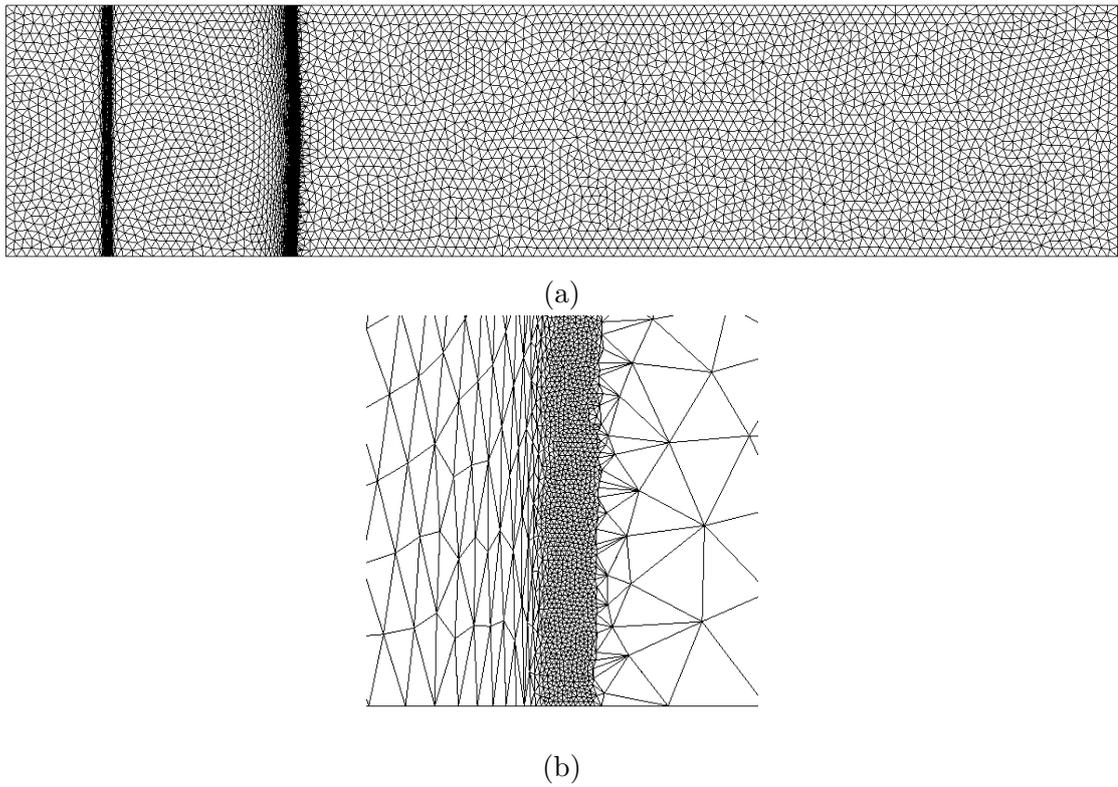


FIGURE 4.5 – (a) Auto-generated mesh and (b) Zoom of mesh (a) at the front of the spread.

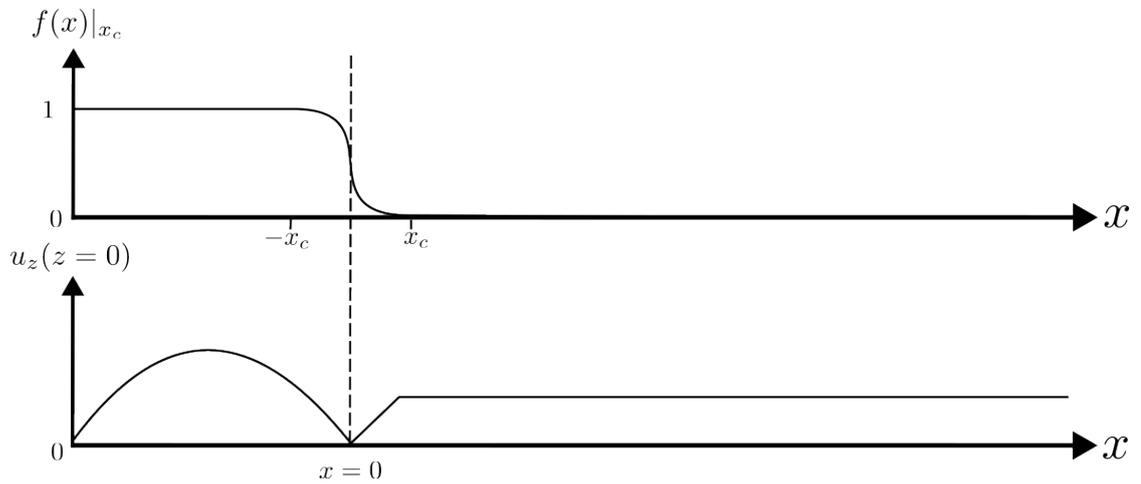


FIGURE 4.6 – Spatial distribution for the inlet condition  $u_z(z=0)$  and the boundary smoothing function  $f(x)_{x_c}$ .

## 4.4 Application to corium

We apply this model to a case based on the VEU7 corium spreading experiment [36] with a simplified geometry, corium being the material produced by melting nuclear power plants core and their surroundings in severe accidents. We use the geometry depicted on fig.4.5, and material properties issued from previous studies on corium spreading, such as [64, 11, 36, 78]. The volumetric melt flow rate of the melt is  $8.4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  [36] during 5 s, with  $t = 0 \text{ s}$  corresponding to the start of inlet feeding. As argued in [49], this experiment could be modeled using the previous equations for the single phase case, here we aim to observe the influence of degassing on spreading, as it was observed on the experiment as described in [9]. Thereafter, tables 4.2 and 4.3 present the main flow and material properties of the VEU7 spreading test. Dimensionless parameters using these are computed in tab. 4.4, characterizing the flow regimes, enabling the use of the preceding model.

TABLE 4.2 – Flow properties of the VEU7 corium spreading test [9, 64, 11, 36, 14, 65, 66, 67].

Quantity	Symbol	Corium
Characteristic height $m$	$H$	$6.5 \cdot 10^{-2}$
Characteristic length $m$	$L$	$4.0 \cdot 10^{-1}$
Aspect ratio	$\varepsilon = \frac{H}{L}$	0.15
Characteristic velocity $m \cdot s^{-1}$	$U$	1.53
Inlet fluid temperature $K$	$\theta_e$	2450
Initial substrate and air temperature $K$	$\theta_a$	303

TABLE 4.3 – Material properties of the VEU7 corium spreading test [9, 64, 11, 36, 14, 65, 66, 67].

Quantity	Symbol	Corium
Spread density ( $kg \cdot m^{-3}$ )	$\rho_1$	7500
Air density ( $kg \cdot m^{-3}$ )	$\rho_2$	1.2
Dynamic viscosity at temperature $\theta_e$ ( $Pa \cdot s$ )	$K_e$	$2.24 \cdot 10^1$
Yield stress at temperature $\theta_e$ ( $Pa$ )	$\tau_{y,e}$	$10^2$
Emissivity (–)	$\epsilon$	0.8
Thermal conductivity ( $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ )	$k$	3
Specific heat ( $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ )	$c_p$	995.6
Convective heat transfer coefficient with air ( $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ )	$\lambda$	300
Surface tension ( $N \cdot m^{-1}$ )	$\sigma_{cap}$	0.58

TABLE 4.4 – Dimensionless parameters for experiment VEU7.

	VEU7
Froude = $\frac{U}{\sqrt{gL}}$	$7.06 \cdot 10^{-1}$
Reynolds = $\frac{\rho_1 UL}{K_e}$	$1.40 \cdot 10^2$
Weber = $\frac{\rho_1 U^2 L}{\sigma_{cap}}$	$9.79 \cdot 10^3$
Péclet = $\frac{LU\rho_1 c_p}{k_e}$	$1.69 \cdot 10^5$

## 4.5 Results and Discussion

### 4.5.1 Numerical convergence analysis

We first perform a sensitivity analysis on numerical parameters : the time step  $dt$ , the minimal mesh size  $hmin$ , to ensure proper temporal and spatial convergence and the aforementioned smoothing parameter  $x_c$  around  $x = 0$  for  $\phi$  boundary condition. Figure 4.7 shows that computation is sufficiently resolved in terms of time step, we thus use the value  $dt = 5 \cdot 10^{-2} s$  to reduce computation time.

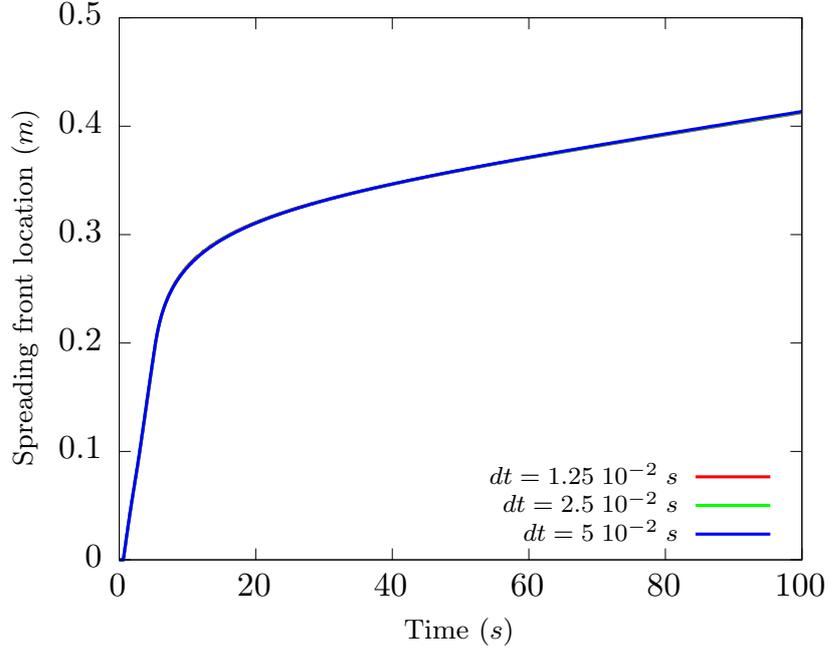


FIGURE 4.7 – Simulated front progress for  $Arr = 7 \cdot 10^{-3}$ ,  $\tau_y = 200 Pa$ ,  $n = 0.66$ ,  $hmin = 5 \cdot 10^{-4} m$ , a degassing velocity of  $u_z(z = 0) = 10^{-4} m \cdot s^{-1}$  and different values of time step.

The parameter  $hmin$  is given in the adaptive meshing routine : it gives a lower limit to mesh size. We observe on Fig. 4.8 that the convergence using this parameter is non linear and that a value of  $hmin \leq 5 \cdot 10^{-4} m$  is a good compromise in terms of convergence and computation time.

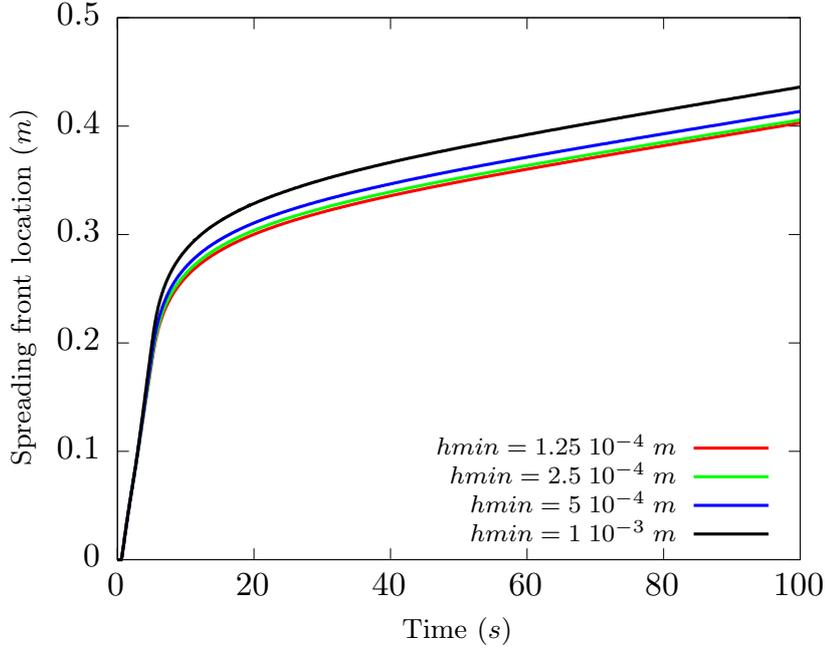


FIGURE 4.8 – Simulated front progress for  $Arr = 7.10^{-3}$ ,  $\tau_y = 200 Pa$ ,  $n = 0.66$ ,  $dt = 5.10^{-2} m$ , a degassing velocity of  $u_z(z = 0) = 10^{-4} m.s^{-1}$  and different values of minimal mesh size.

We then conduct a sensitivity analysis on the numerical parameter  $x_c$  from eq.(4.6a), corresponding to the size of the transition region between the boundary conditions on  $\phi(z = 0)$ . No difference is found for  $x_c < 1.10^{-3} m$  as seen on Fig.4.9. We will thus use these values for further computations.

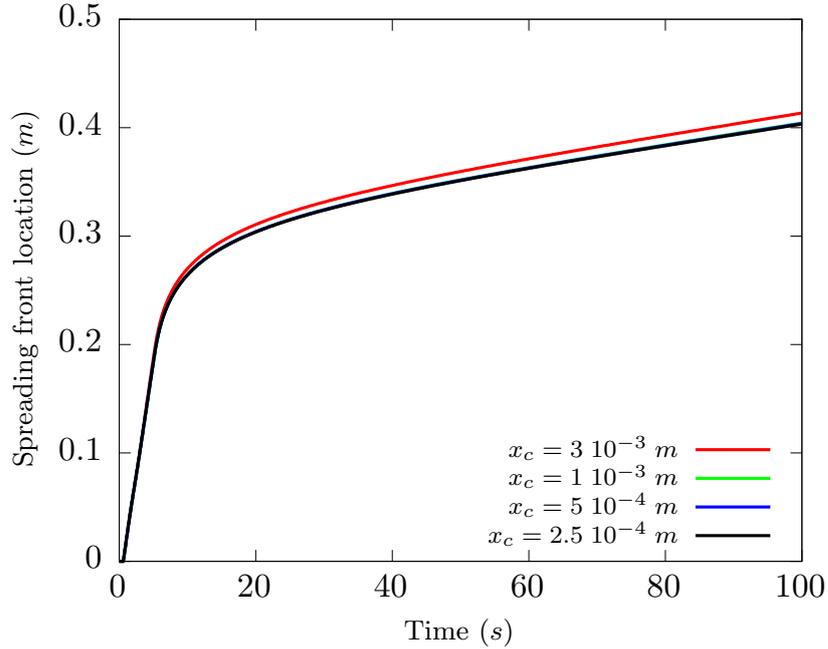


FIGURE 4.9 – Simulated front progress for  $Arr = 7 \cdot 10^{-3}$ ,  $\tau_y = 200 \text{ Pa}$ ,  $n = 0.66$ , a degassing velocity of  $u_z(z = 0) = 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$  and different values of lower volume fraction boundary condition transition region size  $x_c$ .

## 4.5.2 Sensitivity analysis

Fig. 4.10 compares the single phase case with the multiphase one, showing a greater velocity before reaching the viscoplastic regime around  $t = 10 \text{ s}$  characterized by the curve inflexion. Since the gas distribution described by  $\zeta$  confines the gas to the lower parts of the medium, we expect the dynamic to be similar to that of a fluidized bed, though the equations solved are height-averaged. A non averaged approach would probably see greater differences between the two cases.

Sensitivity analysis on the degassing velocity  $u_z(z = 0)$  results are shown on Fig. 4.11 During the melt feeding period ( $t < 5 \text{ s}$ ), gas addition seems to have little influence, due to higher momentum from the melt than the gas and the low proportion of the latter as it has yet to reach the degassing surface. To quantify the nature of the influence of degassing velocity on final spreading length, we performed a linear regression shown on fig.4.12. We found a linear relation between them, with a coefficient of determination  $R^2 > 0.999$ , for the range  $10^{-6} \text{ m.s}^{-1} \leq u_z(z = 0)|_{h>0} \leq 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$ . For higher degassing velocities, the added gas stress surpasses the yield stress, enabling further spread and an increase in degassing surface, corresponding to a non-linear behavior.

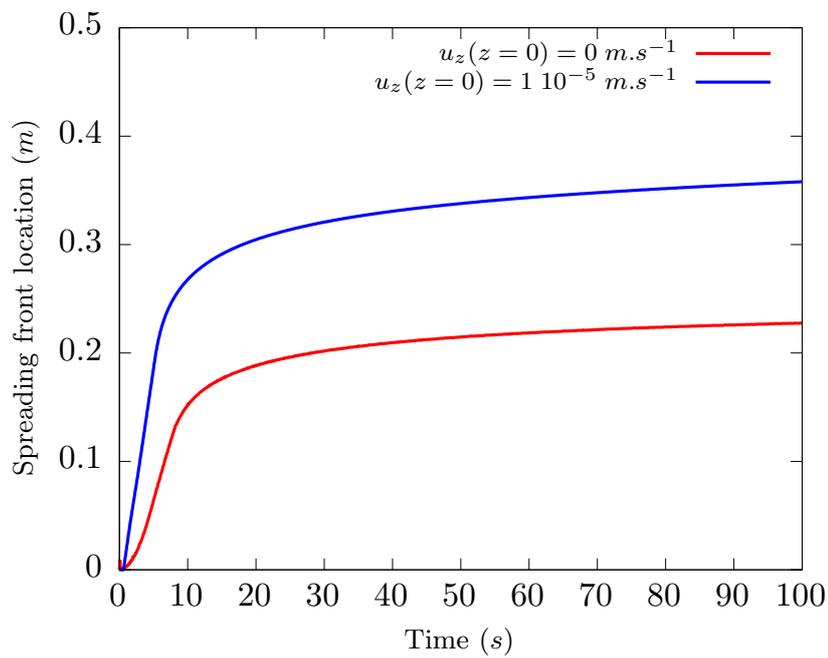


FIGURE 4.10 – Simulated front progress for  $Arr = 7 \cdot 10^{-3}$ ,  $\tau_y = 200 \text{ Pa}$ ,  $n = 0.66$ ,  $u_z(z=0) = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$  and no degassing.

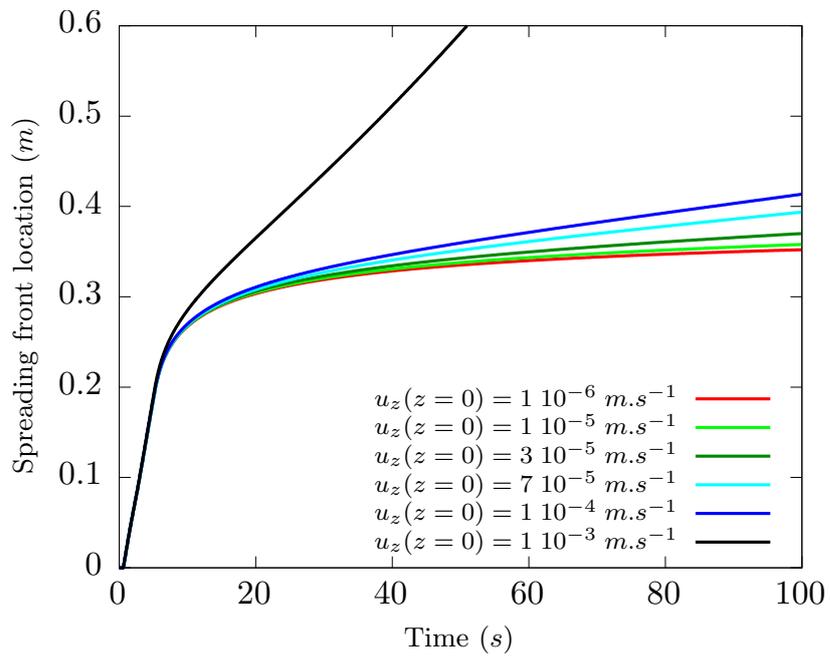


FIGURE 4.11 – Simulated front progress for  $Arr = 7.10^{-3}$ ,  $\tau_y = 200 \text{ Pa}$ ,  $n = 0.66$ , and different degassing velocities  $u_z(z = 0)$ .

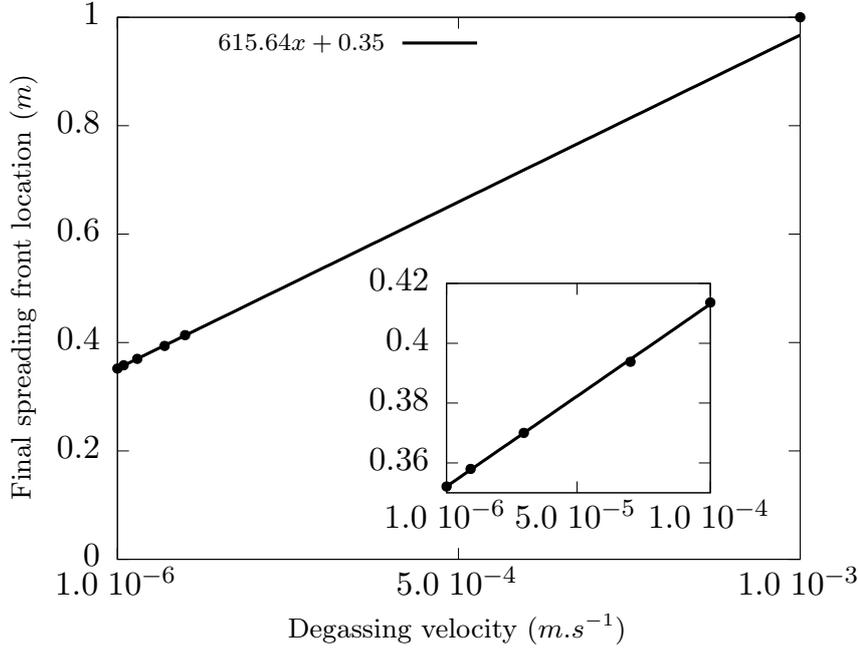


FIGURE 4.12 – Front position at  $t = 100$  s for  $Arr = 7.10^{-3}$ ,  $\tau_y = 200$  Pa,  $n = 0.66$ , and different degassing velocities  $u_z(z = 0)$ . The continuous line is a linear regression of the points for  $1.10^{-6} \leq u_z(z = 0) \leq 1.10^{-4}$  with  $R^2 = 0.9996$ .

Gas volume fraction  $(1 - \bar{\phi})$  behaves almost linearly with respect to time for degassing velocities  $u_z(z = 0) < 3.10^{-5} m.s^{-1}$  after melt inlet feeding as shown on fig.4.13. In this condition, the added stress from the gas is not enough to surpass yield stress. Consequently, the degassing surface remains constant when the flow is stopped, explaining the linear progression of gas volume fraction. For higher degassing velocities such as  $u_z(z = 0) = 1.10^{-3} m.s^{-1}$ , this behavior is non linear as added stress from the gas is higher than the yield stress, increasing the degassing surface by preventing stoppage. Zoom on Fig.4.13 indicates clearly the influence from the boundary condition smoothing function eq.(4.6a) : gas volume fraction rises both due to the spread progressing on the degassing substrate, and due to a source of a mix of melt and gas in the region  $-x_c < x < x_c$ .

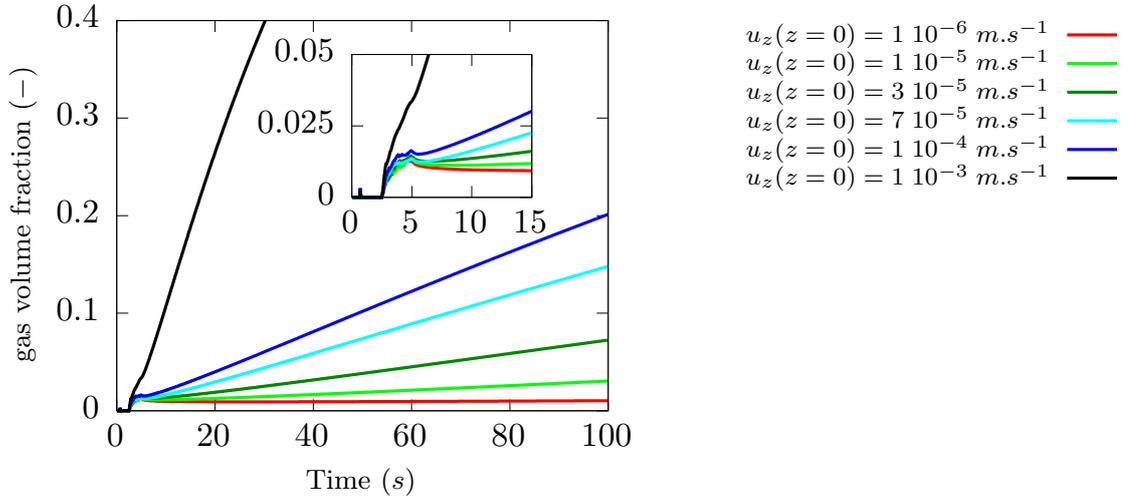
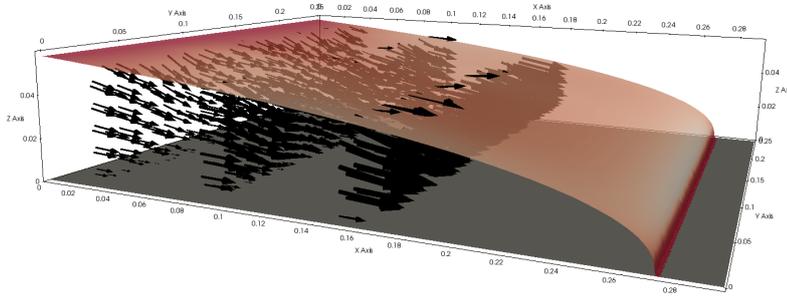


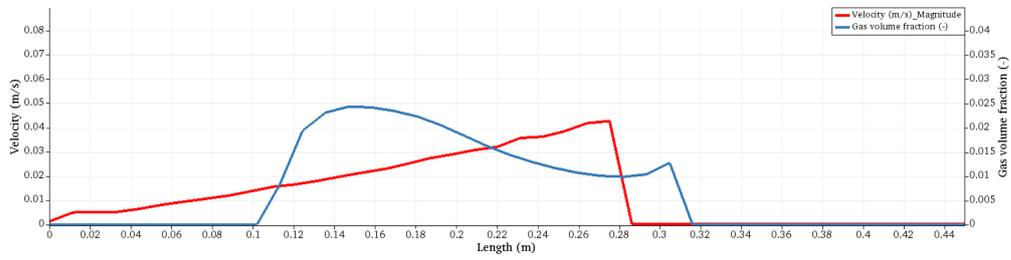
FIGURE 4.13 – Simulated gas volume fraction for  $Arr = 7.10^{-3}$ ,  $\tau_y = 200 Pa$ ,  $n = 0.66$ , and different degassing velocities  $u_z(z = 0)$  and zoom at the beginning of the spread.

### 4.5.3 3D Visualization of velocity and volume fraction

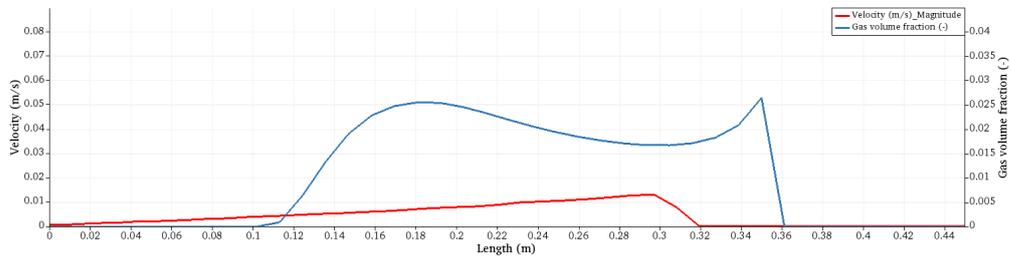
Using the expression of  $\mathbf{u}_{2D}$  and the mass conservation equation, we can depict the tridimensional velocity field, as in Fig.4.14. Fig. 4.14(a) shows this 3D representation without the inlet velocity, with the upper surface showing  $\bar{\phi}$ . From these two results, profiles at different time steps are given on Figs.4.14(b-d) : the maximum velocity corresponds at every time step with a local minimum in gas fraction, indicating that it has been locally transported to the front of the spread, as seen by the subsequent local maximum. This explains in part the observation on Fig.4.15 that at the end of the simulation, there is more gas fraction towards the front. We can also remark on this figure that at the leading edge of the spread, its composition is purely of melt, which is a result of the  $0^{th}$ -order approximation made in the model reduction.



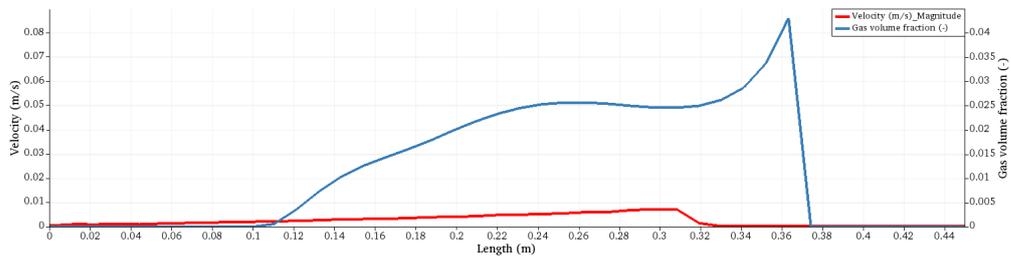
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 4.14 – (a)3D reconstruction of the velocity field. The upper surface represents  $\bar{\phi}$  and (b-d)  $1 - \bar{\phi}$  the height-averaged gas volume fraction and  $|\mathbf{u}|$  along the x-axis for (b)  $t = 5.5 s$  (c)  $t = 7.5 s$  and (d)  $t = 9.65 s$  for  $u_z(z = 0) = 10^{-4} m.s^{-1}$ . The velocity norm is taken at  $y = 0.125 m$  and  $z = 0.03 m$ .

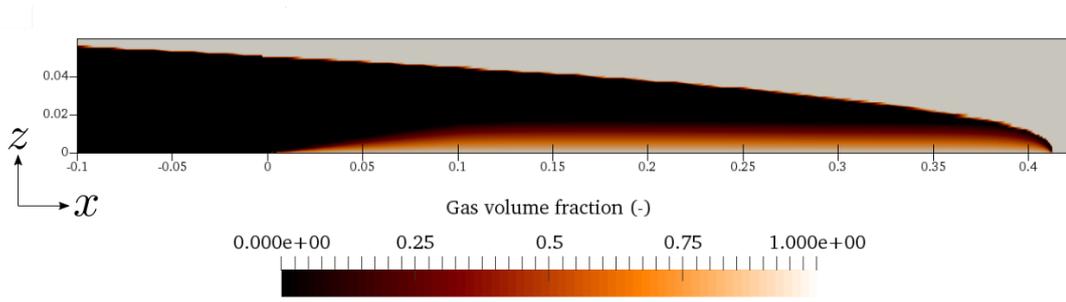


FIGURE 4.15 – Gas volume fraction distribution for  $y = 0.125 \text{ m}$  at  $t = 100 \text{ s}$  for  $Arr = 7.10^{-3}$ ,  $\tau_y = 200 \text{ Pa}$ ,  $n = 0.66$ , and  $u_z(z = 0) = 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$ .

## 4.6 Conclusions

A new asymptotic model for free surface multiphase viscoplastic anisotherm flows has been presented, based on the single phase anisotherm model developed by Bernabeu et al. [35]. A sensitivity analysis has been conducted on the numerical parameters and the amount of gas injected in the mixture that is spreading over a surface. A tridimensional representation of velocity and species volume fraction has been computed respectively from an explicit solution and an arbitrary vertical distribution with the result found to be coherent with the theory. Future work include the use of more representative vertical boundary conditions for the volume fraction, notably to enable gas release at the free-surface and to provide better quantitative degassing rate through a phase change model of the substrate and a germination model for the gas at the interface between the mixture and the substrate, which would change the vertical volume fraction distribution. The model also could be improved by removing the hypothesis that there is thermal equilibrium between the phases. Further developments on the modelling of free surface flows for nuclear safety would be to include chemical description to the model to take into account molten core-concrete interaction (such as substrate ablation), and inertial regime turbulence description to describe large scale accidents in nuclear power plants.

## 4.7 Réduction asymptotique dans le cas multiphasique

### 4.7.1 Réduction à l'ordre 0 en $\varepsilon$

Dans cette section, nous détaillons le procédé de réduction à l'ordre zéro en  $\varepsilon$ , ce qui implique que  $\varepsilon \ll 1$  et que l'on peut développer n'importe quelle inconnue  $\xi$  en  $\xi = \xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ . Comme nous négligeons les termes d'ordres 1 et plus en  $\varepsilon$ , nous n'utilisons pas l'indice 0 par la suite par souci de simplicité des notations. Pour la même raison et pour souligner le caractère anisotrope de ce problème, nous utilisons les notations suivantes :  $\nabla_{2D} = (\partial_x, \partial_y)$ ,  $\mathbf{u}_{2D}$  la vitesse et  $\boldsymbol{\tau}_{2D} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$  le tenseur déviatorique dans le plan  $Oxy$ . D'après ces changements, nous pouvons réécrire l'équation constitutive sachant qu'à l'ordre 0,  $E = |\partial_z \mathbf{u}_{2D}|$  et  $T = |\tau_{2D}|$  :

$$\tau_{\alpha\beta} = \left[ \frac{B(\theta, \phi)}{E} + K(\phi, \theta)E^{n-1} \right] (\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta), (\alpha, \beta) \in \{x, y\}^2 \quad (4.7a)$$

$$\tau_{\alpha z} = \left[ \frac{B(\theta, \phi)}{E} + K(\phi, \theta)E^{n-1} \right] \partial_z u_\alpha, \alpha \in \{x, y\} \quad (4.7b)$$

$$\tau_{zz} = 2 \left[ \frac{B(\theta, \phi)}{E} + K(\phi, \theta)E^{n-1} \right] \partial_z u_z \quad (4.7c)$$

quand  $\dot{\gamma} \neq 0$  et

$$T \leq B(\theta, \phi) \text{ sinon,} \quad (4.7d)$$

avec  $B(\theta, \phi) = Bi\tau_y(\theta, \phi)$ . Nous rappelons l'équation de conservation de la masse ici :

$$\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z = 0, \quad (4.7e)$$

et celle de conservation de la quantité de mouvement selon les axes  $x, y$  et  $z$  donne :

$$-\partial_x p + \partial_z \tau_{xz} = 0 \quad (4.7f)$$

$$-\partial_y p + \partial_z \tau_{yz} = 0 \quad (4.7g)$$

$$-\rho(\phi) - \partial_z p = 0 \quad (4.7h)$$

Comme précédemment pour la conservation de la masse, l'équation de conservation des espèces n'est pas modifiée par ce procédé :

$$\partial_z \phi + u_x \partial_x \phi + u_y \partial_y \phi + u_z \partial_z \phi + \partial_z (\phi(1 - \phi)w_z) = 0 \quad (4.7i)$$

En utilisant l'hypothèse que  $Pe = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$  afin de conserver une partie du terme diffusif, l'équation de conservation de l'énergie devient :

$$c_p (\partial_z \rho(\phi)\theta + u_x \partial_x \rho(\phi)\theta + u_y \partial_y \rho(\phi)\theta + u_z \partial_z \rho(\phi)\theta) = \frac{1}{Pe} \partial_z (k(\phi) \partial_z \theta) \quad (4.7j)$$

L'équation de transport de la surface libre (4.3h) a aussi une expression inchangée à l'ordre 0 :

$$\partial_t h + u_x \partial_x h + u_y \partial_y h - u_z = 0 \quad (4.7k)$$

Enfin, nous donnons les conditions initiales et aux limites à l'ordre 0 en  $\varepsilon$ . Les conditions initiales eqs. (4.3i)-(4.3l) ne sont pas modifiées par cette réduction, tout comme les conditions limites de Dirichlet. La condition à la surface libre  $z = h$  sur le tenseur des contraintes de Cauchy devient :

$$\tau_{xz}(z = h) = 0, \quad (4.7l)$$

$$\tau_{yz}(z = h) = 0, \quad (4.7m)$$

$$p(z = h) = 0. \quad (4.7n)$$

On néglige le terme en  $\varepsilon^2$  de l'équation du transfert thermique à la surface libre on obtient :

$$\partial_z(\theta) + Rp_\psi(\theta)\theta + Nu\theta = 0, \quad (4.7o)$$

De la même manière, pour le transfert thermique au substrat :

$$\partial_z(\theta) = -\frac{k_s}{k} \partial_z(\theta) \quad (4.7p)$$

Les autres conditions aux limites sont inchangées car elles ne dépendent pas du rapport d'aspect  $\varepsilon$ .

## 4.7.2 Intégration dans la hauteur

### Réduction de l'équation de transport de la coulée

Nous souhaitons ici détailler la réduction proposée dans l'article en section §4.3.3 afin de passer d'un problème tridimensionnel à l'ordre 0 en  $\varepsilon$  à un problème bidimensionnel en le moyennant dans la hauteur. Nous définissons ainsi la moyenne dans la hauteur  $\bar{\aleph}$  d'une quantité  $\aleph$  par :

$$\bar{\aleph}(t, x, y) = \begin{cases} \frac{1}{h(t, x, y)} \int_0^{h(t, x, y)} \aleph(t, x, y, z) dz & \text{quand } h(t, x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous négligeons les effets des variations verticales de la température et de la fraction volumique sur la masse volumique, l'indice de consistance, la contrainte seuil et le coefficient de conduction thermique :  $\rho(\phi) = \rho(\bar{\phi})$ ,  $K(\theta, \phi) = K(\bar{\theta}, \bar{\phi})$ ,  $\tau_y(\theta, \phi) = \tau_y(\bar{\theta}, \bar{\phi})$  et  $k(\phi) = k(\bar{\phi})$ . Avec cette hypothèse, nous souhaitons d'abord réduire l'équation constitutive (4.7a)-(4.7c), celle de conservation de la quantité de mouvement (4.7f)-(4.7h), celle de transport de la surface libre (4.7k), ainsi que de conservation de la masse (4.7e) avec leurs conditions aux limites en équations bidimensionnelles ne dépendant que de la hauteur  $h$ , de la température moyennée dans la hauteur  $\bar{\theta}$  et de la fraction volumique moyennée dans la hauteur  $\bar{\phi}$ . Nous avons donc besoin d'exprimer les quantités  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $p$  et  $\mathbf{u}$  avec ces variables.

Premièrement, à l'aide de l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon l'axe  $z$  (4.7h) et de la condition à la surface libre (4.7n), on détermine une expression de la pression :

$$\begin{aligned} -\partial_z p &= \rho(\bar{\phi}) \\ \Leftrightarrow -p(z=h) + p(z) &= \int_z^h \rho(\bar{\phi}) dz \\ \Leftrightarrow p(z) &= \rho(\bar{\phi})(h - z) \end{aligned}$$

Pareillement, nous utilisons les eqs.(4.7f)-(4.7g) et les conditions aux limites (4.7l)-(4.7m) pour déterminer  $\tau_{2D}$  :

$$\begin{aligned} \partial_z \tau_{\alpha z} &= \partial_\alpha p \\ \Leftrightarrow \partial_z \tau_{\alpha z} &= \rho(\bar{\phi}) \partial_\alpha h \\ \Leftrightarrow \tau_{\alpha z} &= -(h - z) \rho(\bar{\phi}) \partial_\alpha h \end{aligned}$$

Nous souhaitons maintenant exprimer  $u_{2D}$ .  $\tau_{\alpha z}$  étant une fonction linéaire de  $z$  et valant 0 en  $z = h$  d'après (4.7l)-(4.7m), il existe une hauteur intermédiaire  $h_c$  d'après le théorème des valeurs intermédiaires telle que :

$$|\tau_{2D}(z = h_c)| = B(\bar{\theta}, \bar{\phi}) = (h - h_c) |\nabla_{2D} h| \rho(\bar{\phi}) \quad (4.8a)$$

$$\Rightarrow h_c = \max \left( 0, h - \frac{B(\bar{\theta}, \bar{\phi})}{\rho(\bar{\phi}) |\nabla_{2D} h|} \right) \quad (4.8b)$$

Ainsi la condition de Von Mises de l'équation constitutive (4.7d) peut être reformulée avec cette nouvelle quantité :

$$|\tau_{2D}| > B(\bar{\theta}, \bar{\phi}) \Leftrightarrow (h - z)\rho(\bar{\phi})|\nabla_{2D}h| > B(\bar{\theta}, \bar{\phi}) \Leftrightarrow z \in [0; h_c[ \quad (4.8c)$$

Avec cette dernière équation, nous pouvons interpréter le sens physique de cette hauteur  $h_c$  comme étant la hauteur de "plug" au-dessus de laquelle la contrainte est plus faible que la contrainte seuil, où donc le milieu n'est pas déformé et à un mouvement de corps solide. En prenant la norme euclidienne de l'équation constitutive d'Herschel-Bulkley, nous avons :

$$|\tau_{2D}| = B(\bar{\theta}, \bar{\phi}) + K(\bar{\theta}, \bar{\phi})|\partial_z u_{2D}|^n \quad (4.8d)$$

Nous pouvons en déterminer une expression de la norme de la dérivée de la vitesse dans le plan  $0xy$  :

$$|\partial_z u_{2D}| = \begin{cases} (h_c - z)^{1/n} |\nabla_{2D}h|^{1/n} \rho(\bar{\phi})^{1/n} K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n} & \text{si } z \in [0; h_c[ \\ 0 & \text{si } z \in [h_c; h] \end{cases} \quad (4.8e)$$

Afin d'avoir une expression d'un vecteur, nous multiplions sa norme par son sens. Nous considérons que  $sens(\partial_z u_{2D}) = sens(\tau_{2D}) = -sens(\nabla_{2D}h) = -\frac{\nabla_{2D}h}{|\nabla_{2D}h|}$ . Donc :

$$\partial_z u_{2D} = \begin{cases} -(h_c - z)^{1/n} |\nabla_{2D}h|^{1/n} \rho(\bar{\phi})^{1/n} K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n} \frac{\nabla_{2D}h}{|\nabla_{2D}h|} & \text{si } z \in [0; h_c[ \\ 0 & \text{si } z \in [h_c; h] \end{cases} \quad (4.8f)$$

Nous intégrons cette expression selon  $z$  et obtenons :

$$u_{2D} = \begin{cases} \frac{n}{n+1} |\nabla_{2D}h|^{1/n} \rho(\bar{\phi})^{1/n} K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n} \frac{\nabla_{2D}h}{|\nabla_{2D}h|} \left[ (h_c - z)^{(n+1)/n} + c_1 \right] & \text{si } z \in [0; h_c[ \\ c_2 & \text{si } z \in [h_c; h] \end{cases} \quad (4.8g)$$

Nous déterminons les constantes d'intégration en utilisant la condition limite inférieure  $u_{2D}(z = 0) = 0$  et la condition de saut à la hauteur de plug  $h_c$ ,  $[u_{2D}]_{z=h_c} = 0$  :

$$u_{2D} = \begin{cases} \frac{n}{n+1} |\nabla_{2D}h|^{1/n} \rho(\bar{\phi})^{1/n} K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n} \frac{\nabla_{2D}h}{|\nabla_{2D}h|} \left[ (h_c - z)^{(n+1)/n} - h_c^{(n+1)/n} \right] & \text{si } z \in [0; h_c[ \\ -\frac{n}{n+1} |\nabla_{2D}h|^{1/n} \rho(\bar{\phi})^{1/n} K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n} \frac{\nabla_{2D}h}{|\nabla_{2D}h|} h_c^{(n+1)/n} & \text{si } z \in [h_c; h] \end{cases} \quad (4.8h)$$

Enfin, nous déterminons  $u_z$  avec l'équation de conservation de la masse (4.7e) :

$$\int_0^z \partial_z u_z dz = - \int_0^z \partial_x u_x dz - \int_0^z \partial_y u_y dz \quad (4.8i)$$

$$u_z = - \int_0^z \partial_x u_x + \partial_y u_y dz + u_z(z=0) \quad (4.8j)$$

Nous avons donc une expression de  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $p$  et  $\mathbf{u}$  en fonction de  $h$ ,  $\bar{\theta}$  et  $\bar{\phi}$ . Nous avons donc besoin d'équations bidimensionnelles d'évolution de ces inconnues, en commençant par  $h$ . Nous utilisons l'équation de transport de la surface libre :

$$\partial_t h + u_x \partial_x h + u_y \partial_y h - u_z = 0 \quad (4.8k)$$

Où nous remplaçons  $u_z$  avec l'équation (4.8j), et nous sortons les dérivées des intégrales en utilisant la règle des intégrales de Leibniz (avec pour condition limite  $u_\alpha(z=0) = 0$ ) :

$$\int_0^h \partial_\alpha u_\alpha dz = \partial_\alpha \left( \int_0^h u_\alpha dz \right) + 0 - u_\alpha(z=h) \partial_\alpha h \quad (4.8l)$$

L'équation (4.8k) devient :

$$\begin{aligned} \partial_t h + u_x \partial_x h + u_y \partial_y h + \int_0^z \partial_x u_x + \partial_y u_y dz &= u_z(z=0) \\ \Leftrightarrow \partial_t h \partial_x \left( \int_0^h u_x dz \right) + \partial_y \left( \int_0^h u_y dz \right) &= u_z(z=0) \end{aligned}$$

que nous pouvons écrire :

$$\partial_t h + \nabla_{2D}(h \bar{u}_{2D}) = u_z(z=0) \quad (4.8m)$$

nous avons donc besoin d'une expression de  $\bar{u}_{2D}$  que l'on obtient en intégrant (4.1k) :

$$\bar{u}_{2D} = \begin{cases} - \frac{n\rho(\bar{\phi})^{1/n} K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n} [(n+1)h|\nabla_{2D}h| + nB(\bar{\theta}, \bar{\phi})] [h|\nabla_{2D}h| - B(\bar{\theta}, \bar{\phi})]^{(n+1)/n}}{(n+1)(2n+1)h|\nabla_{2D}h|^3} \nabla_{2D}h & \text{si } h|\nabla_{2D}h| > B(\bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.8n)$$

Nous pouvons reformuler l'équation d'advection (4.8m) en une équation de diffusion, avec le coefficient de diffusion  $\mu_n(K, B, h, \bar{\theta}, \bar{\phi}, \psi)$  suivant :

$$\partial_t h - \nabla_{2D}(\mu_n(K, B, h, \bar{\theta}, \bar{\phi}, |\nabla_{2D}h|) \nabla_{2D}h) = u_z(z=0) \quad (4.8o)$$

avec  $\mu_n$  défini pour tout  $n > 0$ ,  $h, \psi \in \mathbb{R}^+$ ,  $\bar{\theta}, \bar{\phi} \in [0, 1]$  et toutes fonctions  $K(\bar{\theta}, \bar{\phi}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  et  $B(\bar{\theta}, \bar{\phi}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  de la façon suivante :

$$\mu_n = \begin{cases} \frac{n\rho(\bar{\phi})^{1/n} K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n} [(n+1)h\psi + nB(\bar{\theta}, \bar{\phi})][h\psi - B(\bar{\theta}, \bar{\phi})]^{(n+1)/n}}{(n+1)(2n+1)\psi^3} & \text{si } h\psi > B(\bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.8p)$$

On complète l'équation (4.8o) avec les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$h(t = 0) = h_{init} \text{ dans } \Omega \quad (4.8q)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } ]0; +\infty[ \times \partial\Omega \quad (4.8r)$$

Avec  $\mathbf{n}$  la normale unitaire sortante à  $\Omega$ .

### Réduction de l'équation de transport de la fraction volumique

Nous avons des expressions de  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $p$ ,  $\mathbf{u}$  et une équation et des conditions sur  $h$ , il est nécessaire de déterminer des équations d'évolution des deux autres variables  $\bar{\theta}$  et  $\bar{\phi}$ . Nous commençons par remplacer  $w_z$  dans l'eq.(4.7i) par son expression eq.(4.3b) :

$$\partial_t \phi + u_x \partial_x \phi + u_y \partial_y \phi + u_z \partial_z \phi + \partial_z (\phi^2 (1 - \phi)^2 w_s) = 0 \quad (4.9a)$$

Nous intégrons cette dernière équation, sortons la dérivée temporelle de son intégrale et intégrons par parties les termes convectifs :

$$\begin{aligned} \partial_t \int_0^h \phi dz - \phi(t, x, y, h) \partial_t h + \int_0^h \partial_x (u_x \phi) dz - \int_0^h (\partial_x u_x) \phi dz + \int_0^h \partial_y (u_y \phi) dz \\ - \int_0^h (\partial_y u_y) \phi dz + [u_z \phi]_0^h - \int_0^h (\partial_z u_z) \phi dz + w_s [(1 - \phi)^2 \phi^2]_0^h = 0 \end{aligned} \quad (4.9b)$$

En sortant, d'après la règles des intégrales de Leibniz, les dérivées des intégrales des termes convectifs puis en factorisant par  $\phi$  pour faire apparaître l'équation de transport de la surface libre (4.8k) :

$$\begin{aligned} -\phi (\partial_t h + u_x \partial_x h + u_y \partial_y h - u_z) + \partial_t \int_0^h \phi dz + \partial_x \int_0^h u_x \phi dz + \partial_y \int_0^h u_y \phi dz \\ - u_z (z = 0, t) \phi(z = 0, t) + w_s [(1 - \phi)^2 \phi^2]_0^h = 0 \end{aligned} \quad (4.9c)$$

Nous pouvons ainsi simplifier l'équation précédente en utilisant eq.(4.8k) :

$$\partial_t h \bar{\phi} + \partial_x (h \bar{u}_x \bar{\phi}) + \partial_y (h \bar{u}_y \bar{\phi}) - u_z(z=0, t) \phi(z=0, t) + w_s \left[ (1 - \phi)^2 \phi^2 \right]_0^h = 0 \quad (4.9d)$$

On développe le terme de dérivée temporelle :

$$h \partial_t \bar{\phi} + \bar{\phi} \partial_t h + \partial_x (h \bar{u}_x \bar{\phi}) + \partial_y (h \bar{u}_y \bar{\phi}) - u_z(z=0, t) \phi(z=0, t) + w_s \left[ (1 - \phi)^2 \phi^2 \right]_0^h = 0 \quad (4.9e)$$

et ensuite nous remplaçons le terme  $\partial_t h$  en utilisant l'eq.(4.8m) :

$$\Leftrightarrow (u_z(z=0) - \partial_x (h \bar{u}_x) - \partial_y (h \bar{u}_y)) \bar{\phi} + h \partial_t (\bar{\phi}) + \partial_x (h \bar{u}_x \bar{\phi}) + \partial_y (h \bar{u}_y \bar{\phi}) - u_z(z=0, t) \phi(z=0, t) + w_s \left[ (1 - \phi)^2 \phi^2 \right]_0^h = 0 \quad (4.9f)$$

Nous pouvons factoriser la précédente équation :

$$h \partial \bar{\phi} + \nabla_{2D} (h \bar{\phi} \bar{u}_{2D}) - \nabla_{2D} (h \bar{u}_{2D}) \bar{\phi} + u_z(0) (\bar{\phi} - \phi(0)) + w_s \left[ (1 - \phi)^2 \phi^2 \right]_0^h = 0 \quad (4.9g)$$

Il reste un terme dépendant de la fraction volumique tridimensionnelle  $\phi$ . Afin d'obtenir une équation sur  $\bar{\phi}$ , nous définissons la distribution verticale de la fraction volumique  $\zeta$  avec  $\phi(t, x, y, z) = \zeta(t, x, y, z) \bar{\phi}(t, x, y)$ , telle que :

$$\begin{cases} \bar{\zeta} = 1 \\ \bar{\zeta} \bar{u}_{2D} = \bar{u}_{2D} \\ \zeta(z=0) \bar{\phi} = 1 \text{ sur } \Gamma_e, \zeta(z=0) \bar{\phi} = 0 \text{ sur } \Gamma_s \end{cases} \quad (4.9h)$$

En première approximation, nous utilisons une approximation polynomiale par morceaux du premier degré en  $z$  pour  $\zeta$ , en admettant que  $\bar{\zeta} \bar{u}_{2D} = \bar{u}_{2D}$  et en ajoutant la condition de saut  $\zeta(z \geq z_c) = 1$ , traduisant que le gaz insufflé par le substrat reste préférentiellement au fond du mélange :

$$\begin{cases} \bar{\zeta} = 1 \\ \zeta(z=0) \bar{\phi} = 1 \text{ sur } \Gamma_e, \zeta(z=0) \bar{\phi} = 0 \text{ sur } \Gamma_s \\ \zeta(z \geq z_c) = 1 \end{cases} \quad (4.9i)$$

avec

$$\zeta(t, x, y, z) = \begin{cases} az + b \text{ pour } z \in [0; z_c[ \\ \frac{1}{\bar{\phi}} \text{ pour } z \in [z_c; h]. \end{cases} \quad (4.9j)$$

Le cas de l'approximation polynomiale du premier degré est donné en section §A. L'équation de transport de la fraction volumique devient :

$$h\partial\bar{\phi} + \nabla_{2D}(h\bar{\zeta}u_{2D} - (h\bar{u}_{2D}))\bar{\phi} + u_z(0)\bar{\phi}(1 - \zeta(0)) + w_s(1 - \phi(h))^2\phi^2(h) - w_s(1 - \phi(0))^2\phi^2(0) = 0 \quad (4.9k)$$

$$h(\partial\bar{\phi} + \bar{u}_{2D}\cdot\nabla_{2D}(\bar{\phi})) + u_z(0)\bar{\phi}(1 - \zeta(0)) + w_s(1 - \zeta(h)\bar{\phi})^2\zeta^2(h)\bar{\phi}^2 - w_s(1 - \zeta(0)\bar{\phi})^2\zeta^2(0)\bar{\phi}^2 = 0 \quad (4.9l)$$

Nous complétons l'eq.(4.9l) avec les conditions initiale et aux limites suivantes :

$$\bar{\phi}(t = 0) = \bar{\phi}_{init} \text{ dans } \Omega \quad (4.9m)$$

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\mathbf{n}} = 0 \text{ sur } ]0; +\infty[\times\partial\Omega \quad (4.9n)$$

### Réduction de l'équation de la chaleur

Il nous faut enfin une équation bidimensionnelle de  $\bar{\theta}$ . On intègre l'équation de conservation de l'énergie à l'ordre 0 (4.7j), en utilisant les hypothèses que  $\rho(\phi) = \rho(\bar{\phi})$  et  $k(\phi) = k(\bar{\phi})$ . Les calculs obtenus sans ces approximations sont donnés en section §B.

$$\rho(\bar{\phi}) \int_0^h (\partial_t\theta + u_x\partial_x\theta + u_y\partial_y\theta + u_z\partial_z\theta)dz = \frac{1}{Pe} [k(\bar{\phi})\partial_z\theta]_0^h, \quad (4.10a)$$

en développant l'intégrale, puis en sortant la dérivée temporelle de l'intégrale et enfin en réalisant une intégration par parties sur les termes convectifs, on a :

$$\Leftrightarrow \partial_t \int_0^h \theta dz - \theta(t, x, y, h)\partial_t h + \int_0^h \partial_x(u_x\theta)dz - \int_0^h (\partial_x u_x)\theta dz + \int_0^h \partial_y(u_y\theta)dz - \int_0^h (\partial_y u_y)\theta dz + [u_z\theta]_0^h - \int_0^h (\partial_z u_z)\theta dz = \frac{k(\bar{\phi})}{\rho(\bar{\phi})Pe} [\partial_z\theta]_0^h, \quad (4.10b)$$

en sortant les dérivées spatiales des intégrales puis en factorisant et simplifiant les termes à l'aide de l'équation de conservation de la masse (4.7e) et celle de transport de la surface libre (4.7k), nous obtenons :

$$\partial_t \int_0^h \theta dz + \partial_x \int_0^h u_x\theta dz + \partial_y \int_0^h u_y\theta dz = \frac{k(\bar{\phi})[\partial_z\theta]_0^h}{\rho(\bar{\phi})Pe} + u_z(z=0)\theta(z=0) \quad (4.10c)$$

et d'après la définition de la moyenne verticale, nous pouvons réécrire l'équation précédente :

$$\partial_t(h\bar{\theta}) + \partial_x(h\bar{\theta}u_x) + \partial_y(h\bar{\theta}u_y) = \frac{k(\bar{\phi})[\partial_z\theta]_0^h}{\rho(\bar{\phi})Pe} + u_z(z=0)\theta(z=0). \quad (4.10d)$$

Nous développons le terme  $\partial_t(h\bar{\theta})$  :

$$h\partial_t(\bar{\theta}) + \bar{\theta}\partial_t(h) + \partial_x(h\bar{\theta}u_x) + \partial_y(h\bar{\theta}u_y) = \frac{k(\bar{\phi})[\partial_z\theta]_0^h}{\rho(\bar{\phi})Pe} + u_z(z=0)\theta(z=0) \quad (4.10e)$$

nous remplaçons ensuite le terme  $\partial_t h$  avec l'eq.(4.8m) :

$$h\partial_t(\bar{\theta}) + \nabla_{2D}(h\bar{\theta}u_{2D}) - \bar{\theta}\nabla_{2D}(h\bar{u}_{2D}) = \frac{k(\bar{\phi})[\partial_z\theta]_0^h}{\rho(\bar{\phi})Pe} + u_z(z=0)(\theta(z=0) - \bar{\theta}) \quad (4.10f)$$

Comme dans la section précédente et dans [35], nous avons besoin d'une relation de fermeture afin d'avoir un problème bidimensionnel bien posé en  $\bar{\theta}$ . Nous définissons donc un profil vertical de  $\theta$  nommé  $\varphi$ , avec  $\theta(t, x, y, z) = \varphi(t, x, y, z)\bar{\theta}(t, x, y)$ , tel que :

$$\begin{cases} \bar{\varphi} = 1 \\ \partial_z\varphi + Rp_\mu(\bar{\theta}\varphi) + Nu\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_f(t) \\ -\partial_z\varphi + \frac{k_s}{k}\sqrt{\frac{Pe_s}{\pi t}}\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_s \text{ et } \bar{\theta}\varphi = 1 \text{ sur } \Gamma_e \\ \bar{\varphi}u_{2D} = \bar{u}_{2D} \end{cases} \quad (4.10g)$$

Nous considérons un polynôme du second degré en  $z$  pour  $\varphi$ . Bercovici et Lin [33] ont introduit cette équation de fermeture et ont montré que l'utilisation d'une telle distribution verticale conduit à un problème bien posé et que ses coefficients sont simples à calculer explicitement. Enfin, admettre la condition  $\bar{\varphi}u_{2D} = \bar{u}_{2D}$  induit des erreurs de l'ordre de 10 % dans leur application sur le refroidissement des courants gravitaires géologiques. Bernabeu et al.[35] ont montré qu'une telle approximation pour la température n'implique pas nécessairement de larges différences de résultats avec des approximations d'ordres plus élevés

$$h\left(\partial_t(\bar{\theta}) + \bar{u}_{2D}\cdot\nabla_{2D}\bar{\theta}\right) = \bar{\theta}\frac{k(\bar{\phi})[\partial_z\varphi]_0^h}{\rho(\bar{\phi})Pe} + u_z(z=0)(\theta(z=0) - \bar{\theta}) \quad (4.10h)$$

Nous complétons l'eq.(4.10h) avec les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\bar{\theta}(t = 0) = \bar{\theta}_{init} \text{ in } \Omega \quad (4.10i)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ on } ]0; +\infty[ \times \partial\Omega \quad (4.10j)$$

Enfin, nous pouvons écrire le problème réduit bidimensionnel (P) :  
Trouver  $h$ ,  $\bar{\theta}$  et  $\bar{\phi}$  satisfaisant :

$$\partial_t h - \nabla_{2D}(\mu_n(K, B, h, \bar{\theta}, \bar{\phi}, |\nabla_{2D}h|)\nabla_{2D}h) = u_z(z = 0) \text{ dans } ]0; +\infty[ \times \Omega \quad (4.11a)$$

$$\mu_n = \begin{cases} \frac{n\rho(\bar{\phi})^{1/n}K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n}[(n+1)h\psi + nB(\bar{\theta}, \bar{\phi})][h\psi - B(\bar{\theta}, \bar{\phi})]^{(n+1)/n}}{(n+1)(2n+1)\psi^3} & \text{si } h\psi > B(\bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.11b)$$

$$h(t = 0) = h_0 \text{ dans } \Omega \quad (4.11c)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } ]0; +\infty[ \times \partial\Omega \quad (4.11d)$$

$$h(\partial_t \bar{\theta} + \bar{\mathbf{u}}_{2D} \cdot \nabla \bar{\theta}) - u_z(z = 0)(1 - \bar{\theta}) \quad (4.11e)$$

$$-\frac{k(\bar{\phi})}{\rho(\bar{\phi})Pe} [\partial_z \varphi]_0^h \bar{\theta} = 0 \text{ dans } ]0; +\infty[ \times \Omega$$

$$\bar{\theta}(t = 0) = \bar{\theta}_0 \text{ dans } \Omega \quad (4.11f)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } ]0; +\infty[ \times \partial\Omega \quad (4.11g)$$

$$\begin{cases} \bar{\varphi} = 1 \\ \partial_z \varphi + Rp_\mu(\bar{\theta}\varphi) + Nu\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_f(t) \\ -\partial_z \varphi + \frac{k_s}{k} \sqrt{\frac{Pe_s}{\pi t}} \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_s \text{ et } \bar{\theta}\varphi = 1 \text{ sur } \Gamma_e \end{cases} \quad (4.11h)$$

$$h(\partial \bar{\phi} + \bar{\mathbf{u}}_{2D} \cdot \nabla_{2D}(\bar{\phi})) + u_z(0)\bar{\phi}(1 - \zeta(0)) \quad (4.11i)$$

$$+[w_s(1 - \zeta(z)\bar{\phi})^2 \zeta^2(z)\bar{\phi}^2]_0^h = 0$$

$$\bar{\phi}(t = 0) = \bar{\phi}_{init} \text{ dans } \Omega \quad (4.11j)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } ]0; +\infty[ \times \partial\Omega \quad (4.11k)$$

$$\begin{cases} \bar{\zeta} = 1 \\ \zeta(z \geq z_c) = 1 \\ \zeta(z = 0)\bar{\phi} = 1 \text{ sur } \Gamma_e, \zeta(z = 0)\bar{\phi} = 0 \text{ sur } \Gamma_s \end{cases} \quad (4.11l)$$

$$\text{avec } u_{2D} = \begin{cases} |\nabla_{2D}h|^{1/n} \rho(\bar{\phi})^{1/n} K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n} \frac{\nabla_{2D}h}{|\nabla_{2D}h|} [(h_c - z)^{(n+1)/n} - h_c^{(n+1)/n}] & \text{si } z \in [0; h_c[ \\ -|\nabla_{2D}h|^{1/n} \rho(\bar{\phi})^{1/n} K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n} \frac{\nabla_{2D}h}{|\nabla_{2D}h|} h_c^{(n+1)/n} & \text{si } z \in [h_c; h], \end{cases}$$

$$\text{et la hauteur de plug } h_c(t, x, y) = \max\left(0, h - \frac{Bi(\bar{\theta})}{\rho(\bar{\phi})|\nabla_{2D}h|}\right).$$

## 4.8 Algorithme de résolution

### 4.8.1 Discrétisation temporelle

Nous discrétisons le problème (P) temporellement en premier lieu, à l'aide d'un schéma de différences finies du second ordre implicite (BFD2), défini dans [86] pour des pas de temps constants et utilisé dans [87], puis avec un pas de temps variable dans [21, 35].  $\forall \psi \in C^0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} = & \frac{2\Delta t_m + \Delta t_{m-1}}{\Delta t_m(\Delta t_m + \Delta t_{m-1})} \psi(t_{m+1}) - \frac{\Delta t_m + \Delta t_{m-1}}{\Delta t_m \Delta t_{m-1}} \psi(t_m) \\ & + \frac{\Delta t_m}{\Delta t_{m-1}(\Delta t_m + \Delta t_{m-1})} \psi(t_{m-1}) + \mathcal{O}(\Delta t_m^2 + \Delta t_{m-1}^2) \end{aligned}$$

Les termes de transports  $\frac{D\psi}{Dt}$  sont discrétisés par la méthode des caractéristiques, où nous définissons les caractéristiques  $X_m$  et  $X_{m-1}$  par :

$$X_m = x - \Delta t_m \bar{\mathbf{u}}_{2D}^* \quad (4.12a)$$

et

$$X_{m-1} = x - (\Delta t_m + \Delta t_{m-1}) \bar{\mathbf{u}}_{2D}^* \quad (4.12b)$$

avec :

$$\bar{\mathbf{u}}_{2D}^* = \frac{\Delta t_m + \Delta t_{m-1}}{\Delta t_{m-1}} \bar{\mathbf{u}}_{2D,m} - \frac{\Delta t_m}{\Delta t_{m-1}} \bar{\mathbf{u}}_{2D,m-1} \quad (4.12c)$$

L'algorithme BFD2 s'écrit enfin :

#### Algorithme 4.8.1. (BFD2)

- $m = -1, 0$  :  $h_0 := h_{-1} = h_{init}$  :  $\bar{\phi}_0 = \bar{\phi}_{-1} = \bar{\phi}_{init}$  :  $\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}_{-1} = \bar{\theta}_{init}$
- $m \geq 1$  :  $h_{m-1}, h_m, \bar{\phi}_{m-1}, \bar{\phi}_m, \bar{\theta}_{m-1}$  et  $\bar{\theta}_m$  connus : trouver  $h_{m+1}, \bar{\phi}_{m+1}, \bar{\theta}_{m+1}$  tels que :

$$\begin{aligned} \alpha_m h_{m+1} - \nabla_{2D}(\mu_n(K, B, h_{m+1}, \bar{\theta}_{m+1}, \bar{\phi}_{m+1}, |\nabla_{2D} h_{m+1}|) \nabla_{2D} h_{m+1}) \\ = \beta_m h_m + \varpi_m h_{m-1} + u_z(z=0) \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{\phi}_{m+1}(\alpha_m h_{m+1} + u_z(z=0)(1 - \zeta_{m+1}) \\ & \quad + w_s \bar{\phi}_m \zeta_m(h)^2 (1 - \bar{\phi}_m \zeta_m(h))^2 - w_s \bar{\phi}_m \zeta_m(0)^2 (1 - \bar{\phi}_m \zeta_m(0))^2) = \\ & \quad h_{m+1} \left( \beta_m \bar{\phi}_m \circ X_m + \varpi_m \bar{\phi}_{m-1} \circ X_{m-1} \right) \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{\theta}_{m+1}(\alpha_m h_{m+1} - \frac{k(\bar{\phi}_{m+1})[\partial_z \varphi_{m+1}]_0^h}{\rho(\bar{\phi}_{m+1})Pe} + u_z(z=0)\varphi(0) \\ & \quad = h_{m+1} \left( \beta_m \bar{\theta}_m \circ X_m + \varpi_m \bar{\theta}_{m-1} \circ X_{m-1} \right) + u_z(z=0) \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

$$\frac{\partial h_{m+1}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_{m+1}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_{m+1}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

où l'on note :

$$\alpha_m = \frac{2\Delta t_m + \Delta t_{m-1}}{\Delta t_m(\Delta t_m + \Delta t_{m-1})}$$

$$\beta_m = \frac{\Delta t_m + \Delta t_{m-1}}{\Delta t_m \Delta t_{m-1}}$$

$$\varpi_m = -\frac{\Delta t_m}{\Delta t_{m-1}(\Delta t_m + \Delta t_{m-1})}$$

avec  $\zeta_{m+1}$  et  $\varphi_{2,m+1}$  respectivement les solutions des systèmes  $(S_{m+1})$  et  $(S_{2,m+1})$  définis  $\forall m \geq 0$  par :

$$(S_m) \begin{cases} \bar{\zeta}_m = 1 \\ \bar{\phi}_m \zeta_m = 1 \text{ sur } \Gamma_e, \bar{\phi}_m \zeta_m = 0 \text{ sur } \Gamma_s \end{cases}$$

$$(S_{2m}) \begin{cases} \bar{\varphi}_m = 1 \\ \partial_z \varphi_m + Rp_\mu(\bar{\theta}_m)\varphi_m + Nu\varphi_m = 0 \text{ sur } \Gamma_f(t) \\ -\partial_z \varphi_m + \frac{k_s}{k} \sqrt{\frac{Pe_s}{\pi t_m}} \varphi_m = 0 \text{ sur } \Gamma_s \text{ et } \bar{\theta} \varphi_m = 1 \text{ sur } \Gamma_e \end{cases}$$

### 4.8.2 Algorithme du point fixe

À chaque pas de temps, un algorithme du point fixe sous-relaxé est utilisé pour résoudre les sous-problèmes non linéaires en  $h$ ,  $\bar{\theta}$  et  $\bar{\phi}$ .

**Algorithme 4.8.2.** (*Point fixe sous-relaxé*)

- $k = 0$  :  $\xi^{(0)} := h_m$ ,  $\Psi^{(0)} := \bar{\phi}_m$  et  $\vartheta^{(0)} := \bar{\theta}_m$ .
- $k \geq 1$

**Étape 1** Connaissant  $\xi^{(k)}$ ,  $\Psi^{(k)}$ ,  $\vartheta^{(k)}$ , trouver  $\xi^*$  tel que :

$$\begin{aligned} \alpha_m \xi^* - \nabla_{2D}(\mu_n(K, B, h_{m+1}, \vartheta^{(k)}, \Psi^{(k)}, |\nabla_{2D}\xi^{(k)}|) \nabla_{2D}\xi^*) \\ = \beta_m h_m + \varpi_m h_{m-1} + u_z(z=0) \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial \xi^*}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Enfin  $\xi^{(k+1)} = \omega \xi^* + (1 - \omega)\xi^{(k)}$  avec  $\omega$  le paramètre de sous-relaxation.

**Étape 2** Connaissant  $\xi^{(k+1)}$ ,  $\Psi^{(k)}$ ,  $\vartheta^{(k)}$ , trouver  $\Psi^*$  tel que :

$$\begin{aligned} \Psi^*(\alpha_m \xi^{(k+1)} + u_z(z=0)(1 - \zeta^{(k+1)}) + [w_s \bar{\phi}_m \zeta^{(k+1)}(z)^2 (1 - \bar{\phi}_m \zeta^{(k+1)}(z))^2]_0^h) \\ = \xi^{(k+1)} \left( \beta_m \bar{\phi}_m \circ X_m + \varpi_m \bar{\phi}_{m-1} \circ X_{m-1} \right) \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial \Psi^*}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où  $\zeta^{(m+1)}$  est la solution du système  $(S^{(k+1)})$ , où  $\forall k \geq 1$  :

$$(S^k) \begin{cases} \bar{\zeta}^{(k)} = 1 \\ \Psi^{(k)} \zeta^{(k)} = 1 \text{ sur } \Gamma_e, \Psi^{(k)} \zeta^{(k)} = 0 \text{ sur } \Gamma_s \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \zeta^{(k)}(z < z_c) = a^{(k)}z + b^{(k)} \\ \zeta^{(k)}(z \geq z_c) = 1 \\ \zeta^{(k)}(z=0)\bar{\phi}^{(k)} = 1 \text{ sur } \Gamma_e, \zeta^{(k)}(z=0)\bar{\phi}^{(k)} = 0 \text{ sur } \Gamma_s \end{cases}$$

Enfin,  $\Psi^{(k+1)} = \omega \Psi^* + (1 - \omega)\Psi^{(k)}$ .

**Étape 3** Connaissant  $\xi^{(k+1)}$ ,  $\Psi^{(k+1)}$ ,  $\vartheta^{(k)}$ , trouver  $\vartheta^*$  tel que :

$$\begin{aligned} \vartheta^*(\alpha_m \xi^{(k+1)} - \frac{k(\Psi^{(k+1)})[\partial_z \varphi^{(k+1)}]_0^h}{\rho(\Psi^{(k+1)})Pe} + u_z(z=0)(1 - \varphi^{(k+1)}(z=0))) \\ = \xi^{(k+1)} \left( \beta_m \bar{\theta}_m \circ X_m + \varpi_m \bar{\theta}_{m-1} \circ X_{m-1} \right) \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vartheta^*}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

où  $\varphi^{(k+1)}$  est solution du système  $(S_2^{k+1})$ , où  $\forall k \geq 1$  :

$$(S_2^k) \begin{cases} \bar{\varphi}^k = 1 \\ \partial_z \varphi^k + Rp_\mu(\vartheta^{(k-1)})\varphi^k + Nu\varphi^k = 0 \text{ sur } \Gamma_f(t) \\ -\partial_z \varphi^k + \frac{k_s}{k} \sqrt{\frac{Pe_s}{\pi t_m}} \varphi^k = 0 \text{ sur } \Gamma_s \text{ et } \bar{\theta}\varphi^k = 1 \text{ sur } \Gamma_e \end{cases}$$

avec  $\varphi^{(k)} = a_2^{(k)} z^2 + b_2^{(k)} z + c_2^{(k)}$ . Finalement,  $\vartheta^{(k+1)} = \omega \vartheta^* + (1 - \omega) \vartheta^{(k)}$ .

### 4.8.3 Discrétisation spatiale

Le problème précédent est discrétisé spatialement en utilisant la méthode des éléments finis. Nous utilisons des éléments P1 sur un maillage adaptatif produit avec la librairie Bidimensional Anisotropic Mesh Generator BAMG [73] en affinant un maillage autour du front de la coulée et du segment  $x = 0$  où les gradients de nos variables sont les plus élevés. Le critère d'adaptation utilisé est  $c = h_{m+1} + h_m + h_{m-1} + f(x)|_{x_c}$  qui prend en compte les pas de temps précédents mais aussi la condition à la limite en  $z = 0$  modifiée sur  $\phi$ . Un exemple d'instabilité numérique apparaissant si l'on omet l'utilisation de cette nouvelle condition est donnée en fig.4.16. Elle montre la hauteur de la coulée, avec des pics locaux autour de la position  $x = 0$ , du fait du raffinement grossier du maillage et du changement brutal des conditions limites autour de ce segment.

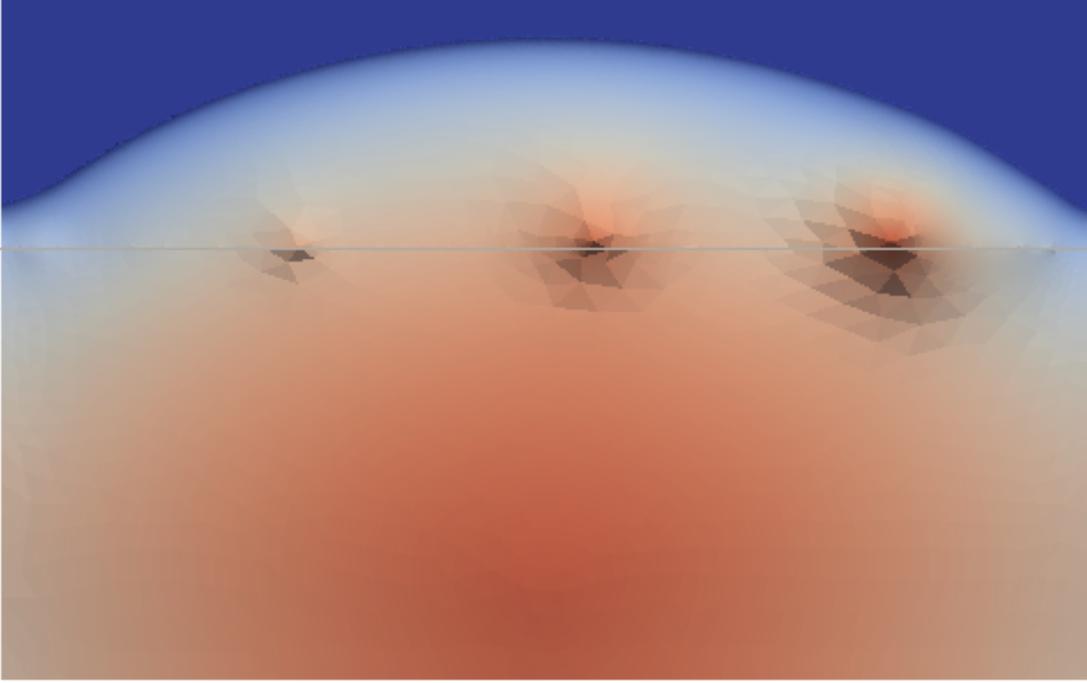


FIGURE 4.16 – Simulation d'étalement, utilisant la condition limite (4.5n). La palette de couleur représente la hauteur et la ligne grise correspond à  $x = 0$ . De grandes instabilités numériques se trouvent autour de cette position, que nous supposons provenir du changement de condition limite sur la fraction volumique combiné à un maillage trop grossier.

### Formulation variationnelle

Afin d'implémenter l'algorithme précédent en utilisant la méthode des éléments finis, le problème doit être reformulé sous forme variationnelle. Nous définissons donc une fonction test  $v \in H_0^1(\Omega)$ , avec  $H_0^1(\Omega)$  un espace de Sobolev de fonctions s'annulant en  $\partial\Omega$ , ce qui satisfait la condition limite de Neumann nul. Nous appliquons enfin la formule de Green :

$$\begin{cases} \alpha_m \xi^* - \nabla_{2D}(\mu_n(K, B, h_{m+1}, \vartheta^{(k)}, \Psi^{(k)}, |\nabla_{2D}\xi^{(k)}|) \nabla_{2D}\xi^*) \\ = \beta_m h_m + \varpi_m h_{m-1} + u_z(z=0) \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial \xi^*}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} \alpha_m \xi^* v + \mu_n(K, B, h_{m+1}, \vartheta^{(k)}, \Psi^{(k)}, |\nabla_{2D}\xi^{(k)}|) \nabla_{2D}(\xi^*) \nabla_{2D}(v) dx = \int_{\Omega} \beta_m h_m v dx + \int_{\Omega} \varpi_m h_{m-1} v dx + \int_{\Omega} u_z(z=0) v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Le terme de gauche de cette équation est une forme bilinéaire  $a(u, v)$  et le terme de droite peut être écrit comme étant  $l(v)$ . Comme les équations sur  $\Psi^*$  et  $\vartheta^*$  n'ont pas de termes diffusifs, il suffit de les multiplier par des fonctions test de  $H_0^1(\Omega)$  et de les intégrer sur le domaine  $\Omega$  pour obtenir leurs formulations variationnelles :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Psi^* \Lambda(\alpha_m \xi^{(k+1)} + u_z(z=0)(1 - \zeta^{(k+1)}) + [w_s \bar{\phi}_m \zeta^{(k+1)}(z)^2 (1 - \bar{\phi}_m \zeta^{(k+1)}(z))^2]_0^h) dx \\ &= \int_{\Omega} \xi^{(k+1)} \Lambda(\beta_m \bar{\phi}_m \circ X_m + \varpi_m \bar{\phi}_{m-1} \circ X_{m-1}) dx, \forall \Lambda \in H_0^1(\Omega) \\ & \int_{\Omega} \vartheta^* \Upsilon(\alpha_m \xi^{(k+1)} - \frac{k(\Psi^{(k+1)})[\partial_z \varphi^{(k+1)}]_0^h}{\rho(\Psi^{(k+1)})Pe} + u_z(z=0)\varphi^{(k+1)}(0)) dx \\ &= \int_{\Omega} (\xi^{(k+1)} (\beta_m \bar{\theta}_m \circ X_m + \varpi_m \bar{\theta}_{m-1} \circ X_{m-1}) + u_z(z=0)) \Upsilon dx, \forall \Upsilon \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Cette formulation variationnelle du problème peut être directement implémentée en utilisant la librairie d'éléments finis Rheolef [48].

## 4.9 Reconstitution du profil 3D et équation de transport de la fraction volumique

Afin de régulariser la condition d'entrée en  $\phi(z=0)$  au voisinage de  $x=0$ , nous proposons une condition à la limite qui dépend de  $x$ ,  $\phi(x, z=0) = f(x)$  pour  $x \in [-x_c; x_c]$ ,  $x_c$  étant une distance arbitraire, dont la sensibilité est étudiée sur la fig.4.9. Dans cette région, la distribution verticale polynomiale du premier ordre par parties  $\zeta(t, x, y, z)$  devient :

$$\zeta = \begin{cases} az + b & \text{pour } z \in [0; z_c[ \\ \frac{1}{\phi} & \text{pour } z \in [z_c; h] \end{cases} \quad (4.14a)$$

en utilisant les mêmes conditions sur  $\zeta$  que dans le système(4.5p), nous obtenons :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{z_c \phi} (1 - f_{x_c}(x)) \\ b = \frac{f_{x_c}(x)}{\phi} \end{cases} \quad (4.14b)$$

Nous pouvons déterminer  $z_c$  en utilisant la condition sur l'intégrale entre 0 et  $h$  de  $\zeta$  :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} \left( \int_0^{z_c} az + \frac{f_{x_c}(x)}{\bar{\phi}} dz + \int_{z_c}^h \frac{1}{\bar{\phi}} dz \right) = 1 \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{h} \left( a \frac{z_c^2}{2} + z_c \frac{f_{x_c}(x)}{\bar{\phi}} + (h - z_c) \frac{1}{\bar{\phi}} \right) = 1 \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{h} \left( z_c \left( \frac{f_{x_c}(x) - 1}{2\bar{\phi}} \right) + \frac{h}{\bar{\phi}} \right) = 1 \\
& \Leftrightarrow z_c = \min \left( h, h \left( 1 - \frac{1}{\bar{\phi}} \right) \frac{2\bar{\phi}}{f_{x_c}(x) - 1} \right)
\end{aligned}$$

Avec ces paramètres  $a$ ,  $b$  et  $z_c$ , nous pouvons reconstruire le profil vertical de la fraction volumique tel que présenté en fig.4.15. L'équation de transport de la fraction volumique (4.91) peut être reformulée en utilisant cette nouvelle condition limite sur le domaine complet  $\Omega$  :

$$h(\partial\bar{\phi} + \bar{\zeta}u_{2D} \cdot \nabla_{2D}(\bar{\phi})) + u_z(0)\bar{\phi} \left( 1 - \frac{f_{x_c}(x)}{\bar{\phi}} \right) - \bar{\phi} \frac{c_0}{c_f} (1 - f_{x_c}(x))^2 f_{x_c}^2(x) = 0 \quad (4.14c)$$

Avec les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\bar{\phi}(t = 0) = \bar{\phi}_{init} \text{ sur } \Omega \quad (4.14d)$$

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\mathbf{n}} = 0 \text{ sur } ]0; +\infty[ \times \partial\Omega \quad (4.14e)$$

## 4.10 Distribution du terme source

Toujours dans le but d'obtenir une continuité des équations de transports de  $\bar{\phi}$  et  $\bar{\theta}$  en  $x = 0$  et de réduire l'erreur numérique présentée en fig.4.16, nous introduisons une distribution spatiale continue en  $x$  et  $y$  de  $u_z(z = 0)$ . Celle-ci est quadratique sur  $\Gamma_e$  et correspond à une fonction rampe en  $\Gamma_s$ . Ainsi, pour une géométrie rectangulaire comme sur fig.4.5 :

$$u_z(z = 0) = \begin{cases} (x(x + 0.1)y(y - 0.25) + \varepsilon_2) * coef_1 & \text{pour } x \leq 0 \\ ((x/0.1) + \varepsilon_2) * coef_2 & \text{pour } 0 < x < 0.1 \text{ et } h(x, y) > 0 \\ (1 + \varepsilon_2) * coef_2 & \text{pour } 0.1 \leq x \text{ et } h(x, y) > 0 \end{cases} \quad (4.15a)$$

avec  $\varepsilon_2 > 0$  afin de régulariser le terme source. Le coefficient  $coef_1$  est calculé de sorte à ce que l'intégrale de la vitesse sur la zone d'entrée du corium corresponde au débit volumique donné dans [36] :

$$\int_{-0.1}^0 \int_0^{0.25} (x(x+0.1)y(y-0.25) + \varepsilon_2) dx dy = Q \quad (4.15b)$$

avec  $Q$  le débit volumique entrant de corium. La valeur de ce coefficient est calculé en utilisant le logiciel de calcul formel Xmaxima :

$$coef_1 = \frac{2304000 Q}{57600\varepsilon_2 + 1} \quad (4.15c)$$

Le coefficient  $coef_2$  est arbitraire, car nous ne disposons pas de mesures expérimentales de débit de gaz. Nous allons donc par la suite essayer de le déterminer.

## 4.11 Calcul d'un débit de gaz représentatif de l'essai VEU7

Afin de déterminer la quantité de gaz relâché par le substrat du fait de l'apport d'énergie par le corium, on calcule l'énergie  $E_{cor}$  qu'il transmet au substrat à pour une durée  $t$  :

$$E_{cor} = kS \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} t = kS \bar{\theta} \frac{\partial a_2 z^2 + b_2 z + c_2}{\partial z} \Big|_{z=0} t = kS \bar{\theta} b_2 t \quad (4.16)$$

Avec  $k$  la conductivité thermique massique,  $\theta$  la température,  $S$  la surface d'échange corium/substrat,  $t$  la durée de l'échange entre ces deux milieux, et  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$  les coefficients de la distribution de la température dans la hauteur de la coulée.

On en déduit la masse  $m_g$  de vapeur dégagée par le substrat :

$$m_g = (E_{cor} - \rho_{bet} z_e S c_{pbet} \Delta \theta_e) \frac{1}{\mathcal{L}} \quad (4.17)$$

Avec  $\rho_{bet}$  la masse volumique du substrat,  $z_e$  la profondeur pour laquelle la température de dégazage est atteinte,  $\Delta \theta_e$  l'élévation de température nécessaire à l'obtention de cette dernière et  $\mathcal{L}$  la chaleur latente de vaporisation de l'eau dans le substrat. On détermine la vitesse du front d'évaporation  $v_g$  à partir de cette masse et de la masse volumique de la vapeur d'eau  $\rho_{vap}$  :

$$v_g = \frac{1}{\rho_{vap} S} \frac{dm_g}{dt} \quad (4.18)$$

En utilisant un schéma d'Euler explicite d'ordre 1, on obtient :

$$v_g = \frac{1}{\rho_{vap} S} \frac{m_g^n - m_g^{n-1}}{t^n - t^{n-1}} \quad (4.19)$$

Et ainsi :

$$v_g = \frac{1}{\rho_{vap} \mathcal{L}(t^n - t^{n-1})} \left( k b^n \bar{\theta}^n t^n - k b^{n-1} \bar{\theta}^{n-1} t^{n-1} - \rho_{bet} c_{pbet} \Delta \theta_e (z^n - z^{n-1}) \right) \quad (4.20)$$

En prenant  $z^n = z^{n-1} + z_e \frac{(t^n - t^{n-1})}{t_{tot}}$ , on obtient :

$$v_g = \frac{1}{\rho_{vap} \mathcal{L}(t^n - t^{n-1})} \left( k (b^n \bar{\theta}^n t^n - b^{n-1} \bar{\theta}^{n-1} t^{n-1}) - \rho_{bet} c_{pbet} \Delta \theta_e \left( z^{n-1} + z_e \frac{(t^n - t^{n-1})}{t_{tot}} - z^{n-1} \right) \right) \quad (4.21)$$

$$v_g = \left( \frac{k}{\rho_{vap} \mathcal{L}} \frac{b^n \bar{\theta}^n t^n - b^{n-1} \bar{\theta}^{n-1} t^{n-1}}{t^n - t^{n-1}} - \frac{\rho_{bet} c_{pbet} \Delta \theta_e}{\rho_{vap} \mathcal{L}} \frac{z_e}{t_{tot}} \right) \quad (4.22)$$

$$\tilde{v}_g = \left( \frac{k \Delta \theta}{\rho_{vap} \mathcal{L} L U} \frac{\tilde{b}^n \tilde{\theta}^n \tilde{t}^n - \tilde{b}^{n-1} \tilde{\theta}^{n-1} \tilde{t}^{n-1}}{\tilde{t}^n - \tilde{t}^{n-1}} - \frac{\rho_{bet}}{\rho_{vap}} Ste \frac{\tilde{z}_e}{\tilde{t}_{tot}} \right) \quad (4.23)$$

Avec  $Ste = \frac{c_{pbet} \Delta \theta_e}{\mathcal{L}}$  le nombre de Stefan. On utilise les valeurs données dans la table 4.5 afin de réaliser des premières simulations, en remplaçant la valeur arbitraire précédente de  $u_z(z=0)$  sur  $\Gamma_s$  par  $\tilde{v}_g$ .

TABLE 4.5

$k$	$3 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$\rho_{bet}$	$2475 \pm 100 \text{ kg.m}^{-3}$
$\rho_{vap}$	$0.590 \text{ kg.m}^{-3}$
$\Delta z$	$\approx 2.10^{-2} \text{ m}$
$\Delta \theta_e$	$80 \text{ K}$
$c_{pbet}$	$\approx 1000 \text{ J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\mathcal{L}$	$2264 \text{ kJ.kg}^{-1}$

Les résultats des simulations utilisant ce modèle sont présentés en figure 4.17. La vitesse du front d'évaporation obtenue est trop grande, propulsant la coulée en butée de la géométrie utilisée en un temps très court. En réalité, la vitesse de

dégazage calculée et la vitesse  $u_z(z=0)$  n'ont pas la même signification physique : la première correspond à une vitesse de déplacement de l'isovaleur  $\theta = 100^\circ C$  dans le substrat, qui nous donne la quantité de gaz relâchée, alors que la seconde correspond à la vitesse qu'a ce gaz en entrée du mélange à la frontière  $z=0$ . Elles ne sont pas équivalentes du fait du procédé complexe de nucléation [88, 89, 90, 91] qui s'opère à la frontière  $z=0$ , dépendant des propriétés matériaux et géométriques de la surface [92]. N'ayant pas de fermeture reliant ces deux vitesses, l'injection de gaz dans le corium sera traitée comme un terme source dans l'équation de conservation de la masse 4.3d.

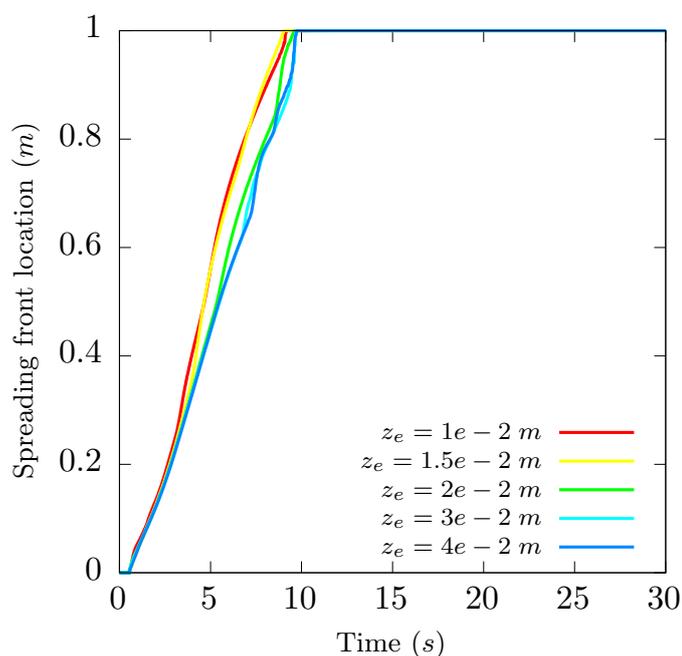


FIGURE 4.17 – Évolution de la position du front au court du temps pour  $Arr = 7.10^{-3}$ ,  $\tau_{y,e} = 200 Pa$ ,  $n = 0.66$ , et différentes profondeurs d'échauffement du substrat  $z_e$ .

# Chapitre 5

## Conclusion et perspectives

Ces travaux de thèse ont mis en évidence la pertinence de la modélisation viscoplastique de l'étalement d'un corium, ainsi que sa similitude aux laves.

Une adaptation d'un code initialement développé pour les coulées de laves par Bernabeu et al. [35], à l'aide de la librairie Rheolef [48], aux cas des accidents graves de réacteurs nucléaires a ainsi pu voir le jour, accompagnée de nombreux post-traitements permettant une meilleure compréhension des mécanismes de l'étalement. Une première analyse de sensibilité à l'aide de ce code nous a donné des ordres de grandeurs réalistes des paramètres rhéologiques du corium, aidant ainsi les expérimentateurs futurs dans leurs travaux sur l'établissement des propriétés de ce matériau à haute température (2800°C). Pour l'essai VEU7, la comparaison entre l'expérience et les calculs de la température dans le substrat a permis de démontrer l'intérêt d'une modélisation multiphasique de l'écoulement en prenant en compte le dégazage du substrat durant l'étalement pour l'industrie nucléaire.

Ainsi, un modèle de mélange one-fluid de l'étalement a été développé. Il généralise la théorie de la lubrification au cas diphasique viscoplastique anisotherme, sous certaines hypothèses. Son adimensionnement permet sa réduction puis son intégration dans la hauteur. Différents profils de fraction volumique dans la hauteur sont explorés, éliminant l'utilisation du polynôme d'ordre 1, trop réducteur. Une corrélation peut être déduite entre vitesse de dégazage et position finale du front de la coulée, pour une géométrie rectangulaire, une distribution linéaire par morceaux et une plage de vitesses de dégazage sur deux décades.

La modélisation du dégazage aux interfaces de la coulée mérite d'être améliorée. À l'interface substrat-coulée, l'utilisation d'une distribution du dégazage plus proche de la réalité nécessite de nouveaux apports au modèle, soit via une fermeture entre vitesse de l'isotherme 100°C et celle de dégazage ou bien par l'utilisation d'un terme source dans l'équation de conservation de la masse. À la surface libre de la coulée, une condition limite permettant l'échappée des bulles semble aussi nécessaire afin de lever la restriction utilisée sur le profil de fraction volumique.

Enfin, pour être plus représentatif des conditions réelles d'un accident grave d'un réacteur à eau pressurisée, plusieurs axes sont à développer pour la prise en compte :

- des termes inertiels dans le modèle, afin de capturer les effets turbulents de l'écoulement pour le cas réacteur,
- de la phase solide provenant de l'ablation du substrat ou de la solidification locale de la coulée par une extension multiphasique,
- de l'étalement du corium sous eau, impliquant un plus fort échange dû à la convection à la surface libre.

Ce dernier axe fait aujourd'hui l'objet du programme expérimental international ROSAU qui devrait permettre la validation d'un modèle multiphasique d'étalement sous eau. Ce modèle pourra donc être utilisé pour le cas des coulées de laves sous marines.

Enfin, l'analogie entre l'étalement hors cuve d'un corium et d'une lave peut être étendue, par exemple à la rétention en cuve d'un corium et à un lac de magma.

## Bibliographie

- [1] A. Bentaïb, H. Bonneville, G. Cénérino, B. Clément, F. Corenwinder, M. Cranga, G. Ducros, f. Fichot, D. Jacquemain, C. Journeau, V. Koundy, D. Leteinturier, D. Magallon, R. Meignen, F. Monroig, G. Nahas, F. Picheureau, E. Raimond, J.-M. Seiler, B. Tourniaire, and J.-P. Van-Dorsselaere, *Les accidents de fusion du cœur des réacteurs nucléaires de puissance*. Collection sciences et techniques, EDP sciences, 2013.
- [2] “Échelle internationale des événements nucléaires.”
- [3] G. Greene, C. Finrock, J. Klages, C. Schwarz, and S. Burton, “Experimental studies on melt spreading, bubbling heat transfer and coolant layer boiling,” in *Proc. 16th Water Reactor Safety Meeting, NUREG/CP-0097*, pp. 341–358,.
- [4] H. Weisshäupl, “Severe accident mitigation concept of the EPR,” *Nuclear Engineering and Design*, vol. 187, pp. 35–45, Jan. 1999.
- [5] G. Cognet, H. Alsmeyer, W. Tromm, D. Magallon, R. Wittmaack, B. R. Sehgal, W. Widmann, L. D. Cecco, R. Ocelli, G. Azarian, D. Pineau, B. Spindler, G. Fieg, H. Werle, C. Journeau, M. Cranga, and G. Laffont, “Corium spreading and coolability CSC Project,” *Nuclear Engineering and Design*, p. 12, 2001.
- [6] W. Steinwarz, A. Alemberti, W. Häfner, Z. Alkan, and M. Fischer, “Investigations on the phenomenology of ex-vessel core melt behaviour,” *Nuclear Engineering and Design*, vol. 209, no. 1-3, pp. 139–146,.
- [7] H. Alsmeyer, G. Alberecht, L. Meyer, W. Häfner, C. Journeau, M. Fischer, S. Hellmann, M. Eddi, H.-J. Allelein, M. Bürger, B. Sehgal, M. Koch, Z. Alkan, J. Petrov, M. Gaune-Escart, E. Altstadt, and G. Bandini, “Ex-vessel core melt stabilization research (ecostar,” *Nuclear Engineering and Design*, vol. 235, no. 2-4, pp. 271–284,.
- [8] J. Veteau and R. Wittmaack, “Corine experiments and theoretical modelling,” in *FISA 95 EU Research on severe accidents, Official Publ. Europ Communities*, (G. Goetem, W. Balz, and E. Loggia, eds.), p. 271–285.
- [9] C. Journeau, E. Boccaccio, C. Brayer, G. Cognet, J.-F. Haquet, C. Jégou, P. Piluso, and J. Monerri, “Ex-vessel corium spreading : results from the VULCANO spreading tests,” *Nuclear Engineering and Design*, vol. 223, pp. 75–102, July 2003.

- 
- [10] J. Seiler and J. Ganzhorn, “Viscosities of corium-concrete mixtures,” *Nuclear Engineering and Design*, vol. 178, no. 3, pp. 259–268,.
- [11] M. Ramacciotti, C. Journeau, F. Sudreau, and G. Cognet, “Viscosity models for corium melts,” *Nuclear Engineering and Design*, vol. 204, pp. 377–389, Feb. 2001.
- [12] B. Spindler and J. M. Veteau, “The simulation of melt spreading with THEMA code Part 1 : Model, assessment strategy and assessment against analytical and numerical solutions,” *Nuclear Engineering and Design*, p. 10, 2006.
- [13] M. T. Farmer, “the meltsread code for modeling of ex-vessel core debris spreading behavior,” Tech. Rep. ANL-18/30, argonne national lab., usa, 2018. <https://www.osti.gov/biblio/1483992>.
- [14] R. Wittmaack, “Simulation of Free-Surface flows with Heat Transfer and Phase Transitions and Application to Corium Spreading in the EPR,” *Nuclear Technology*, vol. 137, pp. 194–212, Mar. 2002.
- [15] Jubaidah, Y. Umazume, N. Takahashi, X. Li, G. Duan, and A. Yamaji, “2d mps method analysis of ecokats-v1 spreading with crust fracture model,” *Nuclear Engineering and Design*, vol. 379, p. 111251, 2021.
- [16] H. R. Shaw, “Rheology of Basalt in the Melting Range,” *Journal of Petrology*, vol. 10, pp. 510–535, Oct. 1969.
- [17] A. R. McBirney and T. Murase, “Rheological Properties of Magmas,” *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, vol. 12, pp. 337–357, May 1984.
- [18] S. Blake, “Viscoplastic models of lava domes,” in *Lava flows and domes*, p. 88–126, Springer.
- [19] W. H. Herschel, “Consistency of Rubber Benzene Solutions,” *Industrial & Engineering Chemistry*, vol. 16, pp. 927–927, Sept. 1924.
- [20] W. H. Herschel and T. Bulkley, “Measurement of consistency as applied to rubber-benzene solutions,” *Proc. Amer. Soc. Testing Material*, vol. 26, no. 2, pp. 621–633, 1926.
- [21] N. Bernabeu, P. Saramito, and C. Smutek, “Numerical modeling of non-Newtonian viscoplastic flows : part II. Viscoplastic fluids and general tridimensional topographies,” *Int. J. Numer. Anal. Model.*, vol. 11, no. 1, pp. 213–228, 2014.

- 
- [22] G. Chambon, A. Ghemmour, and D. Laigle, “Gravity-driven surges of a viscoplastic fluid : An experimental study,” *Journal of Non-Newtonian fluid Mechanics*, vol. 158, pp. 54–62, May 2009. Number : 1-3.
- [23] P. Saramito, *Complex fluids*. New York, NY : Springer Berlin Heidelberg, 2016.
- [24] P. Saramito and A. Wachs, “Progress in numerical simulation of yield stress fluid flows,” *Rheologica Acta*, vol. 56, pp. 211–230, Mar. 2017.
- [25] R. Glowinski, J.-L. Lions, and R. Trémoières, “Analyse numérique des inéquations variationnelles,” in *Méthodes mathématiques de l’informatique*.
- [26] I. Frigaard and C. Nouar, “On the usage of viscosity regularisation methods for visco-plastic fluid flow computation,” *J. Non-Newt. fluid Mech*, vol. 127, no. 1.
- [27] M. Fortin and R. Glowinski, *Augmented Lagrangian Methods : Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems*. Elsevier, Apr. 2000. Google-Books-ID : s6\_5EeBjQnkC.
- [28] P. Saramito and N. Roquet, “An adaptive finite element method for viscoplastic fluid flows in pipes,” *Comput. Meth. Applied Mech. Engng*, vol. 190, no. 40-41.
- [29] A.-J.-C. Saint-Venant, “Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l’introduction des marées dans leurs lits,” *C. R. Acad. Sci*, vol. 73 :237–240, pp. 133, 164.
- [30] H. E. Huppert, “The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface,” *Journal of fluid Mechanics*, vol. 121, p. 43, Aug. 1982.
- [31] K. F. Liu and C. C. Mei, “Slow spreading of a sheet of Bingham fluid on an inclined plane,” p. 25, 1989.
- [32] N. Balmforth, R. Craster, P. Perona, A. Rust, and R. Sassi, “Viscoplastic dam breaks and the Bostwick consistometer,” *Journal of Non-Newtonian fluid Mechanics*, vol. 142, pp. 63–78, Mar. 2007.
- [33] D. Bercovici and J. Lin, “A gravity current model of cooling mantle plume heads with temperature-dependent buoyancy and viscosity,” *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, vol. 101, pp. 3291–3309, Feb. 1996.

- [34] N. J. Balmforth, R. V. Craster, and R. Sassi, “Dynamics of cooling viscoplastic domes,” *Journal of fluid Mechanics*, vol. 499, pp. 149–182, Jan. 2004.
- [35] N. Bernabeu, P. Saramito, and C. Smutek, “Modelling lava flow advance using a shallow-depth approximation for three-dimensional cooling of viscoplastic flows,” *Geological Society, London, Special Publications*, vol. 426, no. 1, pp. 409–423, 2016.
- [36] C. Journeau, J.-F. Haquet, B. Spindler, C. Spengler, and J. Foit, “The VULCANO VE-U7 Corium spreading benchmark,” *Progress in Nuclear Energy*, vol. 48, pp. 215–234, Apr. 2006.
- [37] S. Mirjalili, S. S. Jain, and M. S. Dodd, “Interface-capturing methods for two-phase flows : An overview and recent developments,” *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, p. 19, 2017.
- [38] M. Riella, R. Kahraman, and G. Tabor, “Fully-coupled pressure-based two-fluid solver for the solution of turbulent fluid-particle systems,” *Computers & fluids*, vol. 192, p. 104275, 2019.
- [39] S. M. Damián and N. M. Nigro, “An extended mixture model for the simultaneous treatment of small-scale and large-scale interfaces : AN EXTENDED MIXTURE MODEL FOR SMALL-SCALE AND LARGE-SCALE INTERFACES,” *International Journal for Numerical Methods in fluids*, vol. 75, pp. 547–574, July 2014.
- [40] W. Meng, L. Liao, M. Chen, C.-h. Yu, J. Li, and R. An, “An enhanced CLSVOF method with an algebraic second-reconstruction step for simulating incompressible two-phase flows,” *International Journal of Multiphase flow*, vol. 154, p. 104151, Sept. 2022.
- [41] M. Ishii and N. Zuber, “Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows,” *AIChE Journal*, vol. 25, pp. 843–855, Sept. 1979.
- [42] J. W. Cahn and J. E. Hilliard, “Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 28, no. 5, pp. 258–267, 1958.
- [43] S. M. Allen and J. W. Cahn, “A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening,” *Acta Metallurgica*, vol. 27, pp. 1085–1095, June 1979.
- [44] M. Ishii, “One-dimensional drift-flux model and constitutive equations for relative motion between phases in various two-phase flow regimes,” Tech. Rep. ANL-77-47, Argonne National Laboratory, Oct. 1977.

- [45] T. Hibiki and M. Ishii, “One-dimensional drift–flux model for two-phase flow in a large diameter pipe,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 46, pp. 1773–1790, May 2003.
- [46] B. Chexal, J. Horowitz, and G. Lellouche, “An assessment of eight void fraction models,” *Nuclear Engineering and Design*, vol. 126, pp. 71–88, Apr. 1991. Number : 1.
- [47] J. Brackbill, D. Kothe, and C. Zemach, “A continuum method for modeling surface tension,” *Journal of Computational Physics*, vol. 100, pp. 335–354, 1992.
- [48] P. Saramito, “Rheolef 7.1, an efficient C++ finite element environment,” 2019.
- [49] T. Schiano, B. Bigot, J.-F. Haquet, P. Saramito, and C. Smutek, “A viscoplastic approach to corium spreading during a severe nuclear accident,” *accepted by Nuclear Engineering and Design*.
- [50] T. Schiano, B. Bigot, J.-F. Haquet, P. Saramito, and C. Smutek, “Modelling spreading with degassing using anisotherm viscoplastic multiphase shallow water approximation,” *submitted to International Journal of Multiphase flows*.
- [51] M. Johnson, T. Schiano, A. Denoix, V. Bouyer, and C. Journeau, “High-temperature ex-vessel corium spreading. Part 2 : scaling principles for gravity-viscous spreading with slip at the melt–substrate interface,” *Journal of Nuclear Science and Technology*, pp. 1–13, Oct. 2021.
- [52] T. Schiano, B. Bigot, J.-F. Haquet, P. Saramito, and C. Smutek, “Modélisation et simulation numérique de l’étalement d’un fluide dense et à haute température,” in *Société Française de la thermique 2020*, (Online), June 2020.
- [53] T. Schiano, B. Bigot, J.-F. Haquet, P. Saramito, and C. Smutek, “Non-Newtonian Spreading Simulation of Molten Nuclear Combustible,” in *Proceedings of the 7th World Congress on Momentum, Heat and Mass Transfer (MHMT’22)*, (Online), Apr. 2022.
- [54] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*. Oxford university press, 1959.
- [55] C. Journeau and P. Piluso, “Molten Core Concrete Interaction,” in *Comprehensive Nuclear Materials*, pp. 499–524, Elsevier, 2020.
- [56] N. Bernabeu, *Modélisation multi-physique des écoulements viscoplastiques application aux coulées de lave volcanique*. Applied Mathematics, Université de Grenoble, Feb. 2015.

- [57] E. Boccaccio, J. Moneris, C. Jégou, P. Fouquart, and P. Correggio, “Compte rendu d’essai VE-U7,” Note Technique DTP/STH/LMA 02/06, CEA Cadarache, Cadarache, France, Nov. 2002.
- [58] C. Journeau, G. Jeulain, L. Benyahia, J. Tassin, and P. Abélard, “Rheology of mixtures in the solidification range,” *Rhéologie*, vol. 9, pp. 28–39, 2006.
- [59] S. Longo, V. Di Federico, and L. Chiapponi, “Propagation of viscous gravity currents inside confining boundaries : the effects of fluid rheology and channel geometry,” *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 471, p. 20150070, June 2015.
- [60] E. C. Bingham, *fluidity and plasticity*. New-York, USA : Mc Graw-Hill, 1922. <http://www.archive.org/download/fluidityandplast007721mbp/fluidityandplast007721mbp.pdf>.
- [61] N. Villeneuve, D. R. Neuville, P. Boivin, P. Bachèlery, and P. Richet, “Magma crystallization and viscosity : A study of molten basalts from the Piton de la Fournaise volcano (La Réunion island),” *Chemical Geology*, vol. 256, pp. 242–251, Nov. 2008.
- [62] H. Pinkerton and G. Norton, “Rheological properties of basaltic lavas at sub-liquidus temperatures : laboratory and field measurements on lavas from Mount Etna,” *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, vol. 68, pp. 307–323, Nov. 1995.
- [63] J. Durand, P. Tulet, M. Leriche, S. Bielli, N. Villeneuve, A. D. Muro, and J.-B. Fillipi, “Modeling the lava heat flux during severe effusive volcanic eruption : An important impact on surface air quality : DURAND ET AL.,” *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, vol. 119, pp. 11,729–11,742, Oct. 2014.
- [64] M. Roche, D. Steidl, L. Leibowitz, J. Fink, and B. Raj Sehgal, “Viscosity of corium-concrete mixtures at high temperatures,” Argonne National Laboratory Report ACE-TR-C37, Argonne National Laboratory, ANL, 1994.
- [65] C. Journeau, F. Sudreau, J.-M. Gatt, and G. Cognet, “Thermal, physico-chemical and rheological boundary layers in multi-component oxidic melt spreads,” *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 38, pp. 879–891, Nov. 1999.
- [66] F. Sudreau and G. Cognet, “Corium viscosity modelling above liquidus temperature,” *Nuclear Engineering and Design*, vol. 178, pp. 269–277, Dec. 1997.

- [67] P. Piluso, J. Moneris, C. Journeau, and G. Cognet, “Viscosity measurements of ceramic oxides by aerodynamic levitation,” *Int. J. Thermophys.*, vol. 23, no. 5, pp. 1229–1240, 2002.
- [68] C. Ancey and H. Jorrot, “Yield stress for particle suspensions within a clay dispersion,” *Journal of Rheology*, vol. 45, pp. 297–319, Mar. 2001.
- [69] M. Johnson, A. Denoix, V. Bouyer, H. Goda, S. Kamohara, J. Takeuchi, L. Brissonneau, and C. Journeau, “High-temperature ex-vessel corium spreading. Part 1 : experimental investigations on ceramic and sacrificial concrete substrates,” *Journal of Nuclear Science and Technology*, pp. 1–13, Oct. 2021.
- [70] K. R. Robb, M. Farmer, and M. W. Francis, “Ex-Vessel Core Melt Modeling Comparison between MELTSPREAD-CORQUENCH and MELCOR 2.1,” Tech. Rep. ORNL/TM-2014/1, 1185398, Mar. 2014.
- [71] A. Yamaji and X. Li, “Development of MPS Method for Analyzing Melt Spreading Behavior and MCCI in Severe Accidents,” *Journal of Physics : Conference Series*, vol. 739, p. 012002, Aug. 2016.
- [72] N. Roquet and P. Saramito, “An adaptive finite element method for Bingham fluid flows around a cylinder,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, pp. 3317–3341, Aug. 2003.
- [73] F. Hecht, *BAMG : bidimensional anisotropic mesh generator*, 2006. <https://www.ljll.math.upmc.fr/hecht/ftp/bamg>.
- [74] R. Wittmaack, “Corflow : A code for the numerical simulation of free-surface flow,” *Nuclear Technology*, vol. 119, no. 2, pp. 158–180, 1997.
- [75] H.-J. Allelein, A. Breest, and C. Spengler, “Simulation of core melt spreading with lava : theoretical background and status of validation,” in *Proceedings of the OECD workshop on ex-vessel debris coolability*, (Karlsruhe (Germany)), 2000.
- [76] R. Clift, J. R. Grace, and M. E. Weber, “Bubbles, drops, and particles,” 2005.
- [77] T. Maxworthy, C. Gnann, M. Kürten, and F. Durst, “Experiments on the rise of air bubbles in clean viscous liquids,” vol. 321, pp. 421–441.
- [78] T. Chawla, D. Graff, R. Borg, G. Bordner, D. Weber, and D. Miller, “Thermophysical properties of mixed oxide fuel and stainless steel type 316 for use in transition phase analysis,” *Nuclear Engineering and Design*, vol. 67, pp. 57–74, Oct. 1981.

- [79] f. Le Roy de Bonneville, *Modélisation numérique de l'agitation et du mélange dans les écoulements à bulles. Application aux phénomènes de convection dans un bain de corium*. PhD thesis, 2020. Thèse de doctorat dirigée par Risso, Frédéric et Zamansky, Rémi Dynamique des fluides Toulouse, INPT 2020.
- [80] J. J. M. Magnaudet, “The force acting on bubbles and rigid particles,” in *FEDSM '97*, p. 10.
- [81] R. Deepak Selvakumar and S. Dhinakaran, “Forced convective heat transfer of nanofluids around a circular bluff body with the effects of slip velocity using a multi-phase mixture model,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 106, pp. 816–828, Mar. 2017.
- [82] M. F. Trujillo, “Reexamining the one-fluid formulation for two-phase flows,” *International Journal of Multiphase flow*, vol. 141, p. 103672, Aug. 2021.
- [83] A. Rajkotwala, A. Panda, E. Peters, M. Baltussen, C. van der Geld, J. Kuersten, and J. Kuipers, “A critical comparison of smooth and sharp interface methods for phase transition,” *International Journal of Multiphase flow*, vol. 120, p. 103093, Nov. 2019.
- [84] G. Roult, A. Peltier, B. Taisne, T. Staudacher, V. Ferrazzini, and A. Di Muro, “A new comprehensive classification of the Piton de la Fournaise activity spanning the 1985–2010 period. Search and analysis of short-term precursors from a broad-band seismological station,” *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, vol. 241-242, pp. 78–104, Oct. 2012.
- [85] P.-H. Chiu, “A conservative phase field method for solving incompressible two-phase flows,” *Journal of Computational Physics*, p. 20, 2011.
- [86] K. Boukir, Y. Maday, B. Métivet, and E. Razafindrakoto, “A high-order characteristics finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations,” *International Journal for Numerical Methods in fluids*, vol. 25, pp. 1421–1454, 1997.
- [87] G. Fourestey and S. Piperno, “A second-order time-accurate ALE Lagrange–Galerkin method applied to wind engineering and control of bridge profiles,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, pp. 4117–4137, Oct. 2004.
- [88] X. Liu, Q. Zou, and R. Yang, “Theoretical analysis of bubble nucleation in liquid film boiling,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 192, p. 122911, Aug. 2022.

- 
- [89] F. J. Arias, “Micro heat and mass transfer by bubble-trains from the gas discharging at nucleation sites,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 194, p. 123042, Sept. 2022.
- [90] Y.-J. Chen, X.-J. Chen, B. Yu, W.-J. Zhou, Q. Cao, and W.-Q. Tao, “Investigation of water bubble nucleation by using molecular dynamics simulation,” *Journal of Molecular Liquids*, vol. 334, p. 116037, July 2021.
- [91] L. Liu, C. Sun, Y. Li, H. Han, J. Zhu, and Z. Su, “A molecular dynamics study on the mechanism of heterogeneous bubble nucleation of mixed liquid,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 138, p. 106315, Nov. 2022.
- [92] S.-Y. Wang, Z.-J. Wang, D.-Q. Wang, Y.-R. Yang, S.-F. Zheng, S.-R. Gao, X.-D. Wang, and D.-J. Lee, “Nucleation of water vapor on nanodimpled surfaces : Effects of curvature radius and surface wettability,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 219, p. 119437, Jan. 2023.



# Annexe A

## Problèmes liés à l'utilisation de l'approximation P1

Dans un premier temps, afin de tester notre code, la distribution dans la hauteur de la fraction volumique fut considérée comme étant un polynôme d'ordre 1 et non pas d'ordre 1 par morceaux. Nous présentons ici comment cela impacte les équations de conservation de la fraction volumique et de l'énergie, et leurs résolutions numériques. Calculons en premier lieu les coefficients des profils verticaux de  $\phi$  et  $\theta$  :

$$\begin{cases} \bar{\zeta} = 1 \\ \bar{\phi}\zeta(z=0) = 1 \text{ sur } \Gamma_e, \bar{\phi}\zeta(z=0) = 0 \text{ sur } \Gamma_s \end{cases} \quad (\text{A.1a})$$

$$\begin{cases} \bar{\varphi} = 1 \\ \partial_z \varphi + Rp_\mu(\bar{\theta}\varphi)\varphi + Nu\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_f(t) \\ -\partial_z \varphi + \frac{k_s}{k} \sqrt{\frac{Pe_s}{\pi t}} \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_s \text{ et } \bar{\theta}\varphi = 1 \text{ sur } \Gamma_e \end{cases} \quad (\text{A.1b})$$

avec  $\zeta = az + b$  et  $\varphi = a_2 z^2 + b_2 z + c_2$ . Pour  $x \in \Gamma_e$ , nous avons :

$$\begin{cases} a = \left(1 - \frac{1}{\phi}\right) \frac{2}{h} \\ b = \frac{1}{\phi} \\ a_2 = -\frac{3Lh(2\bar{\theta}-1)-6(1-\bar{\theta})}{Lh^3\bar{\theta}+4h^2\bar{\theta}} \\ b_2 = \frac{2Lh(3\bar{\theta}-2)-12(1-\bar{\theta})}{Lh^2\bar{\theta}+4h\bar{\theta}} \\ c_2 = \frac{1}{\theta} \end{cases} \quad (\text{A.1c})$$

De la même manière pour  $x \in \Gamma_s$ , nous avons :

$$\begin{cases} a = \frac{2}{h} \\ b = 0 \\ a_2 = -\frac{6(Klh+L+K)}{KLh^3+4(L+K)h^2+12h} \\ b_2 = \frac{6K(Lh+2)}{KLh^2+4(L+K)h+12} \\ c_2 = \frac{6(Lh+2)}{KLh^2+4(L+K)h+12} \end{cases} \quad (\text{A.1d})$$

en utilisant les notations  $K = \frac{k_s}{k} \sqrt{\frac{Pe_s}{\pi t}}$  et  $L = Rp_\mu(\bar{\theta}_k \varphi_k) + Nu$ . Nous pouvons réécrire les équations (4.9l) et (4.10h) de façon discrétisées :

$$\begin{aligned} & \bar{\phi}_{k+1} \left( \frac{h_{k+1}}{\Delta t} + u_z^{(e,s)}(z=0) + w_s 4\bar{\phi}_k \begin{cases} |2 - 2\bar{\phi}_k|^2 \text{ sur } \Gamma_e \\ |1 - 2\bar{\phi}_k|^2 \text{ sur } \Gamma_s \end{cases} \right) \\ &= \frac{h_{k+1}}{\Delta t} \bar{\phi}_{n-1} \circ X + \begin{cases} u_z^{(e)}(z=0) \text{ sur } \Gamma_e \\ 0 \text{ sur } \Gamma_s \end{cases} - w_s \begin{cases} (-4\bar{\phi}_k + 1)|2 - 2\bar{\phi}_k|^2 \text{ sur } \Gamma_e \\ 0 \text{ sur } \Gamma_s \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.1e})$$

$$\begin{aligned} & \bar{\theta}_{k+1} \left[ \frac{h_{k+1}}{\Delta t} + u_z^{(e,s)}(z=0) \begin{cases} 1 \text{ sur } \Gamma_e \\ \left(1 - \frac{6(Lh+2)}{12+4(L+K)h+KLh^2}\right) \text{ sur } \Gamma_s \end{cases} \right. \\ & \left. + \frac{k(\bar{\phi})}{\rho(\bar{\phi})Pe} \left( \begin{cases} 0 \text{ sur } \Gamma_e \\ \frac{6K(Lh+2)}{12+4(L+K)h+KLh^2} \text{ sur } \Gamma_s \end{cases} - \begin{cases} 0 \text{ on } \Gamma_e \\ \frac{-6(KLh+L+K)+6K(Lh+2)}{12+4(L+K)h+KLh^2} \text{ sur } \Gamma_s \end{cases} \right) \right] \\ &= \frac{h_{k+1}}{\Delta t} \bar{\theta}_{n-1} \circ X + \begin{cases} u_z^{(e)}(z=0) \text{ sur } \Gamma_e \\ 0 \text{ sur } \Gamma_s \end{cases} \\ & - \frac{k(\bar{\phi})}{\rho(\bar{\phi})Pe} \left( \begin{cases} \frac{2Lh(3\bar{\theta}-2)-12(1-\bar{\theta})}{(Lh+4)h} \text{ sur } \Gamma_e \\ 0 \text{ sur } \Gamma_s \end{cases} + \begin{cases} \frac{-3Lh(2\bar{\theta}-1)-6(1-\bar{\theta})+2Lh(3\bar{\theta}-2)-12(1-\bar{\theta})}{(Lh+4)h} \text{ sur } \Gamma_e \\ 0 \text{ sur } \Gamma_s \end{cases} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1f})$$

Deux problèmes proviennent de cette formulation : d'abord, les équations différent selon les sous-domaines de  $\Omega$ , amenant des soucis de continuité. Ensuite, le dernier terme de gauche de l'éq.(A.1e) montre que s'il n'y a plus d'évolution de  $h$  et si  $u_z(z=0)$ ,  $\phi$  tends ver la valeur 1/2 dans le sous-domaine  $\Gamma_s$ , comme simulé et représenté sur la fig.A.1.

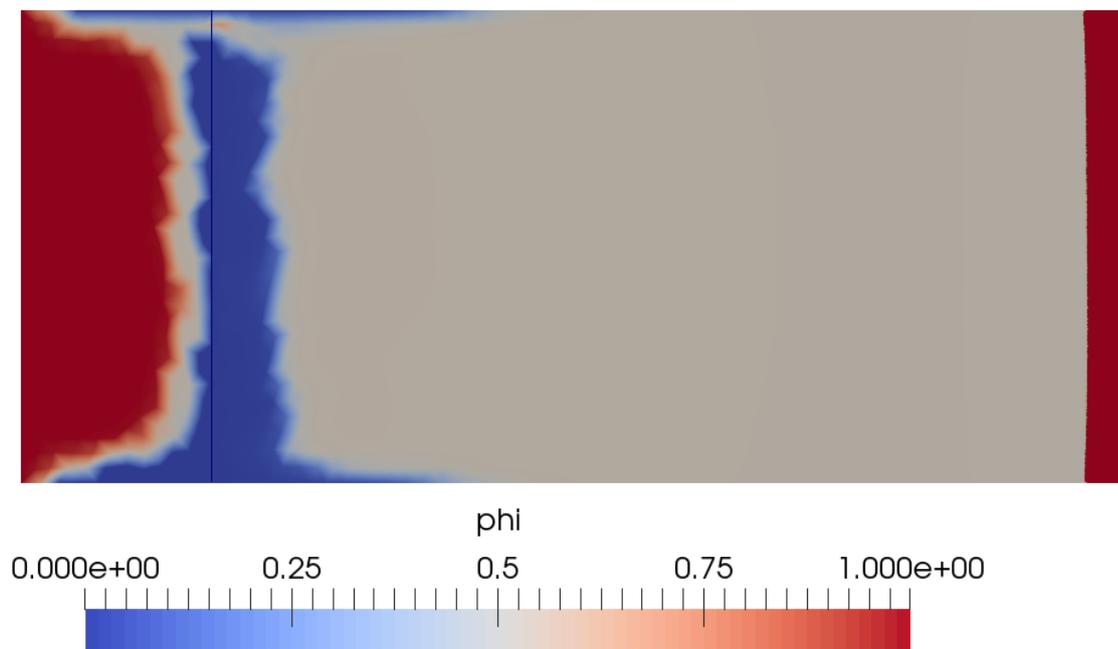


FIGURE A.1 – État arrêté d’une simulation d’étalement utilisant la condition limite (4.5n) et un profil vertical P1. La couleur représente la fraction volume et la ligne noire la position  $x = 0$ . Pour la majorité du sous-domaine  $x > 0$  et  $h > 0$ , la fraction volumique est égale à  $1/2$ .



# Annexe B

## Intégration dans la hauteur de la coulée avec variation verticale des propriétés matériaux

### B.1 Impact sur l'équation de transport de la hauteur

On intègre l'équation (4.7h) afin d'avoir une expression de  $p$  en fonction de  $h$  :

$$\begin{aligned} -\partial_z p &= \rho(\phi) \\ \Leftrightarrow -\cancel{p(z=h)} + p(z) &= \int_z^h \rho(\phi) dz \\ \Leftrightarrow p(z) &= \rho_2(h-z) + (\rho_1 - \rho_2) \int_z^h \phi dz \end{aligned}$$

$$p(z) = \rho_2(h-z) + (\rho_1 - \rho_2) (\chi(h) - \chi(z)) \quad (\text{B.1a})$$

Avec  $\chi(z) = \int_0^z \phi dz$ . On utilise (4.7f) et (4.7g) afin de déterminer  $\tau_{2D}$  :

$$\begin{aligned} \partial_z \tau_{\alpha z} &= \partial_\alpha p \\ \Leftrightarrow \partial_z \tau_{\alpha z} &= \rho_2 \partial_\alpha h + (\rho_1 - \rho_2) [\partial_\alpha \chi(h) + \partial_z \chi(h) \partial_\alpha h - \partial_\alpha \chi(z)] \\ \Leftrightarrow \tau_{\alpha z} &= -(h-z) [\rho_2 \partial_\alpha h + (\rho_1 - \rho_2) (\partial_\alpha h \phi(h) + \partial_\alpha \chi(h))] + (\rho_1 - \rho_2) \int_z^h \partial_\alpha \chi(z) dz \end{aligned}$$

En faisant l'hypothèse que  $|\partial_\alpha h|\phi(h) \gg \partial_\alpha \chi(h)$  et  $(h-z)|\partial_\alpha h| \gg \int_z^h \partial_\alpha \chi(z) dz$ , on obtient :

$$\tau_{\alpha z} = -(h-z)\partial_\alpha h(\rho_1\phi(h) + \rho_2(1-\phi(h))) \quad (\text{B.1b})$$

On cherche à exprimer  $u_{2D}$ .  $\tau_{\alpha z}$  est linéaire en  $z$  et à pour valeur en  $z = h$   $\tau_{2D}(z = h) = 0$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc une hauteur intermédiaire  $h_c$  telle que :

$$|\tau_{2D}(z = h_c)| = B(\bar{\theta}, \bar{\phi}) = (h - h_c)|\nabla_{2D}h|\rho(\phi(h)) \quad (\text{B.1c})$$

$$\Rightarrow h_c = \max\left(0, h - \frac{B(\bar{\theta}, \bar{\phi})}{\rho(\phi(h))|\nabla_{2D}h|}\right) \quad (\text{B.1d})$$

La condition de Von Mises devient :

$$|\tau_{2D}| > B(\bar{\theta}, \bar{\phi}) \Leftrightarrow (h-z)\rho(\phi(h))|\nabla_{2D}h| > B(\bar{\theta}, \bar{\phi}) \Leftrightarrow z \in [0; h_c[ \quad (\text{B.1e})$$

En prenant la norme de la loi constitutive d'Herschel-Bulkley réduite on a :

$$|\tau_{2D}| = B(\bar{\theta}, \bar{\phi}) + K(\theta, \phi)|\partial_z u_{2D}|^n \quad (\text{B.1f})$$

$$|\partial_z u_{2D}| = \begin{cases} (h_c - z)^{1/n} |\nabla_{2D}h|^{1/n} \rho(\phi(h))^{1/n} K(\theta, \phi)^{-1/n} & \text{si } z \in [0; h_c[ \\ 0 & \text{si } z \in [h_c; h] \end{cases} \quad (\text{B.1g})$$

Afin de retourner à l'expression du vecteur, on multiplie par sa direction. On considère que  $\text{dir}(\partial_z u_{2D}) = \text{dir}(\tau_{2D}) = -\text{dir}(\nabla_{2D}h)$ . Ainsi :

$$\partial_z u_{2D} = \begin{cases} (h_c - z)^{1/n} |\nabla_{2D}h|^{1/n} \rho(\phi(h))^{1/n} K(\theta, \phi)^{-1/n} \frac{\nabla_{2D}h}{|\nabla_{2D}h|} & \text{si } z \in [0; h_c[ \\ 0 & \text{si } z \in [h_c; h] \end{cases} \quad (\text{B.1h})$$

On intègre cette formule :

$$\int \partial_z u_{2D} dz = \int (h_c - z)^{1/n} |\nabla_{2D}h|^{1/n} \rho(\phi(h))^{1/n} K(\theta, \phi)^{-1/n} \frac{\nabla_{2D}h}{|\nabla_{2D}h|} dz \quad (\text{B.1i})$$

$$= |\nabla_{2D}h|^{1/n} \rho(\phi(h))^{1/n} \frac{\nabla_{2D}h}{|\nabla_{2D}h|} \int K(\theta, \phi)^{-1/n} (h_c - z)^{1/n} dz \quad (\text{B.1j})$$

Nous avons besoin d'une fermeture : soit  $\zeta(t, x, y, z)$  tel que :

$$\begin{cases} \phi(t, x, y, z) = \zeta(t, x, y, z)\bar{\phi}(t, x, y), \\ \bar{\zeta} = 1, \\ \int K(\theta, \phi)^{-1/n}(h_c - z)^{1/n} dz = K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n} \int (h_c - z)^{1/n} dz \end{cases} \quad (\text{B.1k})$$

Avec celle-ci on peut écrire :

$$u_{2D} = \begin{cases} |\nabla_{2D}h|^{1/n} \rho(\phi(h))^{1/n} K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n} \frac{\nabla_{2D}h}{|\nabla_{2D}h|} [(h_c - z)^{(n+1)/n} + c_1] & \text{si } z \in [0; h_c[ \\ c_2 & \text{si } z \in [h_c; h] \end{cases} \quad (\text{B.1l})$$

On détermine les constantes d'intégrations avec la condition limite  $u_{2D}(z = 0) = 0$  et la condition de saut  $[u_{2D}]_{z=h_c} = 0$  :

$$u_{2D} = \begin{cases} |\nabla_{2D}h|^{1/n} \rho(\phi(h))^{1/n} K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n} \frac{\nabla_{2D}h}{|\nabla_{2D}h|} [(h_c - z)^{(n+1)/n} - h_c^{(n+1)/n}] & \text{si } z \in [0; h_c[ \\ -|\nabla_{2D}h|^{1/n} \rho(\phi(h))^{1/n} K(\bar{\theta}, \bar{\phi})^{-1/n} \frac{\nabla_{2D}h}{|\nabla_{2D}h|} h_c^{(n+1)/n} & \text{si } z \in [h_c; h] \end{cases} \quad (\text{B.1m})$$

Enfin, on détermine la composante  $u_z$  grâce à la conservation de la masse :

$$\int_0^z \partial_z u_z dz = - \int_0^z \partial_x u_x dz - \int_0^z \partial_y u_y dz \quad (\text{B.1n})$$

$$u_z = - \int_0^z \partial_x u_x + \partial_y u_y dz + u_z(z = 0) \quad (\text{B.1o})$$

Il nous faut une équation pour déterminer  $h$ , on se sert de l'équation de transport de la surface libre :

$$\partial_t h + u_x \partial_x h + u_y \partial_y h - u_z = 0 \quad (\text{B.1p})$$

On remplace  $u_z$  avec l'équation (4.8j), et on sort les dérivées des intégrales avec la formule (en utilisant la condition limite  $u_\alpha(z = 0) = 0$  :

$$\int_0^h \partial_\alpha u_\alpha dz = \partial_\alpha \left( \int_0^h u_\alpha dz \right) + 0 - u_\alpha(z = h) \partial_\alpha h \quad (\text{B.1q})$$

L'équation (4.8k) devient :

$$\begin{aligned} \partial_t h + u_x \partial_x h + u_y \partial_y h + \int_0^z \partial_x u_x + \partial_y u_y dz &= u_z(z = 0) \\ \Leftrightarrow \partial_t h \partial_x \left( \int_0^h u_x dz \right) + \partial_y \left( \int_0^h u_y dz \right) &= u_z(z = 0) \end{aligned}$$

Enfin,

$$\partial_t h + \nabla_{2D}(h\bar{u}_{2D}) = u_z(z = 0) \quad (\text{B.1r})$$

On a donc besoin de connaître  $\bar{u}_{2D}$  en intégrant (4.1k) :

$$\bar{u}_{2D} = \begin{cases} -\frac{n\rho(\phi(h))^{1/n}K(\bar{\theta},\bar{\phi})^{-1/n}[(n+1)h|\nabla_{2D}h|+nB(\bar{\theta},\bar{\phi})][h|\nabla_{2D}h|-B(\bar{\theta},\bar{\phi})]^{(n+1)/n}}{(n+1)(2n+1)h|\nabla_{2D}h|^3}\nabla_{2D}h & \text{si } h|\nabla_{2D}h| > B(\bar{\theta},\bar{\phi}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{B.1s})$$

On peut réécrire (4.8m) comme une équation de diffusion en avec un coefficient diffusif  $\mu_n(K, B, h, \bar{\theta}, \bar{\phi}, \psi)$  :

$$\partial_t h - \nabla_{2D}(\mu_n(K, B, h, \bar{\theta}, \bar{\phi}, |\nabla_{2D}h|)\nabla_{2D}h) = u_z(z = 0) \quad (\text{B.1t})$$

Avec  $\mu_n$  définie pour tout  $n > 0$ ,  $h, \psi \in \mathbb{R}^+$ ,  $\bar{\theta}, \bar{\phi} \in [0, 1]$  et toutes fonctions  $K : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  et  $B : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  de la façon suivante :

$$\mu_n = \begin{cases} \frac{n\rho(\phi(h))^{1/n}K(\bar{\theta},\bar{\phi})^{-1/n}[(n+1)h\psi+nB(\bar{\theta},\bar{\phi})][h\psi-B(\bar{\theta},\bar{\phi})]^{(n+1)/n}}{(n+1)(2n+1)\psi^3} & \text{si } h\psi > B(\bar{\theta},\bar{\phi}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{B.1u})$$

On complète cette équation avec la condition initiale et celle aux limites suivantes :

$$h(t = 0) = h_{init} \text{ sur } \Omega \quad (\text{B.1v})$$

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } ]0; +\infty[ \times \partial\Omega \quad (\text{B.1w})$$

Avec  $\mathbf{n}$  la normale unitaire sortante au domaine. Ici, le terme diffusif dépend de la fraction volumique à  $z = h$  et non plus de celle moyennée dans la hauteur, les hypothèses que  $|\partial_\alpha h|\phi(h) \gg \partial_\alpha \chi(h)$  et  $(h - z)|\partial_\alpha h| \gg \int_z^h \partial_\alpha \chi(z) dz$  semblent réductrices.

## B.2 Impact sur l'équation de conservation de l'énergie

En utilisant des quantités adimensionnées, et en omettant les tildes, :

$$\int_0^h \rho(\phi) [\partial_t \theta + u_x \partial_x \theta + u_y \partial_y \theta + u_z \partial_z \theta] dz = \int_0^h \frac{1}{Pe} \partial_z k(\phi) \partial_z \theta dz \quad (\text{B.2a})$$

On développe le terme de gauche et on intègre celui de droite :

$$\Leftrightarrow \int_0^h \left( \rho_2 \frac{D\theta}{Dt} + (\rho_1 - \rho_2) \phi \frac{D\theta}{Dt} \right) dz = \frac{1}{Pe} [k(\phi) \partial_z \theta]_0^h, \quad (\text{B.2b})$$

avec  $\frac{D\theta}{Dt} = \partial_t \theta + u_x \partial_x \theta + u_y \partial_y \theta + u_z \partial_z \theta$ . On cherche à exprimer le second terme de gauche en fonction de  $\int_0^h \frac{D\theta}{Dt} dz$ .

$$\Leftrightarrow \rho_2 \int_0^h \frac{D\theta}{Dt} dz + (\rho_1 - \rho_2) \int_0^h \left( \phi \frac{D\theta}{Dt} \right) dz = \frac{1}{Pe} [k(\phi) \partial_z \theta]_0^h, \quad (\text{B.2c})$$

Exprimons le terme  $\int_0^h \left( \phi \frac{D\theta}{Dt} \right) dz$  :

$$\int_0^h \left( \phi \frac{D\theta}{Dt} \right) dz = \int_0^h (\phi \partial_t \theta + \phi u_x \partial_x \theta + \phi u_y \partial_y \theta + \phi u_z \partial_z \theta) dz \quad (\text{B.2d})$$

On utilise des intégrations par parties pour rentrer les  $\phi$  dans les dérivées :

$$\begin{aligned} &= \int_0^h \partial_t(\phi \theta) dz - \int_0^h \theta \partial_t \phi dz + \int_0^h \partial_x(\phi u_x \theta) dz - \int_0^h \theta \partial_x(\phi u_x) dz \\ &\quad + \int_0^h \partial_y(\phi u_y \theta) dz - \int_0^h \theta \partial_y(\phi u_y) dz + [\phi u_z \theta]_0^h - \int_0^h \theta \partial_z(\phi u_z) dz \quad (\text{B.2e}) \end{aligned}$$

On échange les dérivées et les intégrales :

$$\begin{aligned} &= \partial_t \int_0^h \phi \theta dz - \phi(h) \theta(h) [\partial_t h + u_x(h) \partial_x h + u_y(h) \partial_y h - u_z(h)] + \partial_x \int_0^h \phi u_x \theta dz + \partial_y \int_0^h \phi u_y \theta dz \\ &\quad - \int_0^h \theta [\partial_x(u_x \phi) + \partial_y(u_y \phi) + \partial_z(u_z \phi)] dz \quad (\text{B.2f}) \end{aligned}$$

D'après l'équation de transport de la surface libre, on a :

$$= \partial_t \int_0^h \phi \theta dz + \partial_x \int_0^h \phi u_x \theta dz + \partial_y \int_0^h \phi u_y \theta dz - \int_0^h \theta [\partial_x(u_x \phi) + \partial_y(u_y \phi) + \partial_z(u_z \phi)] dz \quad (\text{B.2g})$$

$$\begin{aligned} &= \partial_t \int_0^h \phi \theta dz + \partial_x \int_0^h \phi u_x \theta dz + \partial_y \int_0^h \phi u_y \theta dz \\ &\quad - \int_0^h \theta [\phi(\partial_x(u_x) + \partial_y(u_y) + \partial_z(u_z)) + u_x \partial_x \phi + u_y \partial_y \phi + u_z \partial_z \phi] dz \quad (\text{B.2h}) \end{aligned}$$

En utilisant la conservation de la masse et le transport des espèces :

$$= \partial_t \int_0^h \phi \theta dz + \partial_x \int_0^h \phi u_x \theta dz + \partial_y \int_0^h \phi u_y \theta dz - \int_0^h \theta [-\partial_t \phi - \partial_z(\phi(1-\phi)w_z)] dz \quad (\text{B.2i})$$

En intégrant par parties :

$$= \partial_t \int_0^h \phi \theta dz + \partial_x \int_0^h \phi u_x \theta dz + \partial_y \int_0^h \phi u_y \theta dz \\ + \int_0^h \partial_t(\theta \phi) dz - \int_0^h \partial_t(\theta) \phi dz + [\theta \phi(1-\phi)w_z]_0^h - \int_0^h \phi(1-\phi)w_z \partial_z \theta dz \quad (\text{B.2j})$$

En sortant la dérivée temporelle de l'intégrale :

$$= \partial_t \int_0^h \phi \theta dz + \partial_x \int_0^h \phi u_x \theta dz + \partial_y \int_0^h \phi u_y \theta dz \\ + \partial_t \int_0^h \phi \theta dz - \phi(h)\theta(h)\partial_t(h) - \int_0^h \partial_t(\theta) \phi dz + [\theta \phi(1-\phi)w_z]_0^h - \int_0^h \phi(1-\phi)w_z \partial_z \theta dz \quad (\text{B.2k})$$

$$= 2\partial_t \int_0^h \phi \theta dz + \partial_x \int_0^h \phi u_x \theta dz + \partial_y \int_0^h \phi u_y \theta dz \\ - \phi(h)\theta(h)\partial_t(h) - \int_0^h \partial_t(\theta) \phi dz + [\theta \phi(1-\phi)w_z]_0^h - \int_0^h \phi(1-\phi)w_z \partial_z \theta dz \quad (\text{B.2l})$$

Il nous semble à ce point que sans l'hypothèse que  $\rho(\phi) = \rho(\bar{\phi})$ , les équations sont trop couplées pour être résolues simplement dans le cadre de ce travail.