Polytech'Grenoble 1ère année, filière RICM année 2002-2003

Examen – Méthodes numériques

Mardi 20 Mai 2003

Durée : 3 heures. Documents manuscrits, feuilles de TD et calculatrices autorisés.
Le problème et les exercices sont indépendants ; dans chaque problème et exercice, les questions sont elles aussi largement indépendantes

---

Problème : Intégration numérique

Soit $g \in \mathcal{C}^1([0,1])$. On cherche une formule d'intégration numérique, $M(g)$, de la forme

$$I(g) = \int_0^1 g(t)dt \qquad \approx \qquad Ag(0) + Bg'(t_0) + Cg(1) = M(g)$$

qui soit exacte pour les polynômes de degré $\leq n$, n entier à déterminer de façon maximale.

1. Déterminer n et choisir, pour toute la suite du problème, des paramètres A, B, C, t_0 adéquats.

2. On suppose $g \in \mathcal{C}^{n+1}([0,1])$. On veut montrer que

$$\left| \int_0^1 g(t)dt - [Ag(0) + Bg'(t_0) + Cg(1)] \right| \leq K||g^{(n+1)}||_\infty$$

   où K est une constante.

   a. Exhiber un polynôme P_n, de degré n, tel que $\forall t, \exists \xi_t, g(t) = P_n(t) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\xi_t)$. En déduire une majoration de $|I(g) - I(P_n)|$.
   Indication : on pourra utiliser un développement de Taylor.

   b. Majorer de même $|M(g) - M(P_n)|$ en fonction de A, B, C et t_0.

   c. Déduire des deux précédentes questions l'existence et la valeur de K.

3. Soient $[x_i, x_{i+1}]$ un intervalle réel quelconque et $f \in \mathcal{C}^1(I)$. Modifier $M(g)$ pour qu'elle soit exacte sur $[x_i, x_{i+1}]$.

4. Soient $I = [a, b]$ un intervalle réel et $f \in \mathcal{C}^1(I)$. A l'aide de la formule précédente, construire une formule d'intégration de f sur I en fonction d'un paramètre h (à introduire) destiné à tendre vers 0.

5. On suppose f suffisamment régulière, donner une estimation de l'erreur d'intégration et en déduire l'ordre de précision de la formule sur I.

Exercice 1 : Système surdimensionné

Calculer x et y tels que la distance euclidienne entre les vecteurs u et v suivants soit minimale. Quelle est cette distance ?

$$u = \begin{bmatrix} -1 - 2x \\ 1 - x \\ 1 + 2x \end{bmatrix} \quad et \quad v = \begin{bmatrix} y \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 2 : Méthode de Richardson

Rappel 1 : les matrices symétriques ont des valeurs propres réelles.
On résout le système linéaire $Ax = b$ où la matrice A est symétrique définie positive par la méthode itérative suivante:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ est quelconque dans } \mathbb{R}^n \text{ et } \forall k \geq 0, \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha\big(b - Ax^{(k)}\big) \end{cases}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la méthode soit convergente.

2. Sous la forme $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + h$, plus le spectre de T est proche de 0 et plus la convergence est rapide. Déterminer le meilleur choix de α (ie: le α optimal) pour que la méthode converge.
   Indication : étudier les graphes des courbes $\alpha \mapsto |1 - \alpha\lambda_i|$, $\forall i$; $1 \leq i \leq n$.

Exercice 3 : Itération diagonale

Rappel 2 : deux matrices semblables (B et $T^{-1}BT$) ont les mêmes valeurs propres.
On veut résoudre le système linéaire $Ax = b$, A matrice carrée d'ordre n et b un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ par la méthode itérative suivante:

$$\begin{cases} u^{(0)} \text{ est quelconque dans } \mathbb{R}^n \text{ et } \forall k \geq 0, \\ u^{(k+1)} = u^{(k)} + P\big(Au^{(k)} - b\big) \end{cases}$$

où P est une matrice carrée d'ordre n, diagonale, réelle et inversible.

1. Montrer que si la méthode converge, alors la limite u de la suite $(u^{(k)})$ vérifie $Au = b$.

2. On suppose que la matrice A est symétrique et que $P = \mathrm{diag}(p_i)$ avec $p_i > 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$.

   a) Montrer qu'alors les valeurs propres de PA sont réelles (on les notera $\sigma_i, i = 1, \cdots, n$).
   Indication : on pourra transformer PA de manière semblable vers une matrice symétrique.

   b) Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que la méthode converge est que $\forall i = 1, \cdots, n$, $-2 < \sigma_i < 0$.

   c) Montrer que si la méthode converge, alors la matrice A est définie négative (ie: $x^t Ax < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$).