Polytech'Grenoble 1ère année, filière RICM année 2002-2003

Examen – Méthodes numériques

Mardi 20 Mai 2003

Durée : 3 heures. Documents manuscrits, feuilles de TD et calculatrices autorisés.
Le problème et les exercices sont indépendants ; dans chaque problème et exercice, les questions sont elles aussi largement indépendantes

---

Problème : Intégration numérique

Soit $g \in \mathcal{C}^1([0,1])$. On cherche une formule d'intégration numérique, $M(g)$, de la forme

$$I(g) = \int_0^1 g(t)dt \qquad \approx \qquad Ag(0) + Bg'(t_0) + Cg(1) = M(g)$$

qui soit exacte pour les polynômes de degré $\leq n$, n entier à déterminer de façon maximale.

1. Déterminer n et choisir, pour toute la suite du problème, des paramètres A, B, C, t_0 adéquats.

   Correction: *On commence par supposer* $n = 3$ *:*

$$A + C = \int_0^1 1 = 1 \tag{1}$$

$$B + C = \int_0^1 x = 1/2 \tag{2}$$

$$2t_0 B + C = \int_0^1 x^2 = 1/3 \tag{3}$$

$$3t_0^2 B + C = \int_0^1 x^3 = 1/4 \tag{4}$$

   Donc (2) + (3) donnent $2t_0B + C = 1/3$*, soit* $2t_0(1/2 - C) = 1/3 - C$*. De la précédente, on tire, avec (4) que* $3t_0(1/3 - C) = 1/2 - 2C$*. De ces deux dernières, on obtient par soustraction* $C = t_0$*. Cela nous conduit à* $6t_0^2 - 6t_0 + 1 = 0$*, et donc* $t_0 = 1/6[3 \pm \sqrt{3}]$*. d'où les deux choix possibles de paramètres :* $A = 1/2 - 1/6\sqrt{3}$*,* $B = -1/6\sqrt{3}$*,* $C = 1/2 + 1/6\sqrt{3}$*,* $t_0 = 1/2 + 1/6\sqrt{3}$*, ou bien* $A = 1/2 + 1/6\sqrt{3}$*,* $B = 1/6\sqrt{3}$*,* $C = 1/2 - 1/6\sqrt{3}$*,* $t_0 = 1/2 - 1/6\sqrt{3}$*,*

2. On suppose $g \in \mathcal{C}^{n+1}([0,1])$. On veut montrer que

$$\left| \int_0^1 g(t)dt - [Ag(0) + Bg'(t_0) + Cg(1)] \right| \leq K||g^{(n+1)}||_\infty$$

   où K est une constante.

   a. Exhiber un polynôme P_n, de degré n, tel que $\forall t, \exists \xi_t, g(t) = P_n(t) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\xi_t)$. En déduire une majoration de $|I(g) - I(P_n)|$.
   Indication : on pourra utiliser un développement de Taylor.

Correction: *P_n est le polynôme de Taylor de g en 0 : $P_n(t) = g(0) + tg'(0) + t^2/2g''(0) + t^3/6g'''(0)$. On pose $M = ||g^{(4)}||_\infty$. Ensuite on obtient $|I(g) - I(P_n)| \leq M/24 * \int_0^1 t^4 = M/120$.*

b. Majorer de même $|M(g) - M(P_n)|$ en fonction de A, B, C et t_0.

Correction: *Là il faut aussi $g'(t) = P'(t) + t^3/6g^{(4)}(\lambda_t)$ et alors $|M(g) - M(P_n)| \leq |A * 0 + Bt_0^3/6 + C/24|M$.*

c. Déduire des deux précédentes questions l'existence et la valeur de K.

Correction: $K = 1/120 + Bt_0^3/6 + C/24 = 19/1080$

3. Soient $[x_i, x_{i+1}]$ un intervalle réel quelconque et $f \in \mathcal{C}^1(I)$. Modifier $M(g)$ pour qu'elle soit exacte sur $[x_i, x_{i+1}]$.

4. Soient $I = [a, b]$ un intervalle réel et $f \in \mathcal{C}^1(I)$. A l'aide de la formule précédente, construire une formule d'intégration de f sur I en fonction d'un paramètre h (à introduire) destiné à tendre vers 0.

Correction: *On découpe I en intervalles $x_1 < \ldots < x_N$, de pas h. Pour, $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)du$, on effectue le changement de variable $u = x_i + t(x_{i+1} - x_i)$ et donc $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)du = h\int_0^1 f(x_i + th)dt$, que l'on approche par $h[Af(x_i) + Bhf'(x_i + t_0h) + Cf(x_{i+1})]$, puisque si $g(t) = f(u) = f(x_i + th)$, alors $g^{(k)}(t) = h^k f^{(k)}(x_i + th)$. On obtient alors une formule générale :*

$$\int_a^b f(u)du \approx \sum_{i=1}^{N} h[Af(x_i) + Bhf'(x_i + t_0h) + Cf(x_{i+1})]$$

5. On suppose f suffisamment régulière, donner une estimation de l'erreur d'intégration et en déduire l'ordre de précision de la formule sur I.

Correction: *On utilise $g^{(k)}(t) = h^k f^{(k)}(x_i + th)$ et donc*

$$\left|\int_a^b f(u)du - M_h(f)\right| \leq \sum_{i=1}^{N} hKh^4||f||_\infty = [(b-a)KM]h^4.$$

Exercice 1 : Système surdimensionné

Calculer x et y tels que la distance euclidienne entre les vecteurs u et v suivants soit minimale. Quelle est cette distance ?

$$u = \begin{bmatrix} -1-2x \\ 1-x \\ 1+2x \end{bmatrix} \quad et \quad v = \begin{bmatrix} y \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Correction:

```
> A:=evalm([[2,1],[1,1],[-2,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> T:=evalm(transpose(A) &* A);
```

$$T := \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> R:=cholesky(T);
```

$$R := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(R&*transpose(R));
```

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> b:=[-1,1,1];
```

$$b := [-1, 1, 1]$$

```
> c:=evalm(transpose(A) &* b);
```

$$c := [-3, 0]$$

```
> Y:=[-1,1];
```

$$Y := [-1, 1]$$

```
> evalm(R &* Y = c);
```

$$[-3, 0] = [-3, 0]$$

```
> X:=[-2/3,1];
```

$$X := \left[\frac{-2}{3}, 1\right]$$

```
> evalm(transpose(R)&* X = Y);
```

$$[-1, 1] = [-1, 1]$$

```
> d:=evalm(A &* X - b);
```

$$d := \left[\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

```
> sqrt( dotprod(d,d) );
```

$$1$$

Autres méthodes:

- *QR, cf TD7.*
- *$F(x, y) = ||u - v||_2$, puis on cherche les extrema de F à l'aide des dérivées partielles.*

Exercice 2 : Méthode de Richardson

Rappel 1 : les matrices symétriques ont des valeurs propres réelles.
On résout le système linéaire $Ax = b$ où la matrice A est symétrique définie positive par la méthode itérative suivante:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ est quelconque dans } \mathbb{R}^n \text{ et } \forall k \geq 0, \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha\big(b - Ax^{(k)}\big) \end{cases}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la méthode soit convergente.

   Correction: $x^{(k+1)} = (I - \alpha A)x^{(k)} + \alpha b$. *Une CNS pour que la méthode converge est que $\rho(I - \alpha A) < 1$. Comme A est symétrique définie positive les n valeurs propres de A vérifient :*

   $$0 < \lambda_1 \leq \cdot \leq \lambda_n.$$

Aussi, $\forall 1 \leq i \leq n$ les n valeurs propres de $I - \alpha A$ sont $1 - \alpha\lambda_i$. $\forall i$, $|1 - \alpha\lambda_i| < 1$ équivaut à $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_i}$, $\forall i$ car tous les $lambda_i$ sont > 0. Aussi, la CNS pour que la méthode converge est : $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}$.

2. Sous la forme $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + h$, plus le spectre de T est proche de 0 et plus la convergence est rapide. Déterminer le meilleur choix de α (ie: le α optimal) pour que la méthode converge.
   Indication : étudier les graphes des courbes $\alpha \mapsto |1 - \alpha\lambda_i|$, $\forall i$; $1 \leq i \leq n$.

   Correction: *le choix optimal de α, soit α_{opt}, vérifie :*

$$\rho(I - \alpha_{opt}A) \leq \rho(I - \alpha A) = \sup_i |1 - \alpha\lambda_i|, \quad \forall \alpha \in]0, \frac{2}{\lambda_n}[.$$

On déduit des graphes des courbes $\alpha \mapsto |1 - \alpha\lambda_i|$, $1 \leq i \leq n$ que α_{opt} vérifie

$$\{\alpha_{opt}\} = \{\alpha; \alpha \mapsto |1 - \alpha\lambda_1|\} \cap \{\alpha; \alpha \mapsto |1 - \alpha\lambda_n|\}.$$

D'où

$$(\alpha_{opt}\lambda_1 - 1) = (1 - \alpha_{opt}\lambda_n) \Leftrightarrow \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}.$$

Exercice 3 : Itération diagonale

Rappel 2 : deux matrices semblables (B et $T^{-1}BT$) ont les mêmes valeurs propres.
On veut résoudre le système linéaire $Ax = b$, A matrice carrée d'ordre n et b un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ par la méthode itérative suivante:

$$\begin{cases} u^{(0)} \text{ est quelconque dans } \mathbb{R}^n \text{ et } \forall k \geq 0, \\ u^{(k+1)} = u^{(k)} + P\big(Au^{(k)} - b\big) \end{cases}$$

où P est une matrice carrée d'ordre n, diagonale, réelle et inversible.

1. Montrer que si la méthode converge, alors la limite u de la suite $(u^{(k)})$ vérifie $Au = b$.

   Correction: *$u^{(k)} \to u$ alors $u^{(k+1)} \to u$ aussi $P(Au^{(k)} - b) \to P(Au - b)$ implique $u = u + P(Au - b)$ équivalent à $P(Au - b) = 0$ et donc $Au = b$ car P est inversible.*

2. On suppose que la matrice A est symétrique et que $P = \text{diag}(p_i)$ avec $p_i > 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$.

   a) Montrer qu'alors les valeurs propres de PA sont réelles (on les notera $\sigma_i, i = 1, \cdots, n$).
   Indication : on pourra transformer PA de manière semblable vers une matrice symétrique.

   Correction: *les matrices symétriques ont des valeurs propres réelles et 2 matrices semblables ont mêmes valeurs propres. PA est semblable à $T^{-1}PAT$ avec $T = P^{1/2}$ et $T^{-1}PAT = TAT$ qui est symétrique car A est symétrique.*

   b) Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que la méthode converge est que $\forall i = 1, \cdots, n$, $-2 < \sigma_i < 0$.

Correction: *la CNS est* $\rho(I + PA) < 1$ *or les valeus propres de* $I + PA$ *sont* $1 + \sigma_i$ *donc la CNS équivaut à* $|1 + \sigma_i| < 1$ *c'est-à-dire* $-2 < \sigma_i < 0$.

c) Montrer que si la méthode converge, alors la matrice A est définie négative (ie: $x^t Ax < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$).

Correction: *On a montré que* $\sigma_i < 0$ *et la matrice* PA *est semblable à la matrice* $P^{1/2}AP^{1/2}$ *qui est une matrice symétrique et de valeurs propres* < 0. *Aussi* $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\exists y \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $x = P^{1/2}y$ *et* $x^t Ax = y^t P^{1/2}AP^{1/2}y < 0$ *si* $y \neq 0$ *car* $P^{1/2}AP^{1/2}$ *est une matrice symétrique à valeurs propres* < 0. *Comme* $y = 0$ *entraine* $x = 0$ *il s'ensuit que* $x^t Ax < 0, \forall x \neq 0$.