Méthodologie, exercice 3.) Soit $U_n = cos(n * \pi)$. Montrer que U_n ne converge pas.

Si $n = 2k$ est pair, alors $U_{2k} = cos(2k\pi) = 1$. Sinon, si $n = 2k+1$ est impair, alors $U_{2k} = cos((2k+1)\pi) = cos(\pi) = -1$.

Pour montrer que U_n ne converge pas vers une limite finie l, il faut revenir à la définition :

$$\exists \epsilon > 0, \forall n \geq 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, n_1 \geq n \texttt{ et } |U_{n_1} - l| > \epsilon$$

Il nous faut donc trouver ϵ et n_1. Pour ϵ, comme U_n varie entre 1 et -1, prenons ϵ plus petit que $1 - (-1) = 2$, par exemple $\epsilon = \frac{1}{3}$.
Alors, $\forall n \geq 0$, $U_{2n} = 1$, par exemple, donc pour l finie, il y a deux possibilités : soit $|U_{2n} - l| > \frac{1}{3}$, soit $|U_{2n} - l| \leq \frac{1}{3}$.
1) Dans le premier cas, on a terminé et n_1 vaut $2n$.
2) Dans le deuxième cas, on a $|U_{2n} - l| \leq \frac{1}{3}$, donc $-\frac{1}{3} \leq l - U_{2n} \leq \frac{1}{3}$, ce qui implique que $\frac{2}{3} \leq l \leq \frac{4}{3}$. Alors, forcément, $|U_{2n+1} - l| = |-l-1| = |l+1| > \frac{5}{3} > \frac{1}{3} = \epsilon$. Nous pouvons donc poser $n_1 = 2n+1$.

Donc on a prouvé : il existe $\epsilon > 0 (\epsilon = \frac{1}{3})$, tel que pour tout $n \geq 0$, il existe $n_1 > n (n_1 = 2n \texttt{ ou } n_1 = 2n+1$, et $|U_{n_1} - l| > \epsilon$. Cela veut dire que U_n ne peut pas converger vers une limite finie l, quelle que soit l.

Feuille 5, exercice 10.) Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On pose $a = f(1)$.

1. $f(n) = f(1) + \ldots + f(1) = nf(1) = an$.
2. $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, donc $f(0) = 0 = 0a$.
3. $f(-n) + f(n) = f(0) = 0$, donc $f(-n) = -f(n)$.
4. $f(\frac{1}{q}) + \ldots + f(\frac{1}{q})$, q fois doit valoir $f(1)$. Donc $qf(\frac{1}{q}) = f(1)$, ce qui implique que $f(\frac{1}{q}) = \frac{a}{q}$.
5. $f(\frac{1}{q}) + \ldots + f(\frac{1}{q})$, p fois doit valoir $f(\frac{p}{q})$. Donc $pf(\frac{1}{q}) = f(\frac{p}{q})$, ce qui implique que $f(\frac{p}{q}) = a\frac{p}{q}$.
6. Montrons tout d'abord le lemme suivant :

   Lemme 0.1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall h > 0, \exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{N}^*, \alpha \leq \frac{p}{q} \leq \alpha + h$

PREUVE. D'après Archimède, pour $x = 1, \forall h > 0, \exists q \in \mathbb{N}^*, qh > 1$. Alors, il existe forcément un entier dans l'intervalle $[q\alpha, q\alpha+qh[$, par exemple $p = E(q\alpha+qh)$. Ainsi, $q\alpha \leq p \leq q\alpha + qh$, ce qui prouve que $\alpha \leq \frac{p}{q} \leq \alpha + h$. □

7. Il nous resterait à prouver que $f(x) = ax$ pour tout réel non rationel. En fait cela n'est pas forcément vrai. Pour que cela soit vrai, nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire : soit que f est continue en un point α, soit que f est positive sur les réels positifs. Commençons par la première hypothèse, très difficile.

   (a) Hypothèse : f est continue en un point α. Donc,

   $$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - \alpha| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

      i. Calculons d'abord $f(\alpha)$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, pas de problème, c'est déjà fait. Sinon, pour un ϵ donné, posons $h = \min\{\eta; \frac{\epsilon}{2a}\}$.
      Alors, le lemme nous dit qu'il existe p et q tels que $\alpha \leq \frac{p}{q} \leq \alpha + h$.
      Donc, pour $x = \frac{p}{q}$, forcément, $|f(\frac{p}{q}) - f(\alpha)| \leq \frac{\epsilon}{2}$, ce qui veut dire que $|a\frac{p}{q} - f(\alpha)| \leq \frac{\epsilon}{2}$, et donc $|a\frac{p}{q} - a\alpha + a\alpha - f(\alpha)| \leq \frac{\epsilon}{2}$.
      Ainsi $||a\alpha - f(\alpha)| - |a\frac{p}{q} - a\alpha|| \leq \frac{\epsilon}{2}$, avec la deuxième inégalité triangulaire. Donc, en particulier avec la majoration de gauche, on a $|a\alpha - f(\alpha)| \leq \frac{\epsilon}{2} + a|\frac{p}{q} - \alpha| \leq \frac{\epsilon}{2} + ah \leq \frac{\epsilon}{2} + a\frac{\epsilon}{2a} = \epsilon$.
      On a donc prouvé que $\forall \epsilon > 0, |a\alpha - f(\alpha)| \leq \epsilon$; ce qui implique forcément que $f(\alpha) = a\alpha$!

      ii. Maintenant, pour x_0 quelconque dans $\mathbb{R}^*$, une démonstration similaire au lemme, nous prouve que $\forall h > 0, \exists p', q'$ tels que $\alpha \leq \frac{p'}{q'}x_0 \leq \alpha + h$.
      En outre, de même que précédemment, la continuité en α, nous prouve qu'il existe un η' tel que $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{\epsilon\alpha}{2x_0} = \epsilon'$, dès que $|x - \alpha| < \eta'$.
      Posons donc $h = \min\{\eta'; \frac{\epsilon'}{a}\}$. Alors, $|\frac{p'}{q'}x_0 - \alpha| < \eta'$, donc $|f(\frac{p'}{q'}x_0) - f(\alpha)| \leq \epsilon'$.
      D'où l'on tire $|\frac{p'}{q'}f(x_0) - \frac{p'}{q'}ax_0 + \frac{p'}{q'}ax_0 - a\alpha)| \leq \epsilon'$.
      Ainsi, avec la deuxième inégalité triangulaire, $|\frac{p'}{q'}f(x_0) - \frac{p'}{q'}ax_0| \leq \epsilon' + a|\frac{p'}{q'}x_0 - \alpha| = \epsilon' + ah \leq 2\epsilon' = \frac{\epsilon\alpha}{x_0}$. Ou encore, $|f(x_0) - ax_0| \leq \frac{q'}{p'}\frac{\epsilon\alpha}{x_0}$. Mais $\alpha \leq \frac{p'}{q'}x_0$, donc on a prouvé que $\forall \epsilon > 0, |f(x_0) - ax_0| \leq \epsilon$; ce qui implique forcément que $f(x_0) = ax_0$!

   (b) Hypothèse : $\forall x \geq 0,\ f(x) \geq 0$.

      i. Alors, $\forall x_1, x_2$ tels que $x_1 \geq x_2$, on a donc $x_1 = x_2 + u$, avec $u \geq 0$.
      Donc $f(x_1) = f(x_2) + f(u)$, mais $f(u) \geq 0$ par hypothèse, donc $f(x_1) \geq f(x_2)$.
      Ce qui prouve que f est croissante.

      ii. Pour pour x_0 quelconque dans $\mathbb{R}^*$, on utilise le lemme deux fois pour trouver p et q, puis p'' et q'' tels que $x_0 \leq \frac{p}{q} \leq x_0 + h$ et $x_0 - h \leq \frac{p''}{q''} \leq x_0$.
      Alors $a\frac{p''}{q''} = f(\frac{p''}{q''}) \leq f(x_0) \leq f(\frac{p}{q}) = a\frac{p}{q}$. Donc $ax_0 - ah \leq f(x_0) \leq ax_0 + ah$; ce qui veut dire que $|f(x_0) - ax_0| \leq ah$. En posant $h = \frac{\epsilon}{a}$, on obtient que forcément $f(x_0) = ax_0$!