UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

N° attribué par la bibliothèque

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

Spécialité : Mathématiques appliquées

préparée aux laboratoires TIMC-IMAG et LJK

dans le cadre de **l'Ecole Doctorale Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique**

présentée et soutenue publiquement

par

Anne BILGOT

le 11 octobre 2007

Méthodes locales d'identification de surfaces de discontinuité à partir de projections tronquées pour l'imagerie interventionnelle.

Directeurs de thèse : Laurent DESBAT et Valérie PERRIER

JURY

Jean-Pierre ANTOINE	Rapporteur
Anestis ANTONIADIS	Président
Laurent DESBAT	Directeur de thèse
Catherine MENNESSIER	Examinatrice
Valérie PERRIER	Directrice de thèse
Françoise PEYRIN	Rapporteuse

Ce travail a été financé par une allocation de recherche de la région Rhône-Alpes, puis par des contrats d'ATER, à l'Université Joseph Fourier et à l'IUFM de Grenoble.
Je remercie vivement ces établissements pour leur confiance.

Je remercie aussi l'entreprise Praxim, qui a parrainé cette thèse, et plus particulièrement Markus Fleute, Guillaume Champleboux, Antoine Leroy et Stéphane Lavallée.

Remerciements

Je tiens bien entendu à remercier mes deux directeurs de thèse, Valérie Perrier et Laurent Desbat : un grand merci à Valérie, pour avoir déclenché beaucoup de choses en pensant aux travaux de Matthias Holschneider, puis, ensuite, pour son aide technique, extrêmement précise et précieuse, son obstination, et ses encouragements tout au long de ces années ; un grand merci également à Laurent, pour son guidage éclairé de mes gestes mathématiques, pour son encadrement, joyeux et chaleureux, et pour sa compréhension et son appui lors de mes incursions hors parcours doctoraux bien balisés...

Je voudrais ensuite remercier les membres de mon jury : un grand merci à Françoise Peyrin et Jean-Pierre Antoine, pour avoir bien voulu rapporter toutes ces pages, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, pour leur relecture attentive, et pour les corrections qu'ils m'ont aidée à lui apporter. Merci également à Catherine Mennessier pour avoir accepté au pied levé de faire partie de mon jury, pour sa relecture extrêmement minutieuse, et pour les encouragements qu'elle m'a prodigués dans la dernière ligne droite. Un grand merci enfin à Anestis Antoniadis, pour ses conseils bibliographiques pendant ma thèse, pour sa présence à ma soutenance, et pour sa gentillesse et son admirable simplicité.

Depuis mars 2001 et le début de mon DEA, je travaille avec beaucoup de plaisir dans l'équipe GMCAO du laboratoire TIMC. Je voudrais tout d'abord remercier les membres de cette équipe que je côtoie depuis le premier jour. Un grand merci bien sûr à Jocelyne, pour l'ambiance sereine qu'elle sait instaurer dans l'équipe, et, plus personnellement, pour son soutien, solide, tenace, et tout en délicatesse. Merci à Philippe, pour son enthousiasme communicatif et revigorant (par exemple dans un GT de fin de thèse...), à Yohan, pour les agréables souvenirs de mon premier bureau partagé au labo, et à Mahnu, pour la sympathie qu'il m'a témoignée. Merci évidemment à Maribel, Chantal, Guy, Nourredine et Olivier pour leur soutien logistique tout au long de ces années, et pour la maintenance quasi-personnalisée d'équipements informatiques d'époques désormais révolues... et un grand merci enfin à Corinne pour plein de raisons, dont sa disponibilité et sa gentillesse.

Merci ensuite à tous ceux qui viennent d'arriver, sont déjà partis, ou sont encore là pour quelque temps :

- *à Sandrine, évidemment : un gros gros merci pour tous nos chouinages ©, pour nos élans artistiques et littéraires sur tableau blanc, pour nos activités (plus ou moins) culturelles, voire horticoles (ah, Thérèse...), etc., etc., etc. (oui, UFLF) ;*
- *à ses prédécesseurs dans la rubrique "colocataires" : Vincent, Micha, et, bien sûr, Elise (sans qui, je ne l'oublie pas, Thérèse ne serait pas Thérèse) ;*
- *à mes compagnons de labo de la première (ou de la deuxième) heure : Catherine (sans qui Thérèse ne serait pas, tout simplement), Christophe, Maud, Adriana, Juan Carlos, Sylvain, Loïc, Thierry, Pierre, Matthieu C.,... et évidemment, un très grand merci à l'inégalable Franz (son meuble à biblio, ses prises de position courageuses sur les breuvages japonais, ses maximes, etc....)*

– *à tous ceux qui m'ont accompagnée et soutenue dans les derniers mois de rédaction : Yannick, Alexandre et son épatante galerie de cellules, François, Céline, les Hommes des Canettes (Olivier, Claudio, Sébastien), Nabil, Fabien, Matthieu N., Ziad, Bénédicte, Joe, Jonathan, Christophe... sans oublier Bruno, précieux sauveteur d'ordinateurs.*

Je n'oublie pas non plus ma facette LMC : merci à Julie, Jean-Baptiste, Céline ... et évidemment, un gros merci à Binôme, alias Olivier, pour tous nos posters et autres joyeuses péripéties...

Je tiens également à remercier toutes les personnes avec qui j'ai eu le plaisir de faire de l'enseignement pendant ces années de thèse. Un très grand merci à Denise Grenier, pour ses conseils, si précieux, en particulier dans mes premières heures de TD, ainsi que pour son appui sans faille et sa présence dans les années qui ont suivi. Merci également à Claude Moser et Gérard Gerdil-Margueron, pour m'avoir accordé et renouvelé leur confiance à l'IUFM, et permis ainsi, entre autres, de terminer ma thèse. Merci enfin à tous ceux qui m'ont chaleureusement accueillie à l'IUFM : je pense notamment à Geneviève, Marie-Claire et Catherine, qui ont été vraiment formidables avec moi, mais aussi à André, Brigitte, Michèle, Hélène, Angèle, Isabelle, Sophie, Laure, Henri-Claude, Claude, Philippe, Hamid, Laurent, Zsolt, Eric, Michel, Gérard L., Gérard Y., ... : travailler avec vous tous a été un véritable plaisir ! Enfin, une mention spéciale pour ma deuxième Sandrine, rencontrée à l'IUFM, et devenue essentielle depuis : merci, merci, merci !

Je glisse ainsi petit à petit vers mon autre monde... Merci à Virginie, pour Tout. Un merci joyeux et troupier à Sébastien. Des mercis primesautiers à mes indéfectibles Fauriéliens : à l'indispensable Roland, à Claire, à Anne & Cédric, à Céline & Lionel, à Iryna & Francis (vive l'Altiligérie, au fait), à l'inénarrable Laurent L'Hormois, et à la (très) jeune génération. Un grand merci aussi à Angélique, ainsi qu'à la plus cybernétique de mes anciennes profs de français, pour leur réconfortante présence mailistique ou téléphonique. Merci enfin à mes soutiens locaux : à Katy, à Anne-Sophie, exemplaire à mes côtés dans la dernière ligne droite, à Claire, et à tous les joyeux Vizillois.

Ma famille, enfin : un énorme Merci, naturellement, à mes parents et à mes grands-parents, qui ont, entre autres, toujours tout fait pour que tout soit simple, serein, et confortable ; un gros merci aussi à Séverine, ma petite soeur (il n'y aura nulle trace ici de quelconques surnoms affectueux, rassure-toi), et à Christiane, pour son perpétuel soutien (jusqu'au matin du jour J !). Merci enfin à la famille Tournier, toutes générations confondues.... et bien sûr, merci à toi, Laurent. Au millup'e !

Table des matières

Notations utilisées dans le manuscrit **v**

1 Introduction **1**
1.1 Bref aperçu des différentes techniques en imagerie médicale . . . 1
1.2 L'imagerie par rayons X . . . 2
1.2.1 La découverte des rayons X . . . 2
1.2.2 Leur nature électromagnétique . . . 3
1.2.3 La formation des rayons X . . . 3
1.2.4 Interaction des rayons X avec la matière vivante . . . 4
1.2.5 Interaction des rayons X avec les détecteurs . . . 6
1.2.6 Les différentes images fournies par les rayons X . . . 8
1.3 Utilisation de l'imagerie par rayons X au bloc opératoire : l'exemple du vissage pédiculaire 10
1.3.1 Les Gestes Médico-Chirurgicaux Assistés par Ordinateur . . . 10
1.3.2 Le vissage pédiculaire : description . . . 11
1.3.3 Technique conventionnelle et enjeux de la chirurgie assistée par ordinateur pour cette intervention . . . 12
1.3.4 Navigation chirurgicale par différentes techniques : l'exemple du vissage pédiculaire assisté par ordinateur . . . 15
1.4 Contexte et plan de thèse . . . 23

2 Tomographie 2D **27**
2.1 La transformée de Radon : définitions et propriétés fondamentales . . . 27
2.1.1 Définition . . . 27
2.1.2 Propriétés de la fonction $\mathcal{R}f$ . . . 33
2.1.3 Propriétés de l'opérateur $\mathcal{R}$ . . . 35
2.2 Inversion de la transformée de Radon à partir de données globales . . . 41
2.2.1 Un problème inverse . . . 41
2.2.2 Inversion de la transformée de Radon par rétroprojection filtrée . . . 44
2.2.3 Inversion par filtrage de la rétroprojection des projections . . . 53
2.2.4 Inversion à l'aide de la décomposition en valeurs singulières . . . 53
2.2.5 Vers l'implémentation : Echantillonnage des données . . . 64
2.2.6 Discrétisation de la formule de rétroprojection filtrée . . . 75
2.3 Dépendance aux données - Problèmes à données tronquées . . . 78
2.3.1 Description des problèmes . . . 78
2.3.2 Analyse micro-locale et singularités . . . 85
2.4 Des méthodes locales existantes en tomographie . . . 94
2.4.1 Reconstruction par rétroprojection des dérivées des projections . . . 94
2.4.2 Λ-tomographie . . . 97
2.4.3 Tomographie pseudo-locale . . . 107
2.4.4 Reconstruction locale par rétroprojection filtrée . . . 110

3 Représentations multiéchelles de la transformée de Radon 119
3.1 La transformée en ondelettes . . . 119
3.1.1 Transformée en ondelettes continue . . . 119
3.1.2 Transformée en ondelettes presque continue . . . 127
3.1.3 Repères (ou frames) d'ondelettes . . . 129
3.1.4 Analyse multirésolution et bases orthonormées d'ondelettes . . . 130
3.2 Inversion de la transformée de Radon par des approches par ondelettes de type rétroprojection filtrée (FBP) . . . 143
3.2.1 Lemmes techniques . . . 143
3.2.2 Inversion de la transformée de Radon par des approches par ondelettes de type rétroprojection filtrée (FBP) : cas où les données sont complètes . . . 146
3.2.3 Inversion de la transformée de Radon par des approches par ondelettes de type rétroprojection filtrée (FBP) : adaptation au cas où les données sont tronquées . . . 154
3.3 Inversion de la transformée de Radon bruitée par méthodes multiéchelles . . . 171
3.3.1 Concept fondateur : la transformée en ondelettes-vaguelettes . . . 171
3.3.2 Transformée en vaguelettes-ondelettes . . . 182
3.3.3 La transformée en ridgelets et ses liens avec la transformée de Radon . . . 183
3.3.4 Analyse en curvelets . . . 186
3.3.5 Bandelettes . . . 188
3.4 Récapitulatif . . . 188

4 Une nouvelle approche de l'inversion locale de la transformée de Radon par ondelettes 191
4.1 Extension de la transformée en ondelettes directionnelle aux distributions, et formules de reconstructions associées . . . 192
4.1.1 Extension de la transformée en ondelettes . . . 192
4.1.2 Extension de la formule de reconstruction continue et de la condition d'admissibilité associée . . . 193
4.1.3 Discrétisation exacte . . . 199
4.2 Application à la transformée de Radon . . . 199
4.2.1 La transformée de Radon : une transformée en ondelettes généralisée . . . 200
4.2.2 Formule d'inversion continue de la transformée de Radon . . . 200
4.2.3 Discrétisation de la formule d'inversion . . . 203
4.2.4 Choix d'une ondelette de reconstruction admissible pour la transformée de Radon 205
4.2.5 Tests de reconstruction à partir de données globales . . . 213
4.3 Formule d'inversion locale de la transformée de Radon . . . 217
4.3.1 Le problème intérieur . . . 217
4.3.2 Tomographie 2D à angle limité . . . 223
4.3.3 D'autres problèmes locaux . . . 230
4.3.4 Liens entre notre méthode et les méthodes existantes . . . 234

5 Méthode géométrique 235
5.1 Reconstruction de surfaces par recalage élastique . . . 235
5.1.1 Le modèle statistique de surface de vertèbre . . . 235
5.1.2 Algorithme de recalage du modèle déformable avec les images fluoroscopiques. . 236
5.1.3 Mise en évidence de l'importance de l'initialisation du modèle . . . 242
5.2 Le problème de la détection des contours dans les images radiographiques . . . 243
5.2.1 Difficultés inhérentes aux radiographies de vertèbres et définition d'un cahier des charges de la méthode de segmentation à développer . . . 243
5.2.2 Contours : premières définitions et méthodes de détection simples associées . . . 244
5.2.3 Détecteur de contours multi-échelles . . . 248

5.2.4 Détection de contours par une méthode de contours actifs modifiée : méthode GVF250
5.3 Tests de reconstruction prenant en compte l'étape de détection de contours 252
5.3.1 Validation de l'intégration de l'application dans la plateforme Surgetics sur une vertèbre sèche 253
5.3.2 Estimation de l'erreur de reconstruction sur un fantôme de vertèbre plongée dans un environnement 254

6 Conclusion-Perspectives 259

A Transformations de Fourier 261

B Fonctions spéciales 265

Notations utilisées dans le manuscrit

On note en gras les ensembles de nombres : $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.
Pour tout z appartenant à $\mathbf{C}$, on note $\overline{z}$ son conjugué.

Paramétrage du plan

Le plan $\mathbf{R}^2$ est muni du produit scalaire usuel $\cdot$ et de la norme associée $|.|$. Dans ce plan, on définit

- le disque unité $\mathbf{\Omega} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2; |x| \leq 1\}$;
- la sphère unité $\mathbf{S}^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2; |x| = 1\}$

L'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ étant fixé, on note

- $\mathbf{\Theta}$ le vecteur de $\mathbf{S}^1$ de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$;
- $\mathbf{\Theta}^\perp$ le vecteur de $\mathbf{S}^1$ de coordonnées $(\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

Ainsi définis, les vecteurs $(\mathbf{\Theta}, \mathbf{\Theta}^\perp)$ forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^2$, par rapport à laquelle on peut définir un nouveau système de coordonnées :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2,\ \exists!(s,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} |\ \mathbf{x} = s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp \text{ (avec } s = \mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta},\ t = \mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}^\perp)$$

Enfin, dans le plan orienté $\mathbf{R}^2$ muni du repère canonique, pour $\theta \in [0, 2\pi[$, on notera r_θ la rotation d'angle θ sur $\mathbf{R}^2$.

Opérateurs sur les fonctions

Pour une fonction f définie sur $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, on notera :

- f_σ la fonction $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mapsto f(-\mathbf{x})$;
- f_a ($a > 0$) la fonction obtenue en appliquant une dilatation d'un facteur a suivie de f :

$$f_a : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mapsto f_a(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{a}^n} f\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right)$$

- $f_{\mathbf{b}}$ ($\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$) la fonction obtenue en appliquant la translation de vecteur $\mathbf{b}$ suivie de f :

$$f_{\mathbf{b}} : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mapsto f_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = f\left(\mathbf{x} - \mathbf{b}\right)$$

- f_θ ($\theta \in [0, 2\pi[$) la fonction obtenue en appliquant la rotation d'angle $-\theta$ suivie de f :

$$f_\theta : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mapsto f_\theta(\mathbf{x}) = f\left(\mathrm{r}_{-\theta}\mathbf{x}\right)$$

On utilisera aussi ces opérateurs avec les notations suivantes :

- $\mathrm{D_a}$ pour l'opérateur de dilatation d'un facteur a : $\mathrm{D_a} : f \mapsto f_a$.
- $\mathrm{T_b}$ pour l'opérateur de translation d'un vecteur $\mathbf{b}$: $\mathrm{T_b} : f \mapsto f_{\mathbf{b}}$;
- R_θ pour l'opérateur de rotation d'angle $-\theta$: $\mathrm{R}_\theta : f \mapsto f_\theta$.

Enfin, pour un opérateur linéaire continu T entre deux espaces de Hilbert, on notera T^* son opérateur adjoint.

Espaces fonctionnels

On note $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ $(n \geq 1)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable définies sur $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire

$$< f, g >= \int_{\mathbf{R}^n} \overline{f(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

et de la norme associée

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbf{R}^n} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}}$$

De la même façon, on note $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R})$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable définies sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ muni du produit scalaire

$$[f, g] = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \overline{f(\mathbf{\Theta}, s)} g(\mathbf{\Theta}, s) ds d\theta$$

On note $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^n)$ l'espace des fonctions de module intégrable définies sur $\mathbf{R}^n$.

On note $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ l'espace de Schwartz sur $\mathbf{R}^n$: une fonction f appartient à l'espace de Schwartz si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et si f et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide.

Transformées

Dans ce manuscrit, nous manipulons les transformées suivantes :

- pour une fonction f appartenant à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$, on note $\mathcal{R}f$ sa transformée de Radon ;

- pour une fonction f appartenant à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^n)$ $(n \geq 1)$, on note $\mathcal{F}(f)$ ou $\hat{f}$ sa transformée de Fourier, normalisée de la manière suivante :

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbf{R}^n,\ \mathcal{F}(f)(\mathbf{k}) = \hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

- pour une ondelette en dimension 1 ψ, et pour une fonction f appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, on note $\mathrm{W}^\psi f(a, b)$ la transformée en ondelettes de f par rapport à ψ calculée au voisinage de l'abscisse $b \in \mathbf{R}$ et à l'échelle $a > 0$;

- pour une ondelette en dimension 2 Ψ, et pour une fonction f appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$, on note $\mathrm{W}^\Psi f(a, \mathbf{b}, \theta)$ la transformée en ondelettes de f par rapport à Ψ calculée au voisinage du point $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$, à l'échelle $a > 0$, et dans la direction $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1$.

Chapitre 1

Introduction

Dans ce manuscrit, nous présentons un travail autour de méthodes de reconstruction d'images de type scanner, destinées au guidage du chirurgien, donc sous les contraintes inhérentes à une acquisition de données au bloc opératoire : les algorithmes classiques de reconstruction ne sont plus adaptés. Nous présenterons les objectifs de notre travail à la fin de ce premier chapitre, mais auparavant, nous allons décrire son contexte : l'imagerie médicale par rayons X, et son application au guidage du geste chirurgical, avec l'exemple du vissage pédiculaire assisté par ordinateur.

Dans ce chapitre, nous nous appuyons essentiellement sur [109, 6, 61], ainsi que sur les compte-rendus annuels de la conférence RSNA (Radiology Society of North America) disponibles sur le site de la Société Française de Radiologie, et sur les sites des principaux industriels du domaine : General Electrics, Siemens, Philips, Toshiba, Praxim, etc.

1.1 Bref aperçu des différentes techniques en imagerie médicale

L'*imagerie médicale* recouvre un ensemble de techniques permettant de visualiser les structures internes de l'organisme humain, pour en donner une représentation qui peut être anatomique, ou fonctionnelle (pour visualiser alors le fonctionnement d'un organe, d'un métabolisme).
Toutes ces méthodes reposent sur un principe commun : on mesure la réponse des tissus à une exposition à un phénomène physique. Selon la méthode employée, les tissus discriminés ne sont pas les mêmes : deux tissus peuvent répondre de la même manière à une excitation, mais de manière différente à une autre ; autrement dit, l'information portée par une image médicale dépend du phénomène physique utilisé.

Un des plus anciens de ces phénomènes physiques consiste à utiliser une radiation bien particulière : les rayons X, auxquels est exposé l'organisme à explorer. C'est cette *modalité* d'imagerie qui nous intéresse dans ce manuscrit, et, comme nous l'expliquerons ensuite, on mesure alors l'interaction entre ce rayonnement et les tissus, ou plus précisément, on mesure l'atténuation du faisceau de rayons X lors de la traversée de l'organisme ; les niveaux de gris que l'on visualise ensuite sur une radiographie traduisent le niveau d'absorption (ou d'opacité) des tissus face aux rayons X. On dit que l'imagerie par rayons X est une imagerie par *transmission*. Les radiographies sont des *images directes* : elles traduisent directement un phénomène physique, par opposition aux images scanner, qui, elles, sont *reconstruites*, selon un procédé que l'on expliquera plus loin. Les images obtenues par rayons X sont en particulier bien adaptées à la visualisation des structures osseuses.

Parmi les autres techniques d'imagerie médicale, les plus utilisées sont les suivantes :

– l'échographie : des ondes acoustiques (ultrasons) sont envoyées sur l'organisme, et lorsqu'un obs-

tacle est rencontré, une partie des ondes est réfléchie (on parle d'*échos*), tandis que l'autre partie est transmise ; la proportion d'ondes réfléchie est liée à la différence d'*impédance acoustique* à l'*interface* des deux milieux, qui est un paramètre directement lié à la densité de chacun des deux milieux ; c'est donc une imagerie par *réflexion*.

– l'imagerie nucléaire : c'est une imagerie fonctionnelle, c'est-à-dire qu'elle permet d'observer l'activité des cellules ; on peut ainsi par exemple distinguer les cellules cancéreuses des cellules saines. Le principe est le suivant : on injecte dans l'organisme des molécules radioactives, artificielles, appelées traceurs, qui sont conçues pour aller se fixer prioritairement sur les organes que l'on veut étudier, ou sur les cellules qui sont le siège d'un phénomène que l'on veut localiser.
On utilise principalement deux types de molécules radioactives : des molécules qui se désintègrent en émettant un autre type de rayonnement que les rayons X, les rayons dits rayons γ ou bien des molécules qui se désintègrent en émettant des particules appelées positons. Dans le premier cas, le rayonnement γ émis est recueilli par un détecteur appelé γ caméra, fournissant des images directes, appelées scintigraphies, ou permettant, selon le principe du scanner pour les rayons X, d'obtenir des images reconstruites (imagerie TEMP : tomographie d'émission monophotonique, SPECT en anglais). Dans le deuxième cas, les positons émis lors de la désintégration sont émis par paires, dans des directions colinéaires mais opposées, et sont recueillis par des détecteurs diamétralement opposés (*en coïncidence*) : c'est l'imagerie TEP : Tomographie par émission de Positons. De plus en plus, ce type de dispositif est couplé à des scanners ; on parle alors de PET-Scan, et ces appareils permettent de coupler une image morphologique, précise, à une image restituant une information fonctionnelle. On parle d'imagerie par *émission*.

– l'Imagerie par Résonance Magnétique : pour résumer grossièrement, on soumet l'organisme à un champ magnétique ; certains atomes sont excités, ce qui crée une perturbation du champ magnétique ; le temps de relaxation suivant cette excitation, et permettant de revenir à l'état d'équilibre, est caractéristique de la teneur en hydrogène des tissus (donc en eau), et permet de discriminer les tissus observés. Ce sont des images en coupe, reconstruites.

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons aux rayons X. On connaît l'utilité des rayons X pour le diagnostic de pathologies, à travers les radiographies et les examens scanners. On connaît également le rôle thérapeutique que peuvent avoir les rayons X : la radiothérapie, où les rayons X sont utilisés dans des gammes d'énergie beaucoup plus fortes pour détruire des cellules cancéreuses. Ici, nous allons nous concentrer sur un autre rôle des rayons X : ceux-ci peuvent en effet également permettre de disposer d'images qui permettent de *guider* le chirurgien au bloc opératoire, autrement dit de *contrôler* le geste chirurgical par l'image. On parle alors d'*imagerie interventionnelle*.

1.2 L'imagerie par rayons X

1.2.1 La découverte des rayons X

Les rayons X ont été mis en évidence de manière fortuite en 1895 par Wilhelm Conrad Röntgen, un physicien allemand (à cette même époque, en France, Henri Becquerel et Pierre et Marie Curie mettaient en évidence de leur côté la radioactivité naturelle de l'uranium et du radium, construisant ainsi les bases de l'imagerie nucléaire). Röntgen étudiait alors les effets du passage d'un courant électrique dans un tube en verre, quand il constata qu'un écran recouvert d'une feuille de platinocyanure de baryum situé à proximité du lieu de l'expérience devenait fluorescent à chaque fois qu'une décharge électrique avait lieu dans le tube. En plaçant des obstacles entre le tube et l'écran, il constata que ce rayonnement était capable de traverser aussi bien le bois, les métaux que la chair mais qu'une mince feuille de plomb ou de platine suffisait à l'arrêter. Ce type de rayonnement était alors inconnu : Röntgen publia le texte *A*

propos d'une nouvelle espèce de rayons, et appela le rayonnement *rayons X*. Il réalisa la radiographie de la main de sa femme, dont l'image est restée célèbre ("une main humaine dont on ne voit que les os, la chair étant invisible"). Cette découverte fut couronnée en 1901 par le premier Prix Nobel de Physique.

1.2.2 Leur nature électromagnétique

Depuis la mise en évidence de l'existence des rayons X, les propriétés suivantes ont été établies : les rayons X sont des ondes électromagnétiques, et à ce titre :

1. (aspect ondulatoire) ils se déplacent en ligne droite, à une vitesse constante au sein d'un milieu homogène, avec une amplitude sinusoïdale, caractérisée par sa fréquence ν, ou sa longueur d'onde λ ;
2. (aspect corpusculaire) chaque vibration peut être considérée comme un photon transportant un quantum d'énergie $E = h\nu$, où h désigne la constante de Planck.

La figure (1.1) permet de positionner les rayons X par rapport aux autres types de rayonnements électromagnétiques connus : pour qu'une radiation soit utile en imagerie médicale, il faut que l'organisme la laisse pénétrer, et qu'elle puisse le traverser sans être totalement atténuée : c'est le cas pour les rayons X, qui sont d'énergie plus forte que la lumière visible, les infra-rouges ou les ondes radios. Plus leur énergie est forte, plus ils ont d'effets sur les organismes traversés (comme on le redira plus bas, ce sont des rayonnements *ionisants*) ; ainsi, pour les rayons X, on peut utiliser des rayons dans différentes gammes d'énergie : les rayons d'énergie plus élevée sont utilisés en radiothérapie, les autres pour des images de diagnostic.

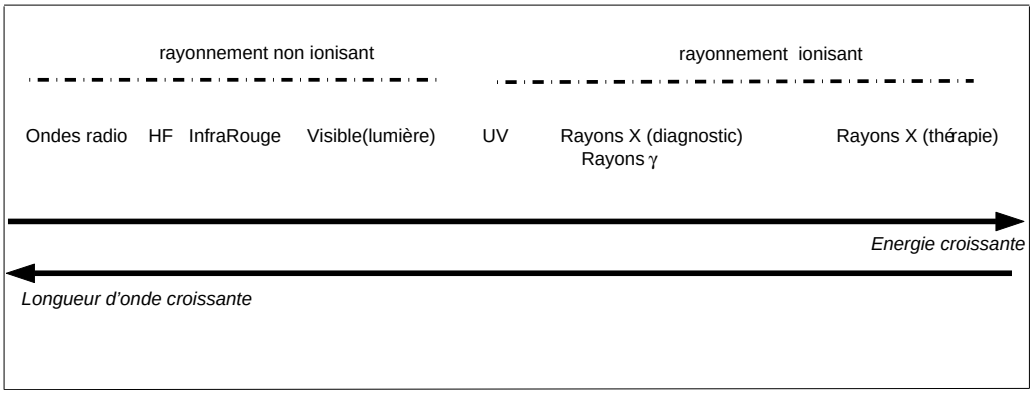


FIG. 1.1 – La place des rayons X par rapport aux différents types de rayonnements électromagnétiques

1.2.3 La formation des rayons X

La formation des rayons X repose sur le bombardement d'une cible métallique par un faisceau d'électrons préalablement accélérés et portés à haute énergie : les électrons, attirés par les noyaux des atomes métalliques, sont ralentis, et l'énergie cinétique ainsi perdue est rayonnée sous forme d'énergie électromagnétique (photons) : les rayons X. Un spectre polyénergétique continu est ainsi émis. Par filtrage, seuls les photons de haute énergie (dits *rayons durs*) sont alors conservés : les autres (*rayons mous*), de faible énergie, seraient arrêtés par les premiers tissus rencontrés et n'auraient pour effet que d'augmenter la dose résiduelle délivrée au patient.
Ce bombardement a lieu au sein d'un tube électronique, dans lequel on crée une différence de potentiel. On peut à ce niveau contrôler la gamme d'énergie des photons qui vont être ensuite rayonnés.

1.2.4 Interaction des rayons X avec la matière vivante

Le principe de base de l'imagerie par rayons X est le suivant : les rayons X sont formés par des photons d'énergie suffisamment forte pour pénétrer et traverser les organismes vivants, mais qui sont néanmoins atténués lors de cette traversée ; cette atténuation est caractéristique des tissus rencontrés, et offre donc un moyen de discriminer les tissus.

L'atténuation des rayons X (c'est-à-dire de l'intensité des photons) à la traversée de la matière est due essentiellement à deux phénomènes qui affectent une partie des photons du faisceau :

- *l'effet photoélectrique*, qui est un phénomène d'*absorption* : en présence d'un photon X, un électron périphérique d'un des atomes du milieu est arraché, et vient se combiner au photon : le photon est absorbé. L'atténuation du faisceau de photons ainsi induite est proportionnelle à la densité électronique du milieu, qui est elle-même fortement liée à la densité du milieu. L'effet photoélectrique s'avère donc plus marqué dans les matériaux lourds, comme les structures osseuses.

- *l'effet Compton* est un phénomène de *diffusion* : la perte d'énergie du photon incident n'est pas totale, mais provoque une déviation du photon de sa trajectoire initiale ; on dit qu'il est diffusé. De fait, le rayonnement émergeant de l'organisme est constitué de deux rayonnements : un premier, colinéaire au faisceau initial - on parle de rayonnement primaire - et un second, dit secondaire, résultat de la diffusion, dont on ne contrôle pas la direction d'émergence. C'est le problème dit *du diffusé*, qui entraine sur les images des pertes de contraste, et expose le personnel médical environnant et les organes du patient hors du champ à des radiations indésirables. Ce phénomène est prépondérant dans les matériaux légers (comme l'eau).

La combinaison de ces deux effets est matérialisée par un nombre μ, appelé *coefficient linéique d'atténuation du milieu*. La valeur du coefficient μ dépend de plusieurs paramètres, liés au milieu (comme par exemple le numéro atomique, sa densité électronique), comme à l'énergie du faisceau incident (contrôlée par l'opérateur). On utilise comme coefficient d'atténuation de référence celui de l'eau. Quelle que soit l'énergie du faisceau incident, on peut classer les différentes types de tissus classiquement rencontrés de la manière suivante (par coefficient d'atténuation croissant) :

$$\underset{0}{\xrightarrow{\text{air} \quad \text{poumons} \quad \text{graisse} \quad \text{eau} \quad \text{tissus mous} \quad \text{vaisseaux} \quad \text{os}}}$$

On peut ensuite exprimer l'atténuation d'un faisceau de rayons X : l'atténuation subie par un faisceau *monochromatique* (c'est à dire monoénergétique) à la traversée d'un objet non homogène - plongé dans un milieu transparent - et caractérisé en chacun de ses points $\mathbf{x}$ par le coefficient d'atténuation $\mu(\mathbf{x})$, est communément modélisée par la *loi de Lambert-Beer*, qui s'énonce ainsi : si l'on note I_0 l'intensité du faisceau incident sur l'objet selon une droite L donnée, et I_d l'intensité du faisceau émergeant de l'objet selon cette même direction, alors on a la relation :

$$\boxed{\frac{I_d}{I_0} = e^{-\int_{\mathbf{x}\in L} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}} \tag{1.1}$$

Cette loi empirique est motivée par l'expérience simple suivante : on considère K objets identiques homogènes, de coefficient d'atténuation uniforme μ, disposés le long d'un même axe, et traversés les uns après les autres par un même faisceau de photons X, d'intensité initiale I_0. On note r le nombre par lequel est divisée l'intensité du faisceau quand le faisceau a traversé la longueur d'un objet. Alors

- l'intensité du faisceau à la sortie du premier objet est $\frac{I_0}{r}$;

– l'intensité du faisceau à la sortie du deuxième objet est $\frac{I_0}{r^2}$;

– et, en itérant, l'intensité du faisceau à la sortie du $K^{\text{ème}}$ et dernier objet est $\frac{I_0}{r^K}$.

Dans ce cas particulier, on a la relation $\frac{I_d}{I_0} = \frac{1}{r^K} = e^{-K \ln r}$, et on voit donc apparaître la relation exponentielle qui lie l'atténuation du faisceau de rayons X à la longueur parcourue par ce faisceau. En réalité, les faisceaux de photons X sont polychromatiques, et on a alors la loi d'atténuation suivante, prenant en compte la gamme des longueurs d'onde λ présentes au sein du faisceau :

$$I_d = \int_\lambda I_0(\lambda) e^{-\int_L \mu(x,\lambda) dx} d\lambda$$

Cependant, en pratique, les faisceaux de rayons X utilisés sont quasi-monochromatiques, et on a coutume de faire l'hypothèse que la fonction d'atténuation ponctuelle du milieu est indépendante de l'intensité du faisceau incident. On se place alors dans le cadre de la loi de Lambert-Beer énoncée en (1.1), ce qui permet d'écrire :

$$\int_{\mathbf{x} \in L} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\ln\left(\frac{I_d}{I_0}\right)$$

Le premier terme de cette égalité peut s'écrire à l'aide d'un outil mathématique connu par ailleurs : on utilise comme modèle mathématique de l'atténuation d'un faisceau le long d'une direction donnée une transformée appelée *transformée de Radon* [1], dont voici une première définition (nous adopterons un point de vue plus formel dès le chapitre suivant) :

Définition 1.2.1
Soit μ une fonction intégrable du plan, et L une droite du plan. On appelle transformée de Radon de la fonction μ le long de la droite L la quantité

$$\mathcal{R}\mu(L) = \int_{\mathbf{x} \in L} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Dans le cadre de la loi de Lambert-Beer, on a alors :

$$\mathcal{R}\mu(L) = -\ln\left(\frac{I_d}{I_0}\right)$$

Ionisation de la matière et dose de rayons X
L'atténuation que connaît un faisceau de rayons X à la traversée d'un objet témoigne d'une interaction avec la matière : on dit que le rayonnement est *ionisant*, ou que la matière est *ionisée*, avec pour elle des effets biologiques d'autant plus nocifs que l'énergie du rayonnement est élevée.

La matière peut être ionisée sous l'effet d'un rayonnement dès que l'énergie de ce rayonnement est supérieure à l'énergie de liaison des électrons du milieu. Les cellules vivantes sont affectées au niveau de l'ADN et des enzymes, par rupture des liaisons hydrogène, ce qui perturbe les mécanismes de transcription et de duplication, donc de reproduction cellulaire.

Pour le diagnostic, on utilise des rayons X de basse énergie (de l'ordre du kilo-électron-volt), alors que pour la thérapie, où l'on tire profit de cet effet ionisant, l'énergie est de l'ordre du méga-électron-volt.
Les rayons X ont, à forte dose, des effets déterministes connus (moelle épinière, stérilité,..). A faible dose, les effets ne sont pas systématiques, mais on reconnait des risques de malformation du foetus chez la femme enceinte. Des risques de cancers radio-induits, consécutifs à des expositions répétés, ont également été mis en évidence. Pour les patients, les doses absorbées lors des examens de diagnostic

[1] introduite en 1917 par J. Radon, mathématicien hongrois

traditionnels, les risques sont négligeables (sauf pour la femme enceinte). On cherche toutefois à les minimiser dans la mesure du possible, mais la cible des programmes de radioprotection et de réduction de la dose délivrée visent avant tout le personnel médical, exposé de manière régulière à ces radiations.

1.2.5 Interaction des rayons X avec les détecteurs

Les détecteurs ont pour fonction de convertir l'énergie portée par les faisceaux de rayons X sous une forme visible par l'oeil. Comme nous l'expliquerons plus loin, les images par rayons X peuvent être obtenues dans deux contextes : des images statiques, et des images dynamiques. Les détecteurs de rayons X associés sont alors différents.

Détecteurs de rayons X pour images statiques

Les détecteurs de radiographie les plus communs sont formés d'un couple entre un écran et un film, enfermés dans une boîte, appelée *cassette*. L'écran, dit *écran renforçateur*, a pour rôle d'amplifier le signal porté par le faisceau de rayons X (ou, autrement dit, de réduire la dose de rayons X à utiliser pour obtenir finalement le même noircissement). Il contient du phosphore, qui, pour résumer, transforme les photons X reçus en photons lumineux (on dit qu'il y a un phénomène de *fluorescence* : sous l'action des photons X, les particules de phosphore absorbent l'énergie du photon, et sont excitées ; le retour à l'état d'équilibre se fait par émission d'un photon lumineux). Les photons lumineux émis vont ensuite frapper un film photographique classique, c'est-à-dire recouvert d'une émulsion sensible aux photons lumineux. L'énergie des photons lumineux est ainsi transformée en dépôt argentique sur le film photographique, recouvert d'une couche sensible de bromure d'argent : sous l'effet des photons X, les ions Br^-, excités, se combinent avec les ions Ag^+ pour former de l'argent métal. La quantité d'argent formée est proportionnelle à l'intensité captée. On obtient alors une image latente (un négatif), qu'il faut ensuite développer.

Depuis plusieurs années, les efforts de recherche se concentrent sur l'évolution vers des détecteurs numériques : l'image obtenue n'est plus figée sur un film, mais est numérisée, et à ce titre, est transmissible, archivable, non périssable et non figée (on peut la traiter pour la rendre plus pertinente, jouer sur la dynamique pour réhausser telle ou telle structure,..). Globalement, on constate que le nombre d'examens nécessaires au diagnostic est moindre ; de plus, la sensibilité de détection des rayons X est accrue par rapport au couple écran-film, et on peut donc travailler dans des gammes d'intensité plus faible : la dose reçue par le patient est réduite. Malgré tous ces avantages, l'évolution vers le numérique demeure assez lente : en France, en 2003, encore 60% des examens de radiographie étaient effectués avec un film. Il faut dire que la technologie numérique reste coûteuse (155 000 euros en 2002 pour un détecteur plan statique), et ne s'intègre pas facilement dans le matériel d'imagerie existant. Un autre problème, néanmoins en voie de résorption, est celui de la résolution spatiale des images qu'elle délivre : elle est encore jugée insuffisante pour certains examens, notamment les mammographies.

La transition vers l'imagerie numérique en radiographie a été amorcée avec l'apparition d'écrans radioluminescents à mémoire (dits ERML), dans des dispositifs dits de « radiologie informatisée » (CR : computed radiography). Les photons X sont recueillis sur une plaque de phosphore, qui remplace les écrans traditionnels dans la cassette, puis la plaque est scannée par un faisceau laser pour convertir l'image latente en signal électrique, qui est numérisé.

De nouveaux détecteurs sont ensuite apparus à la fin des années 90 : les capteurs plans (flat panel) ; dans certains, dits à *conversion indirecte*, les photons X rencontrent d'abord une couche de matériau fluorescent (par exemple du iodure de césium) à travers laquelle ils sont convertis en photons lumineux, puis rencontrent des récepteurs de lumière - photo-diodes, par exemple en silicium amorphe - qui convertissent la lumière en signaux électriques, lesquels sont conduits vers une matrice de transistors TFT (écran

à cristaux liquides). Dans ce type de dispositif, les photons lumineux, avant d'être convertis en signaux électriques, sont conduits dans des guides dans lesquels ils subissent de la diffusion et des réflexions, qui conduisent à une perte de sensibilité et de résolution. Dans d'autres détecteurs, dits à *conversion directe*, les photons X sont d'abord en contact avec une couche de matériau photoélectrique (sélénium amorphe), à la traversée de laquelle ils sont convertis directement, c'est-à-dire en une seule étape, en signaux électriques qui sont conduits vers une matrice de transistors TFT (écran à cristaux liquides).
Les principaux constructeurs sont Hologic, pour les détecteurs à conversion directe, et Canon, General Electrics, Varian, et Trixell, pour les détecteurs à conversion indirecte. Trixell est une entreprise née d'une collaboration entre Thalès, Philips et Siemens, implantée dans la région de Grenoble ; elle parraine ce travail de thèse, et occupe une place importante sur le marché international des capteurs plans (avec le capteur plan statique PIXIUM 4600).

Détecteurs utilisés pour l'imagerie dynamique avec des rayons X

Les détecteurs principalement utilisés pour réaliser des images dynamiques à l'aide de rayons X s'appellent des *amplificateurs de brillance* ; ils sont apparus juste après la seconde guerre mondiale. Ils permettent d'obtenir des images avec des doses de rayons X faibles, et sont capables de délivrer des séries d'images, voire des images « en continu » . Ils sont utilisés au bloc opératoire, dans des dispositifs appelés *fluoroscopes*, que nous présenterons plus bas. Ils sont formés d'un tube sous vide, dans lequel pénètrent les rayons X, qui frappent d'abord un écran au phosphore : des photons lumineux sont alors émis, puis frappent une « photo-cathode » , c'est-à-dire un dispositif qui émet des électrons quand il est frappé par la lumière. Les électrons ainsi émis sont alors soumis à une différence de potentiel, et focalisés, comme dans un système optique classique avec deux lentilles situées de part et d'autre d'un foyer, ils sont accélérés et vont alors frapper un nouvel écran au phosphore, de taille beaucoup plus petite (2,5 cm), ce qui va avoir pour effet de produire à nouveau des photons lumineux, mais cette fois-ci avec un rendement beaucoup plus élevé (le gain par rapport à un système écran-film peut aller jusqu'à 10000). Ceci a pour effet d'avoir des images beaucoup plus brillantes, avec en plus un temps d'exposition aux rayons X réduit (ce qui permet d'acquérir des images à une cadence plus élevée que dans les systèmes traditionnels). On peut alors recueillir l'image sur un film vidéo, ou sur une télévision, ou sur une caméra CCD (qui fournit une image numérique).

Le principal inconvénient des amplificateurs de brillance réside dans la qualité des images obtenues : le procédé d'amplification du signal lumineux conduit à des distortions dans l'image finale, qui s'en trouve déformée ; il faut mettre en place des procédures de correction de cette distortion (ces procédures utilisent une grille, dont on compare la géométrie réelle, parfaitement connue, à la géométrie visualisée sur l'image qu'en restitue l'amplificateur de brillance).

Comme pour l'imagerie statique, la tendance est au développement de détecteurs de radiologie numérique dynamiques. Par rapport aux amplificateurs de brillance, ils sont plus sensibles aux rayons X (donc permettent de délivrer une dose de rayons X moindre) ; ils présentent une meilleure résolution temporelle, et un meilleur contraste ; ils sont plus légers et fournissent donc des dispositifs d'imagerie plus ergonomiques ; leur résolution spatiale, à l'origine insuffisante, a été améliorée et est aujourd'hui à peu près similaire à celle des amplificateurs de brillance ; mais surtout, et là est leur principal avantage, ils fournissent des images qui ne présentent pas de distortion. En revanche, le gros inconvénient de ces détecteurs est qu'ils sont beaucoup plus coûteux que les amplificateurs de brillance (à l'achat et pour l'entretien), et comme leur conception pose des difficultés technologiques, les détecteurs dynamiques disponibles sont de taille limitée - ce qui motive, comme nous l'expliquerons plus tard, le travail sur les problèmes de reconstruction à données tronquées. Par exemple, le détecteur dynamique PIXIUM 4700 de Trixell mesure environ 30 cm $\times 40$ cm (avec un pixel de côté 154 μm).

1.2.6 Les différentes images fournies par les rayons X

Nous venons de présenter comment les rayons X sont générés, comment ils interagissent avec la matière, et comment ils peuvent être détectés. Nous allons maintenant expliquer que ces différents phénomènes peuvent être exploités pour produire deux types d'images : des images directes, c'est-à-dire qui rendent compte d'une réalité physique brute, et des images reconstruites, après calculs, qui rendent compte de phénomènes physiques qui ne sont pas directement observables.

1.2.6.1 Les images directes : radiographie et fluoroscopie

Les images directes conventionnelles obtenues grâce aux rayons X s'appellent des *radiographies*. Ce sont des images en niveaux de gris, sur lesquelles le niveau de gris en un point de l'image témoigne de l'intensité de l'atténuation qu'ont connu les rayons X entre le moment où ils ont été émis et le moment où ils ont été détectés en ce point. Comme on l'a dit plus haut, cette atténuation est directement liée à la densité des structures traversées. L'image radiographique permet donc de visualiser une image de la *superposition* des différentes structures traversées par le faisceau de rayons X.

Les radiographies sont des images statiques. On peut également tirer parti des rayons X pour obtenir des images dynamiques, permettant par exemple de suivre la progression d'un produit de contraste, ou de contrôler en temps réel l'insertion d'un outil chirurgical : ceci est l'objet d'une technique appelée *fluoroscopie* : par opposition à la radiographie, on peut définir la fluoroscopie comme une technique d'imagerie par rayons X dont le but n'est pas de fournir à la fin d'un examen une image, mais dont la fonction est de permettre de disposer d'images en temps réel, soit en continu, soit aussi souvent qu'on le souhaite.

Pour cela, on utilise un dispositif construit sous la forme d'un arceau, appelé C-ARM (littéralement, bras en forme de C). Ce dispositif est disponible dans chaque bloc opératoire ; il est mobile, et est équipé à l'une de ses extrémités d'une source de rayons X, et à l'autre d'un détecteur, qui peut être un écran fluorescent, un amplificateur de brillance (c'est le cas le plus courant), ou un détecteur de radiologie numérique (une image de C-ARM est présentée en figure 1.2). L'intensité du faisceau de rayons X est réduite (environ d'un facteur 100) par rapport aux rayons X utilisés en radiographie, mais est délivrée sur une plus grande durée, ce qui fait que globalement, pour un examen fluoroscopique classique, la dose de rayons X délivrée au patient est plus importante que pour une radiographie classique. La faible intensité du faisceau de rayons X a pour conséquence que les images obtenues sont de moindre qualité que les images obtenues en radiographie (augmentation significative du bruit).

1.2.6.2 Les images reconstruites : images scanner

Nous allons nous intéresser ici à des techniques dites de *tomographie* (du grec *tomos*, qui signifie coupe) ; on pourrait résumer leur but de la manière suivante : comment visualiser l'intérieur d'un organisme, sans pour autant l'ouvrir ?

Une radiographie donne, comme on l'a dit plus haut, une image de la superposition des différentes structures rencontrées par le faisceau. Cette image est directement accessible. A contrario, les images de coupes internes de l'organisme ne sont pas accessibles directement, c'est-à-dire nécessitent des calculs : c'est l'objet de la tomodensitométrie par rayons X, principe de base des scanners médicaux, pour lequel Godfrey N. Hounsfield (ingénieur en électronique) et Allan M. Cormack (mathématicien) ont reçu le Prix Nobel de Médecine en 1979.
Le principe de base est le suivant (voir figure 1.3) : un couple source de rayons X - détecteur effectue une rotation autour d'un patient, et irradie une section donnée selon toutes les droites qui traversent cette section : des mesures d'atténuation le long de chacune des droites sont ainsi recueillies tout au long de

FIG. 1.2 – Un arceau mobile, ou C-ARM, est un dispositif d'imagerie par rayons X permettant d'acquérir des images au bloc opératoire, en continu, ou à volonté. A l'une des extrémités du bras, on trouve une source de rayons X, et à l'autre, un détecteur [Image General Electrics]

l'acquisition, et les calculs consistent alors à en déduire l'atténuation en chaque point du milieu traversé : autrement dit, on mesure la transformée de Radon de la fonction d'atténuation le long des droites qui traversent la section, et les calculs qui suivent consistent à *inverser* la transformée de Radon pour en déduire la valeur de la fonction d'atténuation en chaque point de la section. Cette carte d'atténuation, qui caractérise l'anatomie de la structure, est représentée sous forme d'une image : une coupe scanner.

Depuis les premiers prototypes construits au début des années 70, l'architecture des dispositifs d'acquisition a beaucoup évolué : dans les premiers scanners, on faisait des images coupe par coupe, qui, une fois empilées, donnaient des informations volumiques. En 1989 sont apparus les premiers scanners hélicoïdaux, où le lit du patient est translaté à l'intérieur du tunnel du scanner pendant que le couple source/détecteur est en rotation continue. Depuis, l'avancée majeure réside dans le développement de scanners multicoupes (dits aussi multibarrettes) : plusieurs rangées de détecteurs sont accolées, et permettent ainsi d'acquérir simultanément des données issues de plusieurs coupes, en conduisant à des coupes plus fines, avec une acquisition plus rapide (actuellement moins d'une demi-seconde par tour). En 2003, en France, où essentiellement General Electrics, Siemens, Toshiba et Philips se partagent le marché, deux tiers des scanners vendus étaient des scanners 16 coupes, et tous offraient de toute façon plus de 4 coupes. En 2007, il existe même des scanners 64 coupes.

Dans ce manuscrit, nous nous placerons, sauf dans le dernier chapitre [2], dans le cadre de la géométrie d'acquisition la plus simple possible, à savoir **la géométrie parallèle 2D** : on considère que le faisceau de rayons X qui traverse l'objet est un faisceau de rayons parallèles, et que l'on reconstruit un empilement de coupes. Bien que cette géométrie ne soit plus la géométrie utilisée dans les derniers scanners commercialisés, qui sont des scanners tridimensionnels, les travaux qui sont effectués dans le contexte des données tronquées - qui nous intéresse ici, et que nous présenterons plus loin - le sont en général en géométrie 2D ; de plus, si l'on travaille en géométrie 2D, il est plus réaliste de travailler en géométrie dite *fan beam* (c'esr-à-dire en éventail : le faisceau est contenu dans un cône plan dont le sommet est

[2] Dans le dernier chapitre, on se place dans le cadre d'une géométrie d'acquisition divergente 3D, mais comme nous le verrons, la technique de reconstruction appliquée alors sera purement géométrique, et aucun outil d'inversion 3D analytique de données radiographiques ne sera mobilisé.

la source de rayons X), mais il existe des procédures dites de *rebinning* qui permettent de réorganiser des données acquises en éventail en un jeu de données parallèles : les résultats de la géométrie parallèle peuvent donc être appliqués.

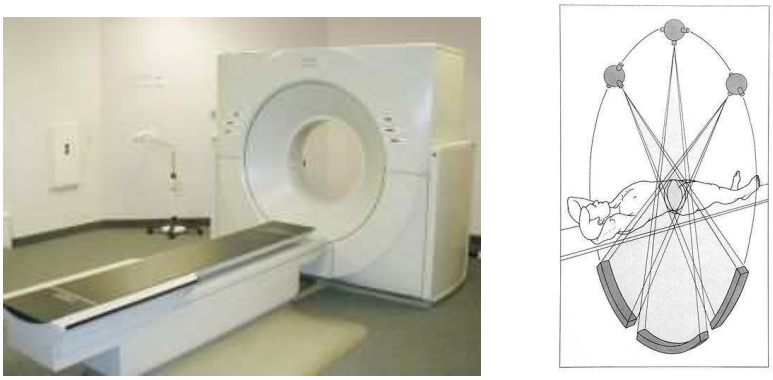


FIG. 1.3 – Un scanner, et l'illustration de son principe de fonctionnement : des mesures radiologiques sont effectuées tout autour du patient, et permettent, après calcul, de donner une image de la section irradiée.

1.3 Utilisation de l'imagerie par rayons X au bloc opératoire : l'exemple du vissage pédiculaire

1.3.1 Les Gestes Médico-Chirurgicaux Assistés par Ordinateur

Le travail qui est présenté dans ce manuscrit a été effectuée en grande partie dans une équipe de recherche travaillant sur les *Gestes Médico-Chirurgicaux Assistés par Ordinateur*. Cette équipe est une équipe pluridisciplinaire (informatique, robotique, mécanique, traitement d'images, mathématiques), dont les travaux ont un objectif commun : mettre à la disposition des chirurgiens et de leurs patients de nouveaux outils rendant les gestes de chirurgie plus sûrs, plus précis, plus rapides, moins *invasifs*, moins traumatisants, en particulier pour réduire les douleurs post-opératoires, la durée d'hospitalisation, la durée de convalescence (et donc aussi les coûts liés aux interventions chirurgicales).

Dans ce contexte, les images médicales ne sont plus seulement des outils de diagnostic. Elles deviennent des outils pour le chirurgien qui peut alors, par exemple :

- disposer d'images déjà en partie analysées, décodées par l'ordinateur (dans lesquelles par exemple certaines structures ont déjà été identifiées, isolées, *segmentées*) ;
- *planifier* précisément son geste avant d'entrer au bloc et retrouver ces informations pre-opératoires superposées virtuellement sur des images acquises pendant l'intervention ;
- contrôler son geste en temps réel sur des images de synthèse, qui permettent de visualiser des structures d'ordinaire inaccessibles à l'oeil humain, ou seulement accessibles au prix de gestes très invasifs pour les mettre au jour.

Dans les deux derniers cas, on dit que l'on propose au chirurgien un outil de *navigation chirurgicale* ; l'image change de statut : de *réelle*, elle devient *virtuelle*.

Certains de ces outils sont déjà en partie disponibles en chirurgie conventionnelle grâce aux images fluoroscopiques, qui permettent au chirurgien de contrôler son geste en temps réel. Mais, comme on le dira ensuite, l'information apportée par des images fluoroscopiques est limitée (ce sont des images de superposition, certains angles de vue sont indisponibles, les mesures conduisent à délivrer des doses de

rayons X que l'on souhaiterait moindres). Nous allons dans la suite présenter d'autres méthodes d'aide au chirurgien qui bénéficient d'images plus riches en information.
Pour cela, nous allons nous appuyer sur une intervention chirurgicale précise, qui motive le travail présenté dans ce manuscrit : le vissage pédiculaire. Nous la présentons dans la partie suivante, en dressant un état de l'art des techniques qui permettent aujourd'hui de l'assister par ordinateur, afin de dégager ensuite les objectifs de notre travail dans ce contexte.

1.3.2 Le vissage pédiculaire : description

Le vissage pédiculaire est une intervention en chirurgie orthopédique, pratiquée pour la première fois en 1961 par le chirurgien français R. Roy-Camille .
A la différence des tissus dits *mous*, les structures osseuses sont rigides : elles se prêtent donc bien à la création d'images dans lesquelles leur représentation est extrapolée à la partie de leur forme à un instant antérieur. De fait, après des travaux initiaux en neurochirurgie, c'est en orthopédie que la chirurgie par ordinateur a trouvé un grand nombre d'applications (voir le site Surgetics.org [99] pour une chronologie détaillée). Le vissage pédiculaire est l'une des premières applications connues du guidage du geste assisté par ordinateur, et dès le début des travaux dans ce domaine, c'est-à-dire dès la fin des années 80, des chercheurs grenoblois du laboratoire TIMC (en particulier S. Lavallée, P. Cinquin, J. Troccaz, et le Professeur P. Merloz, chirurgien orthopédiste au CHU de Grenoble) ont joué un rôle majeur (nous expliciterons plus loin leur contribution).

But de l'intervention
Le vissage pédiculaire est une technique d'*instrumentation* de la colonne vertébrale [92, 66] : on utilise des dispositifs externes (tiges et vis) pour rétablir puis maintenir l'équilibre tridimensionnel de la colonne vertébrale. Rappelons d'abord [21] que la colonne vertébrale est constituée d'un empilement de vertèbres (de haut en bas : les cervicales, les thoraciques, les lombaires, puis les vertèbres du sacrum et celles du coccyx), deux vertèbres successives étant reliées par une structure « amortisseuse » , formée d'eau et de collagène entourée de cartilage, appelée *disque intervertébral*.

A l'exception des vertèbres situées aux extrémités de la colonne vertébrale, les vertèbres ont toutes une structure similaire (que l'on pourra visualiser en figure 1.4 : elles présentent « à l'avant » un corps vertébral, et « à l'arrière » un arc, appelé « arc neural » , composé de deux parties : les pédicules (qui, grossièrement, ont la forme de tubes cylindriques), situés à la jonction avec le corps vertébral, et les lames. Plusieurs pointes, appelées processus, se greffent sur cette structure : deux processus transverses, quatre processus articulaires (ou articulations facettaires), et un processus situé à l'extrémité postérieure de la vertèbre, appelé processus épineux, ou épineuse (comme on le verra ensuite, il est facilement identifiable, et joue un rôle fondamental comme « point de repère » dans les techniques de recalage). L'arc neural entoure un canal dans lequel passe la moelle épinière, et la colonne est entourée par un réseau dense de nerfs et de vaisseaux.

Le vissage pédiculaire consiste à insérer des vis dans les pédicules de plusieurs vertèbres, afin de pouvoir ensuite faire glisser dans les têtes des vis une tige servant alors de « tuteur » pour la colonne (voir en figure 1.6). Cette intervention est pratiquée en particulier dans le cas de fractures de vertèbres (dans ce cas on instrumente les deux vertèbres adjacentes à la vertèbre fracturée), dans le cas de scolioses, comme l'illustre la figure 1.5, ou encore lorsqu'une vertèbre glisse vers l'avant du corps vertébral situé juste en-dessous d'elle (phénomène appelé spondylolisthesis).

La difficulté de cette intervention réside dans plusieurs éléments :
- la proximité de structures *nobles* au voisinage des pédicules : nerfs, vaisseaux, moelle épinière : il y a un risque de perforation de l'enveloppe osseuse des pédicules lors de l'insertion des outils

chirurgicaux à l'intérieur de ces pédicules, qui peut conduire à des lésions des structures environnantes ; ainsi, outre l'instabilité de l'instrumentation qui en découle, un mauvais placement peut causer des troubles neurologiques, plus ou moins handicapants ;
- l'accès difficile aux pédicules, et l'impossibilité de contrôler directement, visuellement, la progression du geste ;
- la variabilité des pédicules d'un individu à l'autre (profondeur, diamètre, orientation). Par exemple, la section des pédicules vertébraux varie entre 5 mm et 1 cm pour les vertèbres dorsales et les trois premières lombaires, jusqu'à 1,6 cm pour les lombaires L4-L5 ;

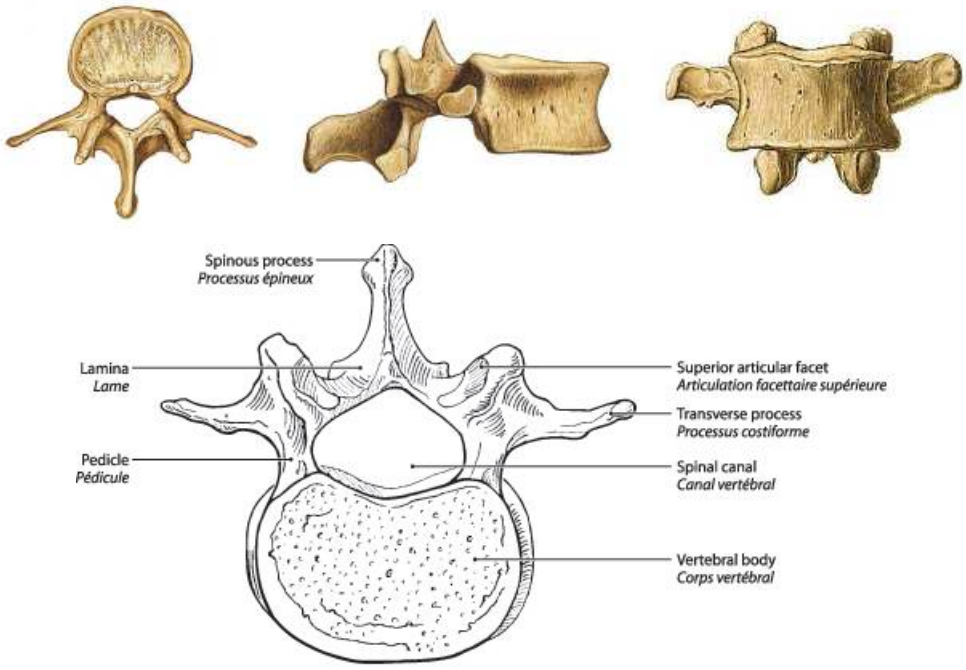
1.3.3 Technique conventionnelle et enjeux de la chirurgie assistée par ordinateur pour cette intervention

Traditionnellement, le vissage pédiculaire s'effectue en chirurgie ouverte, en exposant au jour la face postérieure des vertèbres, après un planning effectué avant l'opération, au cours duquel le chirurgien a décidé, dans des images scanner, des paramètres de l'intervention (vertèbres à instrumenter, diamètres et longueurs des vis, orientation des trajectoires,...). Cette intervention est réalisée sous contrôle fluoroscopique, avec des images du type de celle que l'on trouvera en figure (1.7), mais cette approche a révélé des limites : en ne pouvant disposer que des vues latérale et frontale du patient, qui plus est seulement en projection, le chirurgien ne peut pas contrôler de manière précise la position des outils au sein du pédicule ; en particulier, l'absence de vue axiale (c'est-à-dire le point de vue à droite en figure (1.6)) ne permet pas de garantir la position des outils par rapport à la moelle épinière. Le chirurgien est contraint de décider de sa trajectoire à partir d'images tridimensionnelles effectuées avant l'opération, et mises en correspondance mentalement avec ce qu'il voit dans le champ opératoire, complétées par ses connaissances anatomiques : la position des pédicules est extrapolée à partir de la position d'autres repères anatomiques accessibles, eux, visuellement.

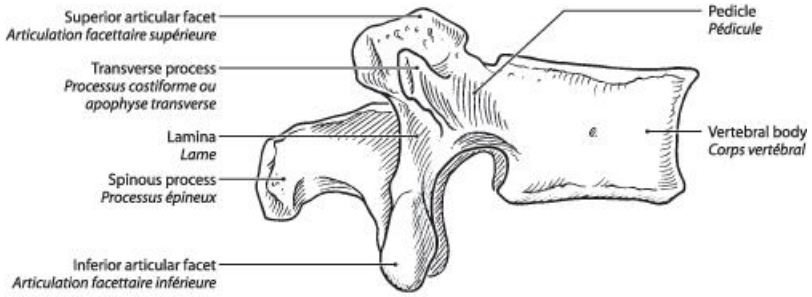
Selon les sources ([92, 63]), ce protocole conduit à entre 10 à 40% de vis mal placées (mises en évidence par des scanners post-opératoires, conduisant à des positions approximatives et instables, ou, d'une manière plus grave, affectant des structures nerveuses. De plus, les images fluoroscopiques, si elles sont acquises tout au long de l'intervention, conduisent à des temps d'irradiation qui se comptent en minutes et qui à la longue, peuvent se révéler néfastes pour le personnel médical ; enfin, les salles d'opération ne sont en général équipées que d'un seul C-ARM, ce qui oblige à le repositionner à plusieurs reprises pendant l'opération si l'on veut contrôler la progression du geste selon des incidences alternées (on ne peut donc pas disposer simultanément des informations complémentaires que sont les vues selon plusieurs incidences).

Les techniques assistées par ordinateur ont donc l'objectif suivant : introduire un objet linéaire dans les pédicules de la vertèbre, en optimisant les critères suivants :
- la précision du geste : on veut des trajectoires qui restent à l'intérieur des pédicules, et ceci en disposant d'information en temps réel, selon des incidences pertinentes (et simultanées) ;
- l'irradiation : on veut qu'elle soit réduite pour le patient, mais surtout pour l'équipe médicale ;
- le temps d'intervention.

Pour le premier point, la solution idéale consisterait à disposer d'un scanner au bloc opératoire, permettant de reconstruire des images tridimensionnelles et des coupes dans des sections pertinentes aussi souvent que le chirurgien en ressentirait l'intérêt. De tels scanners, dits *interventionnels* existent aujourd'hui, et sont utilisés en particulier pour réaliser des biopsies du cerveau : le neurologue introduit une aiguille dans la tête du patient. Tout au long de l'intervention (typiquement, pour une biopsie, de 2 à 5 minutes), le scanner est en rotation autour du patient, et délivre des images successives, avec une cadence de rafraîchissement de l'ordre de 6 ou 12 images par seconde. Bien que ce dispositif fournisse au chirurgien une précieuse information tridimensionnelle en temps réel, il n'est pour autant pas sans



Normal lumbar vertebra, seen from above
Vue supérieure d'une vertèbre lombaire normale



Normal lumbar vertebra, side view
Vue latérale d'une vertèbre lombaire normale

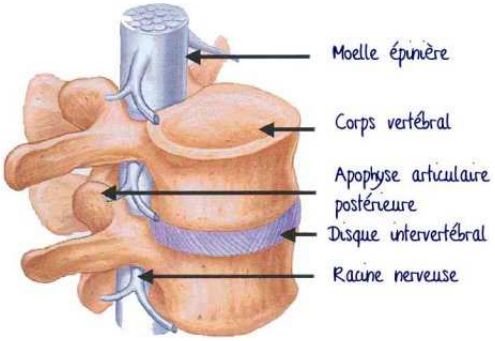


FIG. 1.4 – Vertèbre lombaire (schémas extraits de [100, 98]) : les vues de dessus, de profil et de face, avec ensuite le repérage des différents éléments. En bas, on peut visualiser l'environnement des vertèbres, riche en structures nobles (moelle épinière, vaisseaux).

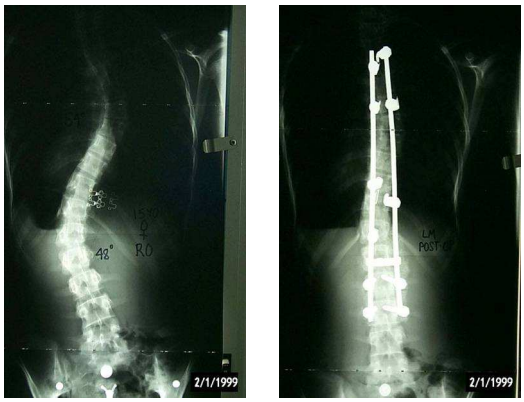


FIG. 1.5 – Instrumentation d'une scoliose par vissage pédiculaire : on introduit des vis dans plusieurs vertèbres, à travers les têtes desquelles on glisse des tiges métalliques, qui permettent de redresser la colonne vertébrale.

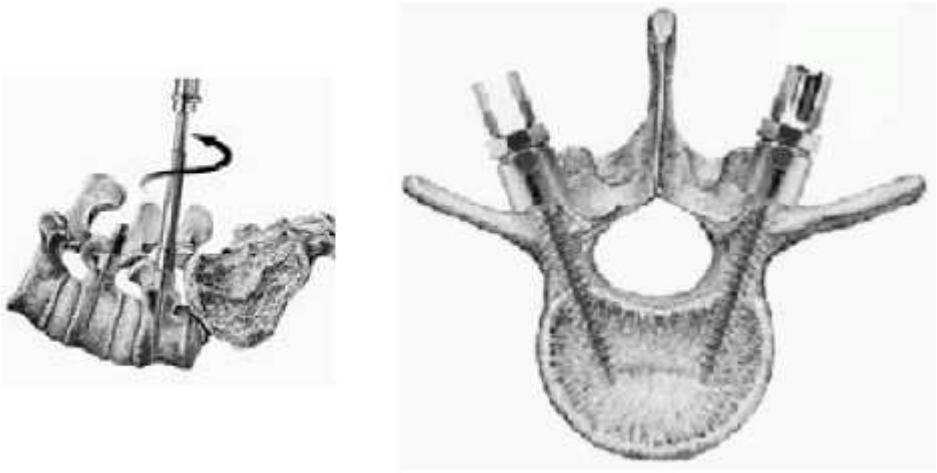


FIG. 1.6 – Principe du vissage pédiculaire [41] (à droite, la vue axiale, ou vue de dessus, qui permet de contrôler si les vis sont correctement placées, mais qui n'est pas accessible par des images fluoroscopiques).

FIG. 1.7 – Protocole conventionnel : les images sur lesquelles le chirugien peut s'appuyer sont des images fluoroscopiques ; les vues de profil et de face sont disponibles, mais la vue axiale est inaccessible.

inconvénient : outre l'encombrement qu'il crée dans le champ opératoire, il irradie pendant plusieurs minutes une zone très localisée du patient, ainsi que les mains du chirurgien (notons que pour limiter ce dernier point, dans le cas des biopsies, des systèmes robotisés de bras articulés sont développés afin d'effectuer le positionnement de l'aiguille).

1.3.4 Navigation chirurgicale par différentes techniques : l'exemple du vissage pédiculaire assisté par ordinateur

1.3.4.1 Navigation chirurgicale : principes généraux

Nous allons ici résumer les principes de base de la navigation chirurgicale (ceux-ci sont exposés par exemple dans [79, 94, 93, 97, 106, 51]).

Le but de la navigation chirurgicale est de limiter l'extrapolation que le chirurgien doit développer mentalement pour imaginer la position de ses outils au fil de l'opération à l'intérieur de structures auxquelles il n'a pas d'accès visuel direct ; pour cela, on veut pouvoir lui fournir des images de synthèse lui permettant de suivre cette progression. D'une manière un peu générale (nous entrerons dans les détails plus bas), les images que l'on va lui fournir seront des images réelles du patient (acquises une fois pour toutes avant ou au début de l'opération, donc induisant une irradiation bien moindre que lors d'une acquisition continue), augmentées à chaque instant d'informations recueillies en temps réel dans le champ opératoire (position de l'aiguille, de la vis,..), par des capteurs appelés *localisateurs*, et replacées virtuellement dans les images grâce à une application informatique.
Pour rendre les choses concrètes, on fait souvent l'analogie entre les dispositifs de navigation chirurgicale et les systèmes GPS pour les automobiles : la position réelle de l'automobile est suivie par un satellite, qui capte les signaux émis par le système de navigation disposé dans le véhicule, puis la position de l'automobile est replacée virtuellement sur une carte routière numérique, sur laquelle l'automobiliste peut suivre sa trajectoire en temps réel.

On distingue classiquement trois types de systèmes de navigation :
- les systèmes passifs : on apporte au chirurgien des informations en temps réel sur la position des outils chirurgicaux, mais celui-ci reste seul maître de son geste ;
- les systèmes actifs : on programme un geste chirurgical, qui est ensuite entièrement effectué par un robot, sans que le chirurgien n'intervienne ;
- les systèmes semi-actifs : on programme un geste chirurgical, qui est ensuite exécuté par le chirurgien, sous le contrôle du système de navigation ; si le chirurgien s'écarte du geste initialement planifié, son geste est interrompu par le robot.

Ici, pour les applications que nous allons présenter, et dans la continuité desquelles nous nous placerons ensuite, les systèmes de navigation utilisés sont des systèmes passifs.

En chirurgie, les signaux sont magnétiques, acoustiques ou, la plupart du temps, optiques : on attache des diodesélectroluminescentes (émettant des infra-rouges) aux différents outils que l'on veut suivre dans le champ opératoire, et on détecte les signaux qu'elles émettent à l'aide d'une caméra infra-rouge (appelée *localisateur*) - en pratique, chaque diode émet plusieurs rayons, et quand deux rayons provenant d'une même diode sont repérés par deux capteurs différents de la caméra, on sait déterminer la position de la diode dans l'espace. Les diodes sont en fait insérées sur des accessoires appelés *corps rigides* (rigid bodies), chacun d'eux-mêmes étant rigidement fixé à l'un des outils que l'on veut suivre. La caméra infra-rouge peut à chaque instant détecter les signaux émis par les diodes, et en déduire la position et l'orientation du corps rigide et donc de l'outil (voir en figure (1.8) pour une illustration).

Plus précisément, les calculs dans les applications de navigation chirurgicale reposent sur des changements de coordonnées entre référentiels :

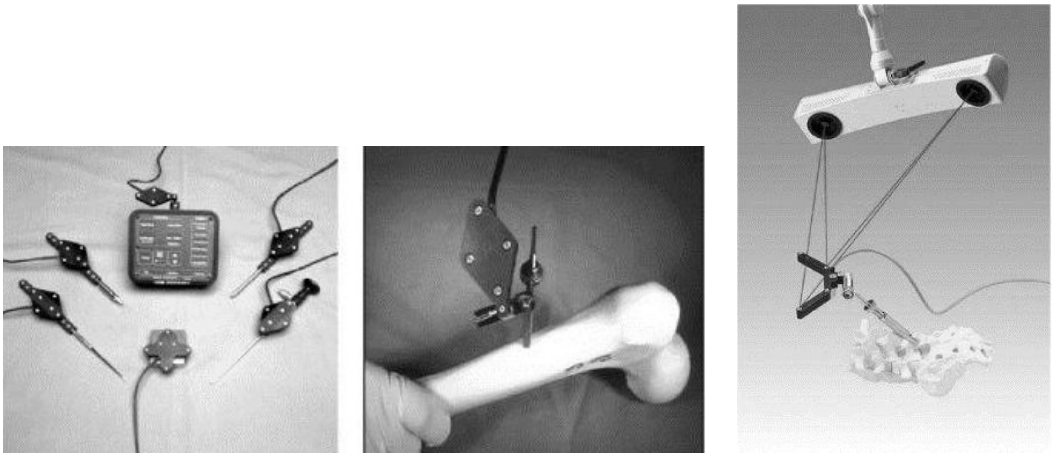


FIG. 1.8 – Les outils classiques pour la navigation chirurgicale [93] : on peut visualiser (sur les deux images de gauche) les corps rigides attachés à un os, à des outils, et (à droite) la manière dont ils sont détectés par une caméra-infra-rouge, à l'aide de diodes électroluminescentes fixées sur les corps rigides.

- le référentiel lié à la caméra, dans lequel peuvent être déterminées à chaque instant les coordonnées des diodes attachées à chacun des corps rigides. Pour cela, il faut que toutes les diodes restent visibles par la caméra (on dit qu'il faut préserver une ligne de vue) : le chirurgien n'est donc pas complètement libre de ses mouvements ;
- le référentiel lié à chacun des corps rigides $R_{\mathrm{outil_n}}$, dans chacun desquels, grâce à des techniques dites de *calibrage*, on repère les coordonnées de la pointe de l'outil associé, et éventuellement son orientation. Ces coordonnées sont constantes tout au long de l'opération, puisque chacun des corps rigides est rigidement lié à son outil de référence ;
- le référentiel lié au patient pendant l'opération, R_{patient} pour cela, on attache également un corps rigide au patient ; typiquement, pour le vissage pédiculaire, on peut attacher un corps rigide à l'épineuse d'une vertèbre ("facile" d'accès dans une intervention par voie postérieure). La patient est immobile dans ce référentiel tout au long de l'intervention, ou, autrement dit, ce référentiel suit les mouvements du patient ;
- le référentiel lié à l'image R_{image}, dans lequel on souhaite déterminer les coordonnées des outils pour pouvoir replacer ces derniers virtuellement dans les images.

Plusieurs transformations sont alors à caractériser :

- la transformation qui permet de passer du référentiel lié au patient au référentiel lié à l'image : on parle de *recalage* entre les deux référentiels ;
- la transformation qui permet de passer du référentiel lié à l'outil au référentiel lié au patient : ceci se fait en relevant simultanément les positions des corps rigides associés par rapport à la caméra ;
- enfin, la transformation qui permet de passer du référentiel lié à l'outil au référentiel lié à l'image : celle-ci s'obtient par composition des deux précédentes.

Dans tous les cas, calculer ces transformations consiste à proposer la transformation rigide (*ie* obtenue avec une translation et une rotation) optimale qui minimise la distance entre deux ensembles de points.

Dans la suite, nous allons expliquer comment, dans l'exemple du vissage pédiculaire, la navigation est mise en oeuvre, c'est-à-dire en particulier quelles sont les images virtuelles que l'on reconstruit, et comment sont déterminées les relations entre les différents référentiels.

1.3.4.2 Navigation dans un scanner per-opératoire

Nous commençons par présenter la stratégie choisie par Haberland *et al.* dans [47], car, même si ce n'est pas la plus ancienne, c'est elle qui est la plus proche de la solution « idéale » que nous évoquions plus haut, qui consisterait à utiliser au bloc opératoire un scanner permettant de disposer en temps réel d'images tridimensionnelles de la région de l'opération.

Cette technique utilise un scanner interventionnel, mobile (Tomoscan M mobile, de Philips), avec lequel les auteurs reconstruisent un volume au début de l'opération. Le scanner est alors écarté du champ opératoire, et aucune nouvelle acquisition de données radiographiques n'est effectuée ensuite : les problèmes d'ergonomie et d'irradiation sont donc alors résolus. Au cours de l'opération, le chirurgien peut visualiser virtuellement la progression de ses outils dans le volume scanner initial. Pour cela, des vis en titane sont insérées dans chaque vertèbre d'intérêt avant le scanner, de telle sorte qu'elles sont ensuite facilement identifiables dans le volume scanner.

Nous allons détailler pour cette application les différentes étapes de mise en place de la navigation (en explicitant les étapes générales présentées plus haut) :

- avant de débuter l'opération, on attache un corps rigide à l'épineuse d'une des vertèbres du patient ainsi qu'aux différents outils chirurgicaux : on connaît alors la relation entre le référentiel lié au patient, et le référentiel lié à chacun des outils ;
- le chirurgien *calibre* les différents outils qu'il va utiliser ensuite, c'est-à-dire qu'il détermine la position de chacun des outils dans le référentiel propre qui lui est lié (en particulier, position de la pointe des outils) ;
- le chirurgien commence par toucher les vis en titane implantées dans le patient avec la pointe d'un des outils, appelé *palpeur* : ceci permet de déterminer la position des vis dans le référentiel lié à la caméra ; comme le référentiel lié au patient est repéré par cette même caméra, on en déduit la position des vis dans le référentiel lié au patient. On repère alors également la position des vis dans les images initiales, et on en déduit la relation entre le référentiel lié au patient et le référentiel lié à l'image : on a *recalé* les deux référentiels ;
- l'opération en elle-même peut alors débuter : à chaque instant, la position des outils est repérée par la caméra, et replacée virtuellement dans les images scanner initiales ; le chirurgien peut donc suivre la progression de son geste.

Les expériences réalisées sur patients par les auteurs de [47] conduisent à des résultats très satisfaisants (sur 35 patients, ils déclarent que les scanners post-opératoires n'ont mis en évidence aucune vis mal placée). Néanmoins, cette technique n'est pas satisfaisante pour autant, car elle n'est pas viable : comme cela est rappelé par exemple dans [93], acquérir un scanner coûte très cher, et les hôpitaux n'ont pas les moyens d'équiper chaque bloc opératoire avec un tel dispositif. La technique que nous présentons ensuite, développée quelques années plus tôt, contourne ce problème, en utilisant un scanner effectué avant l'entrée au bloc opératoire, donc avec du matériel disponible dans les hôpitaux.

1.3.4.3 Navigation à l'aide d'un scanner préopératoire

Cette stratégie est la plus ancienne stratégie de navigation pour le vissage pédiculaire. Elle a été élaborée simultanément, et de manière indépendante, dans les années 90, par deux équipes : une équipe suisse, de l'Université de Berne, menée par L. Nolte [79], et une équipe grenobloise du laboratoire TIMC, menée par S. Lavallée, P.Cinquin et J. Troccaz.[63]. Cette technique a fait depuis l'objet de développements ultérieurs (voir par exemple [64, 75, 76, 110, 94]), et est utilisée par exemple au CHU de Grenoble par le professeur P. Merloz.

A la différence de la stratégie que nous venons d'exposer, on n'utilise pas de scanner au bloc opératoire. On fait néanmoins en sorte que de l'information tridimensionnelle - en particulier dans la direction absente des images fluoroscopiques - soit disponible : pour cela, on effectue un scanner avant l'entrée du patient au bloc opératoire. Sur ce scanner pré-opératoire, le chirurgien construit le *planning de l'opération*. Une fois au bloc opératoire, il faut alors effectuer un recalage entre les images scanners préopératoires, et le référentiel du patient. Plusieurs techniques sont alors possibles :

1. en utilisant un palpeur pour pointer des points caractéristiques, repérables facilement à la fois dans les images pré-opératoires et sur le patient sur la table d'opération ; ces points caractéristiques peuvent être de différentes natures :
   - ils peuvent être des marqueurs artificiels implantés dans les os, comme c'est le cas dans la stratégie utilisant un scanner interventionnel que nous avons présentée plus haut ; cette technique est précise, mais présente l'inconvénient de nécessiter une intervention chirurgicale avant le scanner, donc, *a fortiori* avant l'opération elle-même, ce qui est trop contraignant ;

   - ils peuvent être des marqueurs artificiels fixés sur la peau avant le scanner, et radio-opaques (pour être visibles dans les images scanner) : cette technique a l'avantage de ne pas être invasive, mais elle est peu précise : la position des marqueurs par rapport aux vertèbres peut être modifiée entre les images effectuées avant l'entrée au bloc et l'anatomie per-opératoire ;

   - ils peuvent être des marqueurs anatomiques, c'est-à-dire des points des vertèbres facilement identifiables (par exemple les extrémités des différents processus des vertèbres). Le recalage se fait alors en repérant d'une part ces points dans les images scanners, et d'autre part en les palpant au début de l'intervention, et en recherchant la transformation rigide optimale permettant d'apparier ces points. En l'état, cette technique est souvent jugée assez peu précise, et on préfère recaler des surfaces, c'est-à-dire recaler un nuage d'une quinzaine de points choisis aléatoirement dans une région donnée sur la vertèbre avec un nuage de points choisis sur les images (cf.[63, 79]).

2. en utilisant d'autres techniques, sans palper de points, ce qui permet d'envisager des protocoles opératoires moins invasifs, voire percutanés (on n'est plus obligé d'exposer toute la face arrière de la vertèbre pour palper des points, et ensuite, pour introduire les outils liés à l'intervention elle-même, on peut se contenter d'incisions très localisées) :
   - recalage entre une surface identifiée sur un scanner préopératoire et une surface identifiée en réalisant une échographie au bloc opératoire ; ces travaux ont fait l'objet de la thèse de J. Tonetti [101] pour le vissage sacro-iliaque (c'est-à-dire au niveau du bassin) : on effectue le recalage en attachant un référentiel à la sonde échographique, référentiel dans lequel on peut déterminer les coordonnées des points identifiés dans les images échographiques ; autrement dit, la sonde échographique joue le rôle du palpeur. La navigation se fait ensuite dans le scanner préopératoire ;
   - recalage entre un scanner préopératoire et des images fluoroscopiques per-opératoires ; ceci a fait l'objet de la thèse d'A. Hamadeh [48, 49] : dans ces travaux, qui préfiguraient les travaux de M. Fleute que nous détaillerons plus loin, quand nous présenterons les objectifs de cette thèse, l'idée consistait à acquérir deux images fluoroscopiques en début d'intervention, à isoler sur chacune d'entre elles les contours en projection de la vertèbre, puis à isoler sur le scanner préopératoire la surface de la vertèbre. Le recalage consistait alors à trouver la transformation rigide optimale à appliquer entre le référentiel du volume scanner, pour que la projection de la surface de la vertèbre coïncide avec les contours détectés sur les vues fluoroscopiques. Comme nous l'expliquerons plus loin, ce type de stratégie se heurte à un problème majeur : celui de la détection des contours de la vertèbre dans les images fluoroscopiques (c'est la superposition des structures qui rend cette tâche difficile). De fait, les travaux n'avaient été validés que sur des

vertèbres sèches, c'est-à-dire sans environnement extérieur, ce qui simplifie singulièrement la phase de détection de contours.

Une fois que le recalage a été effectué, le chirurgien peut naviguer dans les images scanner, et contrôler sa trajectoire par rapport à la trajectoire préalablement planifiée.

Actuellement, cette technique de navigation est proposée dans des plateformes de différents constructeurs :

- dans la station de navigation de Medtronic-Sofamor-Danek, appelée Stealth-Station (dans laquelle l'application a été implémentée à l'origine) ;
- dans le système VectorVISION de l'entreprise Brainlab ;
- dans l'application SpineLogics Universal de la station de navigation Surgetics, développée dans l'entreprise grenobloise Praxim - qui a été fondée en 1995 par S. Lavallée, l'un des premiers concepteurs de cette technique de navigation, et qui parraine ce travail de thèse.

La figure (1.9) présente les interfaces de navigation proposée par ces différents constructeurs : leur utilisateur peut visualiser sa trajectoire sur des coupes selon différentes incidences, mais aussi dans des images tridimensionnelles.

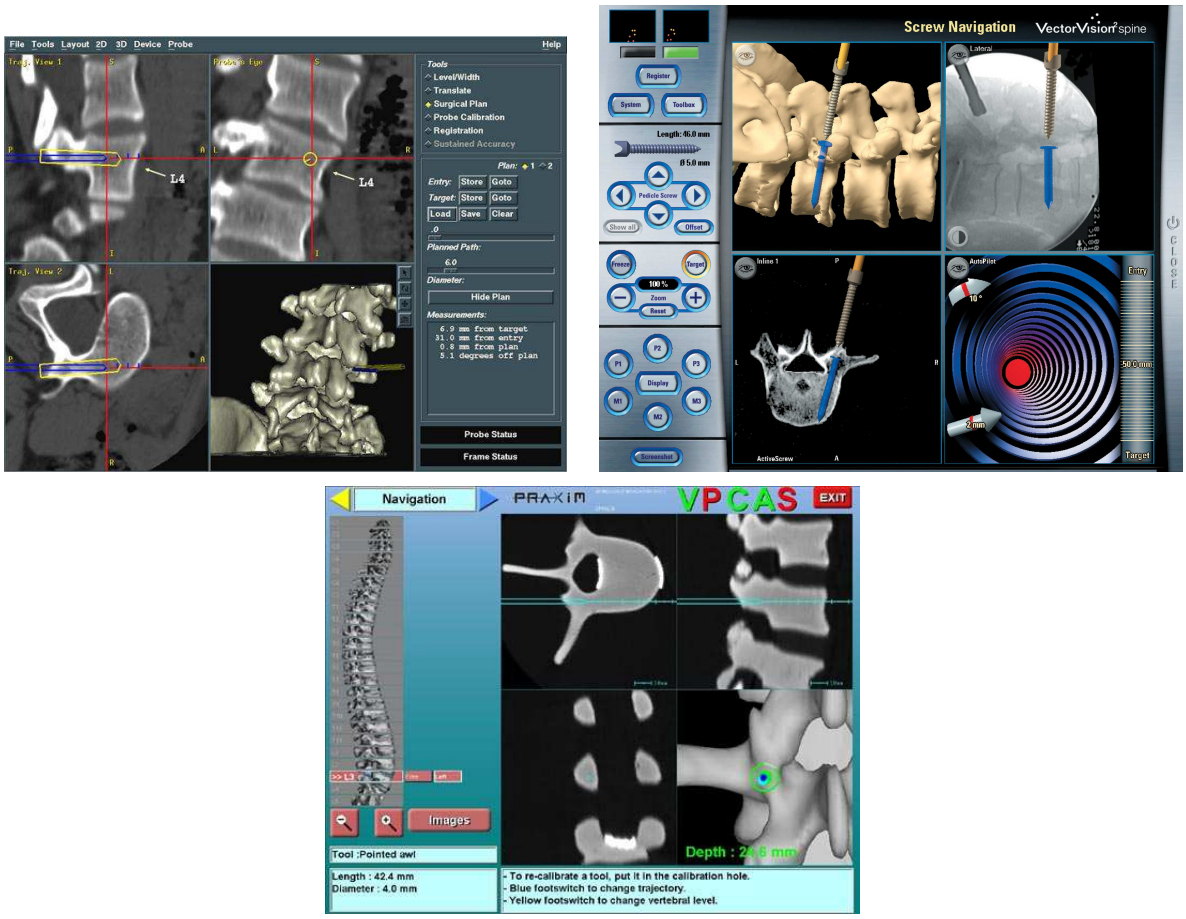


FIG. 1.9 – Les interfaces proposées au chirurgien pour le vissage pédiculaire avec navigation dans un scanner pré-opératoire : interface des stations de navigation de Brainlab, Medtronic (en haut), et Praxim (en bas) (Images issues des sites des constructeurs [12, 73, 85])

1.3.4.4 Navigation à l'aide de la fluoroscopie virtuelle

Cette stratégie (présentée par exemple dans [50], ou dans [44], avec une approche percutanée) s'inspire du protocole conventionnel, où, rappelons-le, le chirurgien s'appuie sur des images fluoroscopiques acquises à volonté tout au long de l'intervention. L'idée consiste ici à acquérir deux images fluoroscopiques au début de l'intervention, chacune selon une incidence différente, puis à naviguer ensuite dans ces deux images initiales : on parle de fluoroscopie *virtuelle*.
Pour rendre possible la navigation, on équipe le patient et les outils de corps rigides, comme dans les techniques précédentes ; la différence est qu'ici on suit également la position du C-Arm, et par une procédure de calibrage au niveau du C-ARM, réalisée en acquérant des images d'un objet-test, appelé *mire* (grossièrement, une cage à l'intérieur de laquelle sont disposées des petites sphères dont on connaît précisément la position par rapport à la cage) on établit, pour une position donnée du C-ARM, la transformation entre le référentiel lié au C-ARM et le référentiel de l'image . La navigation se fait ensuite dans les deux images fluoroscopiques initiales.

Par rapport à la stratégie conventionnelle, on peut disposer simultanément de la position des outils dans deux vues prises selon deux incidences différentes, on n'a plus à repositionner le C-ARM plusieurs fois pendant l'intervention, et l'irradiation, limitée à la prise initiale d'images, est bien moindre pour le patient - ainsi que pour le chirurgien, qui peut s'écarter du champ opératoire au moment où les images fluoroscopiques sont acquises. De plus, cette technique utilise seulement le matériel classiquement disponible dans un bloc opératoire, donc ne pose pas de problème de matériel ou de coût financier.

Actuellement, ce type de navigation pour le vissage pédiculaire est proposée au même titre que la précédente par les principaux industriels :

- système Fluoronav de Medtronic-Sofamor-Danek (ici aussi, c'est la plateforme dans laquelle l'application a été proposée pour la première fois par des industriels) ;
- système Navivision 2D de Brainlab ;
- système Fluologics Universal de Praxim.

La figure (1.10) présente l'interface de navigation proposée par l'un de ces constructeurs (système Fluoronav) : leur utilisateur peut visualiser sa trajectoire simultanément sur les deux vues fluoroscopiques.

1.3.4.5 Navigation avec fluoroscopie tridimensionnelle

Cette stratégie de navigation, décrite par exemple dans [35], est plus récente que les deux précédentes, et elle vise à combiner les avantages de ces dernières : l'idée est de s'appuyer sur un C-ARM classique (donc sans introduire d'autre matériel que le matériel classiquement disponible au bloc opératoire), pour reproduire le fonctionnement classique d'un scanner, c'est-à-dire reconstruire des images tridimensionnelles au bloc opératoire, dans lesquelles ensuite on pourra naviguer : on parle de *fluoroscopie tridimensionnelle*.

On utilise ainsi un C-ARM qui, en rotation autour de la table, recueille des données radiographiques tout autour de la section que l'on souhaite reconstruire ; la particularité des C-ARMs utilisés ici est qu'ils sont *isocentriques*, c'est à dire que le bras a un « vrai » mouvement de rotation circulaire autour du patient (autrement dit, le centre de rotation reste fixe, au coeur de la région d'intérêt). Cette spécificité, qui n'est pas assurée dans les C-ARMS traditionnels, comme illustré en figure (1.11) rend possible la reproduction du fonctionnement d'un scanner ; c'est par exemple le cas des C-ARMs proposés par Siemens (le Siremobil Iso C 3D, utilisé dans [35], ou son successeur, le C-ARM Arcadis Orbic 3D, présenté à droite de la figure (1.11), mais aussi le O-ARM, proposé par Medtronic, dont le bras se déplie en forme de « O » au moment de l'acquisition de données).

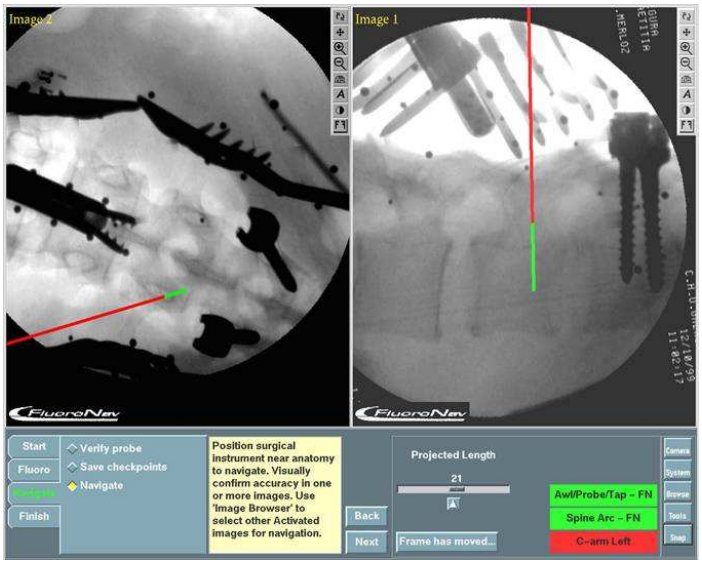


FIG. 1.10 – Les interfaces proposées au chirurgien pour le vissage pédiculaire avec navigation dans deux vues fluoroscopiques acquises en début d'intervention : interface de la station de navigation proposée par Medtronic (système Fluoronav). (Image issue du site du constructeur [73])

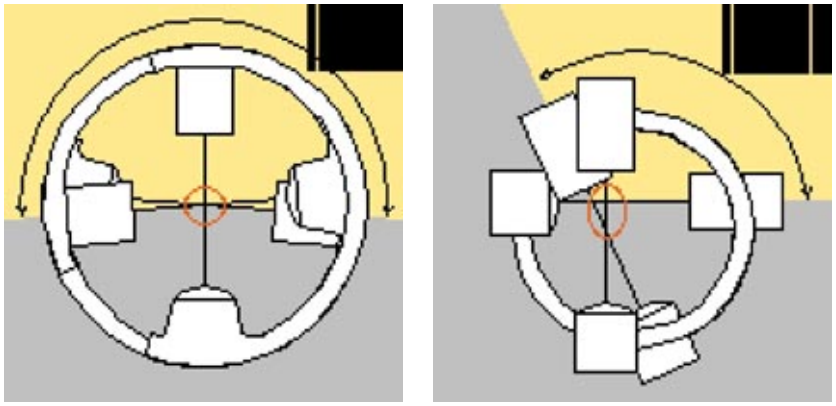


FIG. 1.11 – Les C-ARMS isocentriques (à gauche) ont un mouvement de rotation contraint, qui leur permet d'être utilisés pour fournir des données pour la reconstruction d'images de type scanner, à la différence des C-ARMS classiques, qui sont non-isocentriques (à droite) (Images Siemens - CARM Arcadis Orbic 3D [96]).

FIG. 1.12 – A gauche le C-ARM isocentrique Arcadis Orbic 3D proposé par Siemens ; sur les deux images à droite le C-ARM « O-ARM » proposé par Medtronic (en position « fermée » puis « ouverte »). Ces dispositifs permettent de reproduire le fonctionnement d'un scanner avec le dispositif d'imagerie traditionnellement disponible au bloc opératoire (Images Siemens - Medtronic [96, 73]).

Une fois l'acquisition des données radiographiques effectuée, et les calculs de reconstruction du volume scanner accomplis, on peut mettre en place un outil de navigation similaire aux outils exposés plus haut : on utilise des marqueurs introduits avant l'acquisition des données radiographiques, et rigidement fixés dans les vertèbres, puis, avant d'entamer l'intervention, on palpe ces points.

Les volumes actuellement reconstruits par ce type de dispositifs sont des cubes dont l'arête mesure approximativement 12 cm. Ceci est dû au fait que les C-ARM sont équipés de capteurs-plans dynamiques (le fait qu'ils soient sans distortion fait qu'on les préfère aux amplificateurs de brillance, car cela évite d'avoir à corriger les données avant de les mettre en entrée de l'algorithme de reconstruction) ; or les capteurs plans dynamiques reposent sur une technologie coûteuse, et ceci explique le fait que leurs dimensions sont actuellement limitées. Ceci a une conséquence importante : les algorithmes de reconstruction classiquement mis en oeuvre dans les scanners ne sont transposables *stricto sensu* que lorsque les structures étudiées ont des projections dont le support ne déborde pas du détecteur (ou d'un autre point de vue, des sections qui peuvent être contenues entièrement dans un cube dont l'arête mesure 12 cm) - nous expliquerons pourquoi dans le chapitre suivant, quand nous exposerons le problème de la reconstruction à partir de données tronquées en tomographie. C'est le cas par exemple des poignets ou des chevilles, mais, par exemple, ce n'est pas le cas, tout au moins chez l'adulte, au niveau de la colonne vertébrale. En fait, non seulement les algorithmes classiques sont mis en défaut, mais en plus on sait que les données sont insuffisantes pour obtenir des reconstructions exactes, même dans des régions internes bien localisées. Comme on peut le voir par exemple en figure (1.13), les industriels présentent cependant des reconstructions au niveau de la colonne vertébrale ; dans [35], les auteurs disent que la qualité des images est « suffisante pour identifier les surfaces osseuses » , mais il est reconnu que les coupes obtenues ne sont pas aussi nettes que les coupes scanners traditionnelles. L'interface offerte aux utilisateurs du système VectorVision de fluoroscopie tridimensionnelle développé par BrainLab est présentée en figure (1.13)

1.3.4.6 Bilan

Le professeur P. Merloz, chirurgien orthopédiste au CHU de Grenoble, a conduit différentes séries de tests pour évaluer la performance des deux premiers systèmes de navigation (voir par exemple [76, 74]) ; il en ressort que l'un et l'autre permettent de réduire les taux de vis mal placées observés avec les protocoles conventionnels, mais avec des efficacités différentes :

– pour la navigation dans un scanner préopératoire : sur 79 patients, et 201 vis insérées, 12 étaient mal placées (c'est-à-dire que l'enveloppe osseuse des pédicules a été perforée de plus de 2mm), soit 5,9% ;

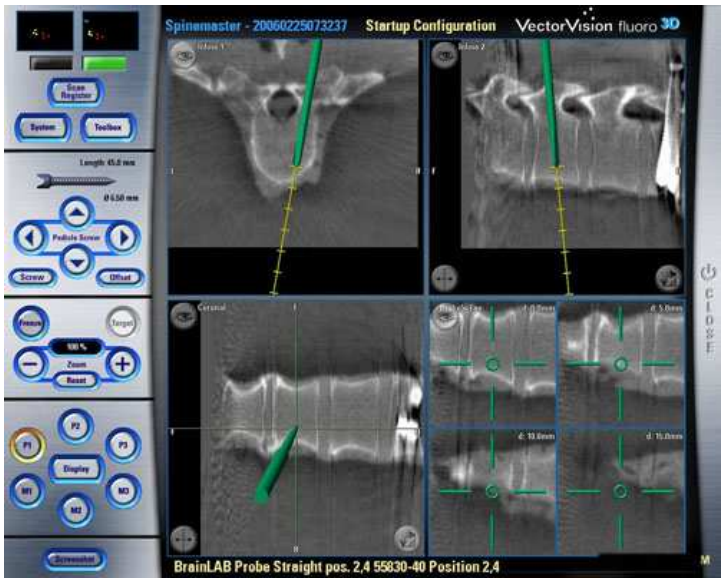


FIG. 1.13 – Les interfaces proposées au chirurgien pour le vissage pédiculaire avec navigation dans un volume 3D reconstruit par fluoroscopie tridimensionnelle : interface de la station de navigation proposée par Brainlab (système VectorVision). (Image Brainlab [12])

– pour la navigation avec fluoroscopie virtuelle, sur 18 patients et 58 vis insérées, 8 étaient mal placées, soit 14%.

Plus précisément, ces études ont montré des nuances selon les pathologies :
– pour les scolioses, l'information tridimensionnelle est cruciale : on observe 6,5% de vis mal placées avec le scanner préopératoire, alors qu'en utilisant la fluoroscopie virtuelle, on observe encore 25% de vis mal placées ;
– pour les fractures, la différence est moindre : 5,3% contre 9,5% de vis mal placées.

Il reste cependant manifeste que l'apport d'information tridimensionnelle au chirurgien est crucial : nous en tenons compte dans la suite.

1.4 Contexte et plan de thèse

Notre travail s'inscrit dans la continuité du projet MI3 (Minimal Invasing Interventional Imaging - 2000-2002) ([31]), coordonné par l'Université Joseph Fourier, le laboratoire TIMC et la société PRAXIM, et financé par la Commission Européenne.
Son objectif global était d'améliorer les protocoles chirurgicaux pour les rendre les moins invasifs et les plus efficaces possible, en travaillant plus particulièrement au développement de nouveaux systèmes d'imagerie interventionnelle.
Plus précisément, le but était de développer pour le vissage pédiculaire un système délivrant une information 3D, sans utiliser d'informations pre-opératoires (le recalage avec la réalité per-opératoire étant contraignant), à partir d'une architecture matérielle de type fluoroscopie (c'est-à-dire sans faire entrer de scanner au bloc), avec le souci de rendre minimale la dose de rayons X administrée, et de fournir des images de qualité dans le cas de problèmes à données tronquées (ces problèmes seront présentés plus en détail dans le chapitre suivant : problème intérieur et problème à angle limité).
Par rapport aux dispositifs existants que nous venons de présenter, le but était donc d'avoir, comme

en fluoroscopie 3D, une information tridimensionnelle sur les structures opérées, en n'utilisant que le matériel conventionnel du bloc opératoire, *mais* en s'attachant à développer des algorithmes de reconstruction adaptées au contexte des données tronquées. En contre-partie, l'objectif n'était pas de fournir une information tridimensionnelle aussi riche que l'information délivrée par des coupes scanner : l'objectif était "simplement" de donner une image de la surface de la vertèbre, ou, en coupes, des images des contours de chaque section, une information qui est suffisante pour guider le chirurgien lors d'un vissage pédiculaire.

D'un point de vue matériel, ce projet s'articule autour d'une station de navigation chirurgicale, la station Surgetics développée par la société PRAXIM, que l'on peut voir à gauche en figure 1.14), et d'un C-ARM dans lequel a été intégré le capteur plan dynamique PIXIUM 4700 fabriqué par la société TRIXELL.

FIG. 1.14 – Le matériel autour duquel s'articule le projet MI3, contexte de ce travail de thèse : la station de navigation Surgetics de l'entreprise Praxim (à gauche), et le C-ARM interventionnel dans lequel un capteur plan dynamique de l'entreprise Trixell a été intégré.

Plus précisément, deux axes de recherche avaient été dessinés dans le projet MI3 :

- la reconstruction de la surface d'une vertèbre à partir de deux images fluoroscopiques per-opératoires de la vertèbre du patient (face et profil), mais sans utiliser de scanner préopératoire : l'idée était d'apporter l'information tridimensionnelle sous la forme d'un modèle statistique de surface de vertèbres, que l'on déforme de manière élastique pour le recaler avec les images fluoroscopiques. Ce point a fait l'objet de la thèse de M. Fleute ([41]) ;

- la reconstruction de la surface d'une vertèbre à partir de données radiographiques acquises selon le principe de la fluoroscopie virtuelle 3D, mais éventuellement tronquées par rapport au jeu de mesures utilisé dans une reconstruction classique de type scanner, par exemple du fait de la taille réduite des détecteurs dynamiques évoquée plus haut, ou bien de la présence dans le champ opératoire d'objets radio-opaques (outils, bord du lit..) obscurcissant certaines zones des radios, ou bien encore dans le souci de réduction de la dose délivrée au patient.

Le travail de thèse présenté ici a en grande partie était financé par la région Rhône-Alpes, dans le cadre

du projet ADéMo (Acquisition et Décisions guidées par le Modèle). Sur le premier axe de recherche, l'objectif était de travailler sur l'automatisation de la phase de détection des contours de vertèbres dans les images fluoroscopiques. Ce travail a fait l'objet d'investigations selon différentes pistes, conduisant à des validations sur vertèbre sèche puis sur fantôme numérique : ces travaux seront présentés dans le **chapitre 5** de ce manuscrit.

Le coeur de notre travail mathématique a été consacré au deuxième axe de recherche : l'objectif initial était d'évaluer la pertinence des méthodes d'inversion par ondelettes de données fluoroscopiques tronquées.

Le **chapitre 2** qui suit rassemble les principaux résultats de tomographie permettant de comprendre les spécificités des problèmes de tomographie à données tronquées, et qui nous ont été utiles tout au long de ce travail : il expose d'abord des résultats classiques sur les données complètes, afin de montrer ensuite en quoi elles sont mises en défaut. Nous montrons en particulier qu'une méthode de reconstruction directement adaptée des méthodes globales, et donc très facilement utilisable, fournit des résultats très satisfaisants en présence de données locales, alors qu'elle semble ignorée par la littérature.

Dans le **chapitre 3**, après quelques éléments généraux sur les représentations en ondelettes de signaux, nous présentons les différents liens qui existent dans la littérature entre la tomographie et les ondelettes, et nous mettons en évidence deux types de travaux, entre lesquels très peu de passerelles sont faites dans la littérature existante : d'une part, des travaux effectués par des spécialistes de traitement du signal, où des applications aux problèmes à données tronquées existent, et d'autre part, des travaux faits par des spécialistes de statistique, autour de la transformée en ondelettes-vaguelettes, dont les applications concernent essentiellement l'inversion de données tomographiques bruitées. Nous montrons qu'il existe de grandes similarités entre ces deux approches.

Enfin, dans le **chapitre 4**, nous présentons notre principale contribution aux relations entre tomographie et ondelettes : nous exploitons des résultats théoriques établis en physique théorique au début des années 90 par M. Holschneider [52], à notre connaissance jamais utilisés en pratique, pour proposer une nouvelle méthode d'inversion locale de données tomographiques tronquées.

Chapitre 2

Tomographie 2D

Dans ce chapitre, nous introduisons d'abord l'outil fondamental en tomographie : la transformée de Radon, dont nous énonçons les propriétés que nous réutiliserons tout au long de ce manuscrit. Nous présentons ensuite le problème de reconstruction d'une image à partir de données tomographiques, tout d'abord dans le cadre classique des données globales, en insistant sur l'algorithme le plus connu d'inversion des données : la méthode de rétroprojection filtrée. Nous présentons ensuite des problèmes à données tronquées, notamment le problème intérieur, qui constituent notre motivation ici. Nous montrons en quoi ils diffèrent du problème global, et nous présentons deux méthodes de reconstruction classiques en présence de données locales, à savoir la Λ-tomographie et la tomographie pseudo-locale. Nous terminons en revenant sur la méthode de rétroprojection filtrée, en la considérant cette fois-ci dans le contexte des données locales, cadre dans lequel elle n'est pas abordée dans la littérature.
Sauf mention contraire, les principaux résultats énoncés dans ce chapitre sont issus de la bibliographie, notamment des travaux de F. Natterer, d'A. Faridani, d'A. Ramm et d'A. Katsevich [78, 36, 89]. Dans un souci de compréhension, nous les complétons par des exemples ou des preuves plus simples dans des cas particuliers, avec, *en fil rouge* tout au long de ce chapitre, l'exemple de l'indicatrice du disque unité, ou de l'ellipse, en calculant les résultats exacts de l'action de certains opérateurs sur ces exemples. Les résultats de ces calculs sont parfois donnés dans la bibliographie, mais rarement détaillés.

2.1 La transformée de Radon : définitions et propriétés fondamentales

Comme nous l'avons dit en introduction, la transformée de Radon d'une fonction f rassemble, en dimension 2, les valeurs des intégrales de la fonction f le long de chacune des droites du plan. La fonction f modélise la densité d'une section d'un organisme, que l'on cherche à identifier, à *reconstruire*, à partir de sa transformée de Radon. Dans cette partie, nous présentons les définitions et propriétés fondamentales qui interviennent dans ce cadre.

2.1.1 Définition

La transformée de Radon est définie sur l'ensemble des droites du plan, que l'on repère de la manière suivante : on introduit un repère orthonormé $(O, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$ du plan euclidien. On note $\mathbf{S}^1$ le cercle unité des vecteurs de norme 1. Tout vecteur $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1$ peut être caractérisé par l'unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que, dans le repère orthonormé orienté choisi, $\mathbf{\Theta}$ ait pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$[1].
Dans ces conditions, pour un vecteur $\Theta \in \mathbf{S}^1$ fixé et un réel s fixé, on notera $D_{\theta,s}$ la droite formée des points $\mathbf{x}$ du plan tels $\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta} = s$ (où $\cdot$ désigne le produit scalaire euclidien sur $\mathbf{R}^2$). Le vecteur $\mathbf{\Theta}$ est alors un vecteur normal à la droite $D_{\theta,s}$, et s désigne la distance "algébrique" entre l'origine du repère et la

[1] Dans la suite du manuscrit, on associera tacitement le vecteur $\Theta \in \mathbf{S}^1$ à l'angle $\theta \in [0, 2\pi[$.

droite $D_{\theta,s}$. On assimilera ainsi une droite à deux paramètres, appartenant au produit cartésien $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$; ce produit cartésien est parfois appelé le *cylindre* $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$. Ces notations étant introduites, on peut définir la transformée de Radon d'une fonction f, dont on pourra visualiser les paramètres en figure (2.1).

Définition 2.1.1 (Transformée de Radon)
Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$. On appelle transformée de Radon de la fonction f la fonction $\mathcal{R}f$ définie sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ par

$$\forall(\mathbf{\Theta}, s) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R},\ \mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}, s) = \int_{\{\mathbf{x} \in D_{\theta,s}\}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 | \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} = s\}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{t \in \mathbf{R}} f\left(s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^{\perp}\right) dt$$

L'appartenance de la fonction f à l'espace $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$ assure l'existence de la transformée de Radon. En effet,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2,\ |1_{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}=s}(\mathbf{x})f(\mathbf{x})| \leq |f(\mathbf{x})|$$

et donc si $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$, alors $1_{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}=s}f$ est intégrable sur $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$, et l'intégrale existe et est finie.
On peut d'ores et déjà remarquer que pour les fonctions que l'on cherche à modéliser en pratique, la transformée de Radon est bien définie ; en effet, une densité relative à une section d'un organisme est une fonction définie sur $\mathbf{R}^2$, bornée, et à support compact ; une telle fonction appartient bien à l'espace $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$.

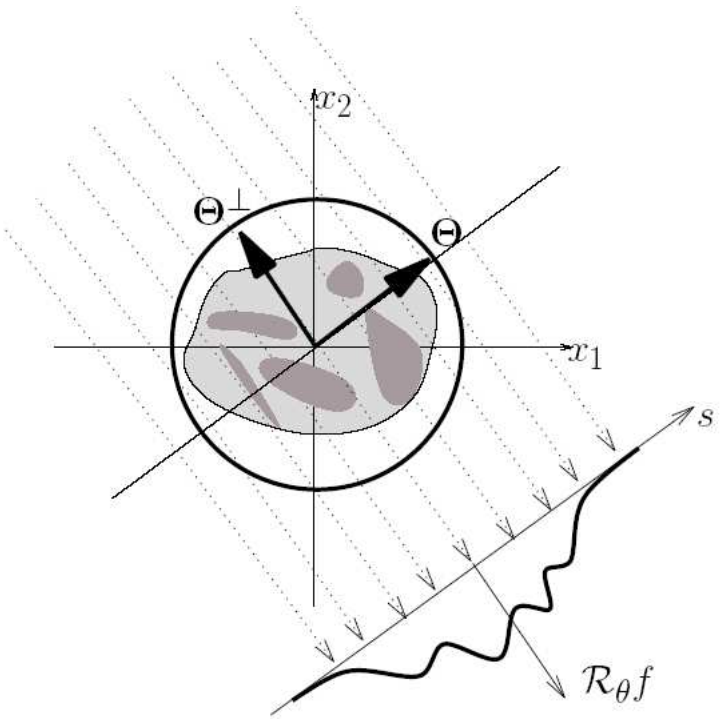


FIG. 2.1 – Paramètres de la transformée de Radon en géométrie parallèle 2D : on note $\mathbf{\Theta}$ la codirection (unitaire) du faisceau de rayons X, et s repère l'abscisse de contact d'un rayon avec le détecteur linéaire.

Ainsi définie, la transformée de Radon peut être interprétée selon deux points de vue :

– la transformée de Radon d'une fonction peut d'abord être vue comme une famille de projections réalisées au fil de directions successives, au sein de laquelle toutes les projections réalisées pour une même direction $\mathbf{\Theta}$ le sont selon des directions parallèles entre elles, et peuvent être

rassemblées dans un même objet et étudiées indépendamment des autres projections. Pour une incidence $\mathbf{\Theta} = (\cos\theta, \sin\theta)$ fixée, on note ainsi $\mathcal{R}_\theta$ la fonction à une variable définie par

$$\forall s \in \mathbf{R}, \mathcal{R}_\theta f(s) = \mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}, s)$$

Notons que lorsque la fonction f est isotrope (*ie* radiale), la dépendance en $\mathbf{\Theta}$ de la transformée de Radon disparaît, et toutes les fonctions $\{\mathcal{R}_\theta f; \theta \in [0, 2\pi[\}$ sont égales.

– la transformée de Radon d'une fonction peut également être étudiée de manière globale, comme un ensemble de projections dans lequel, à la différence de l'approche précédente, les projections sont liées entre elles "autant" par la variable θ que par la variable s. Pour visualiser cette cohérence globale entre projections, on utilise *un sinogramme* : le sinogramme est une représentation d'une fonction de deux variables, θ et s, définie sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ (des exemples seront donnés ensuite).
On a coutume de représenter un sinogramme "déplié" sur le rectangle $[0, 2\pi[\times\mathbf{R}$, dans lequel le niveau de gris attribué au point de coordonnées (θ, s) représente la valeur $\mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}, s)$ prise par la transformée de Radon de f le long de la droite $D_{\theta,s}$. En particulier,

  – chaque colonne du sinogramme représente la transformée de Radon pour une direction $\mathbf{\Theta}$ fixée ;

  – à une droite $D_{\theta,s}$ du *domaine direct* [2] $\mathbf{R}^2$ est associée un point dans le sinogramme, le point de coordonnées (θ, s) ;

  – à un faisceau de droites concourantes du domaine direct est associée une sinusoïde dans le domaine de Radon : en effet, si l'on considère le point $(\mathbf{x_0} = |\mathbf{x_0}|(\cos\theta_0, \sin\theta_0) = |\mathbf{x_0}|\mathbf{\Theta}_0)$ du domaine direct, les droites qui passent par ce point sont exactement les droites $\{D_{\theta,\mathbf{x_0}\cdot\mathbf{\Theta}}; \theta \in [0, 2\pi[\}$; Les valeurs de la transformée de Radon selon ces droites sont alors consignées dans le sinogramme le long de la courbe d'équation $s = \mathbf{x_0} \cdot \mathbf{\Theta}$, c'est-à-dire $s = |\mathbf{x_0}|\cos(\theta_0 - \theta)$, qui désigne une sinusoïde. Ces sinusoïdes matérialisent la cohérence entre projections successives, quand on calcule la transformée de Radon de la fonction en pivotant autour d'un point du domaine direct ;

  – enfin, de manière réciproque, à une sinusoïde du domaine de Radon est associé un point du domaine direct : toutes les droites du domaine direct dont l'image appartient à la sinusoïde sont concourantes au point de coordonnées $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, où ρ est l'amplitude de la sinusoïde, et θ sa phase.

Nous illustrons maintenant la définition de la transformée de Radon par un exemple : celui de la transformée de Radon d'une ellipse remplie de manière homogène avec une densité constante. Cet exemple est important dans le sens où les images de synthèse que l'on a coutume d'utiliser pour valider les algorithmes de reconstruction (que l'on appelle les *fantômes*) sont souvent des fonctions obtenues par combinaisons linéaires d'indicatrices d'ellipses.

Exemple 2.1.1 (Transformée de Radon d'une ellipse homogène)
Premier cas : cas d'une ellipse centrée à l'origine du repère, dont les axes sont alignés avec les axes du repère.
On se place dans le repère canonique orthonormal de $\mathbf{R}^2$ et on s'intéresse à une ellipse $\mathcal{E}$ centrée au centre du repère, d'axes confondus avec les axes du repère, dont le premier axe a pour demi-longueur

[2] Nous parlerons de *domaine direct* pour désigner le plan $\mathbf{R}^2$ où vit la fonction f, par opposition au *domaine de Radon* qui désignera le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ sur lequel est définie la famille de projections $\mathcal{R}f$.

$a > 0$ et le second a pour demi-longueur $b > 0$, c'est-à-dire l'ellipse d'équation :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \tag{2.1}$$

dont on remplit l'intérieur avec une densité constante f, égale à 1.
Comme la densité est homogène, la transformée de Radon $\mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}, s)$, pour θ et s fixés, est égale à la longueur de l'intersection de la droite $D_{\theta,s} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2; \mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta} = s\}$ avec l'intérieur de l'ellipse. Pour calculer cette longueur, on résout d'abord le système suivant, dont les solutions éventuelles fournissent les points d'intersection de la droite avec l'ellipse :

$$\mathbf{x}(x_1, x_2) \in D_{\theta,s} \cap \mathcal{E} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta & = & s \\ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} & = & 1 \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Pour $\theta \neq 0\ [\pi]$, on est ramené à la recherche des racines du polynôme du second degré en x_1

$$P(x_1) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{s - x_1\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 - 1 = x_1^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2\sin^2\theta}\right) - \frac{2s\cos\theta}{b^2\sin^2\theta}x_1 + \frac{s^2}{b^2\sin^2\theta} - 1$$

dont le discriminant est

$$\Delta(\theta, s) = \frac{4s^2\cos^2\theta}{b^4\sin^4\theta} - 4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2\sin^2\theta}\right)\left(\frac{s^2}{b^2\sin^2\theta} - 1\right) = 4\frac{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - s^2}{a^2b^2\sin^2\theta}$$

On en déduit les expressions des couples solutions de $(\mathcal{S}_{\theta,s})$ - lorsqu'ils existent -, puis la valeur de la transformée de Radon :

$$\mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}, s) = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{(x_1' - \tilde{x}_1)^2 + (x_2' - \tilde{x}_2)^2} & \textit{si } \Delta(\theta, s) > 0 \\ 0 & \textit{sinon} \end{array} \right.$$

où on a noté $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ et (x_1', x_2') les deux couples solutions de $(\mathcal{S}_{\theta,s})$ dans le cas où $\Delta(\theta, s)$ est strictement positif. On obtient alors, en fonction de θ et s,

$$\mathcal{R}f(\Theta, s) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2ab}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - s^2} & \textit{si } |s| < \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \\ 0 & \textit{sinon} \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Pour $\theta = 0$, les solutions du système (2.2) sont les couples $\left(s, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - s^2}\right)$ et $\left(s, -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - s^2}\right)$ pour $|s| < a$ et on a

$$\mathcal{R}_0 f(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - s^2} & \textit{si } |s| < a \\ 0 & \textit{sinon} \end{array} \right.$$

prolongeant ainsi la validité de la formule (2.3) au cas $\theta = 0$.
De la même manière, pour $\theta = \pi$, les solutions du système $(S_{\pi,-s})$ sont les couples $(-s, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - s^2})$ et $(-s, -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - s^2})$ pour $|s| < a$ et on a

$$\mathcal{R}_\pi f(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - s^2} & \textit{si } |s| < a \\ 0 & \textit{sinon} \end{array} \right.$$

prolongeant ainsi la validité de la formule (2.3) au cas $\theta = \pi$ [3].
On obtient donc finalement comme expression de la transformée de Radon pour l'ellipse homogène d'équation (2.1)

$$\boxed{\mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}, s) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2ab}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - s^2} & \textit{si } |s| < \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \\ 0 & \textit{sinon} \end{array} \right.}$$

[3] Le cas $\theta = \pi$ peut aussi se déduire directement du cas $\theta = 0$ en exploitant la *parité* de la transformée de Radon que nous exposerons ensuite.

On constate en particulier que son support est limité par les deux courbes d'équation $s = \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$ *et* $s = -\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$ *dans le plan* (θ, s).

On peut mentionner le cas particulier important obtenu pour le disque unité, pour lequel $a = b = 1$, *où l'on a alors*

$$\mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}, s) = \begin{cases} 2\sqrt{1-s^2} & \text{si } |s| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.4}$$

La densité f *est isotrope, et la transformée de Radon est bien, comme on l'a dit plus haut, indépendante de la direction* $\mathbf{\Theta}$.

Deuxième cas : cas où l'ellipse est centrée au point $\mathbf{M_0} = \rho_0(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$, et tournée d'un angle ψ_0 par rapport aux axes du repère.

On note

- $(O, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$ *le repère canonique de* $\mathbf{R}^2$;
- $f^{\psi_0,\rho_0,\varphi_0}$ *la densité de l'ellipse exprimée dans* $(O, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$;
- $(M_0, \mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2})$ *le repère attaché à l'ellipse.*

On peut donner les mesures des angles orientés suivants : $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e'_1}) = \psi_0$, $(\mathbf{e_1}, \mathbf{\Theta}) = \theta$, *donc* $(\mathbf{e'_1}, \mathbf{\Theta}) = \theta - \psi_0$.

On fixe (θ, s), *et on considère la droite* $D_{\theta,s}$, *repérée par le couple* (θ, s) *dans le repère* $(O, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$. *On veut déterminer ses coordonnées par rapport au repère* $(M_0, \mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2})$, *dans lequel l'ellipse est centrée, avec des axes alignés avec les axes du repère.*

La distance (algébrique) entre le point $\mathbf{M_0}$ *et la droite* $D_{\theta,s}$ *est égale à* $\mathbf{M_0A} \cdot \mathbf{\Theta}$, *où* A *est un point quelconque de* $D_{\theta,s}$. *En travaillant avec des coordonnées exprimées dans le repère* $(O, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$, *et en choisissant comme point A par exemple le point de coordonnées* $(s\cos\theta, s\sin\theta)$, *cette distance est égale à*

$$(s\cos\theta - \rho_0\cos\varphi_0)\cos\theta + (s\sin\theta - \rho_0\sin\varphi_0)\sin\theta = s - \rho_0\cos(\varphi_0 - \theta)$$

De plus, le vecteur $\mathbf{\Theta}$ *a pour coordonnées* $(\cos(\mathbf{e'_1}, \mathbf{\Theta}), \sin(\mathbf{e'_1}, \mathbf{\Theta})) = (\cos(\theta - \psi_0), \sin(\theta - \psi_0))$. *Dans le repère* $(M_0, \mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2})$, *la droite* $D_{\theta,s}$ *est donc la droite* $D_{\theta-\psi_0, s-\rho_0\cos(\varphi_0-\theta)}$, *dont on sait exprimer la transformée de Radon en se ramenant au premier cas vu plus haut :*

$$\mathcal{R}f^{\psi_0,\rho_0,\varphi_0}(\mathbf{\Theta}, s) = \begin{cases} \frac{2ab\sqrt{a^2\cos^2(\theta-\psi_0)+b^2\sin^2(\theta-\psi_0)-(\rho_0\cos(\varphi_0-\theta)-s)^2}}{a^2\cos^2(\theta-\psi_0)+b^2\sin^2(\theta-\psi_0)} \\ \qquad \text{si } |s-\rho_0\cos(\varphi_0-\theta)| < \sqrt{a^2\cos^2(\theta-\psi_0)+b^2\sin^2(\theta-\psi_0)} \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : *dans la suite, des résultats seront établis pour le cas bien particulier de l'indicatrice de disque centrée au centre du repère (que nous noterons ici* $f^{0,0,0}$, *pour laquelle* $a = 1, b = 1, \varphi_0 = 0, \rho_0 = 0, \psi_0 = 0$) ; *on pourra en déduire des résultats valables pour une ellipse quelconque, d'axes de longueurs quelconques* a *et* b, *notée comme ci-dessus* $f^{\psi_0,\rho_0,\varphi_0}$, *en remarquant que*

$$\mathcal{R}f^{\psi_0,\rho_0,\varphi_0}(\mathbf{\Theta}, s) = \frac{ab}{\sqrt{a^2\cos^2(\theta-\psi_0)+b^2\sin^2(\theta-\psi_0)}}\mathcal{R}f^{0,0,0}\left(\mathbf{\Theta}, \frac{s-\rho_0\cos(\varphi_0-\theta)}{\sqrt{a^2\cos^2(\theta-\psi_0)+b^2\sin^2(\theta-\psi_0)}}\right)$$

A titre d'illustration, on présente en figure 2.2 le sinogramme d'une boule quasi ponctuelle (c'est une sinusoïde), puis celui de deux ellipses, l'une correspondant au premier cas, l'autre correspondant au deuxième cas.

Exemple 2.1.2 (Transformée de Radon du fantôme de Shepp et Logan)

Comme on l'a dit plus haut, les validations des algorithmes de reconstruction en tomographie se font dans un premier temps sur des images tests qui sont en général obtenues par combinaison linéaire finie

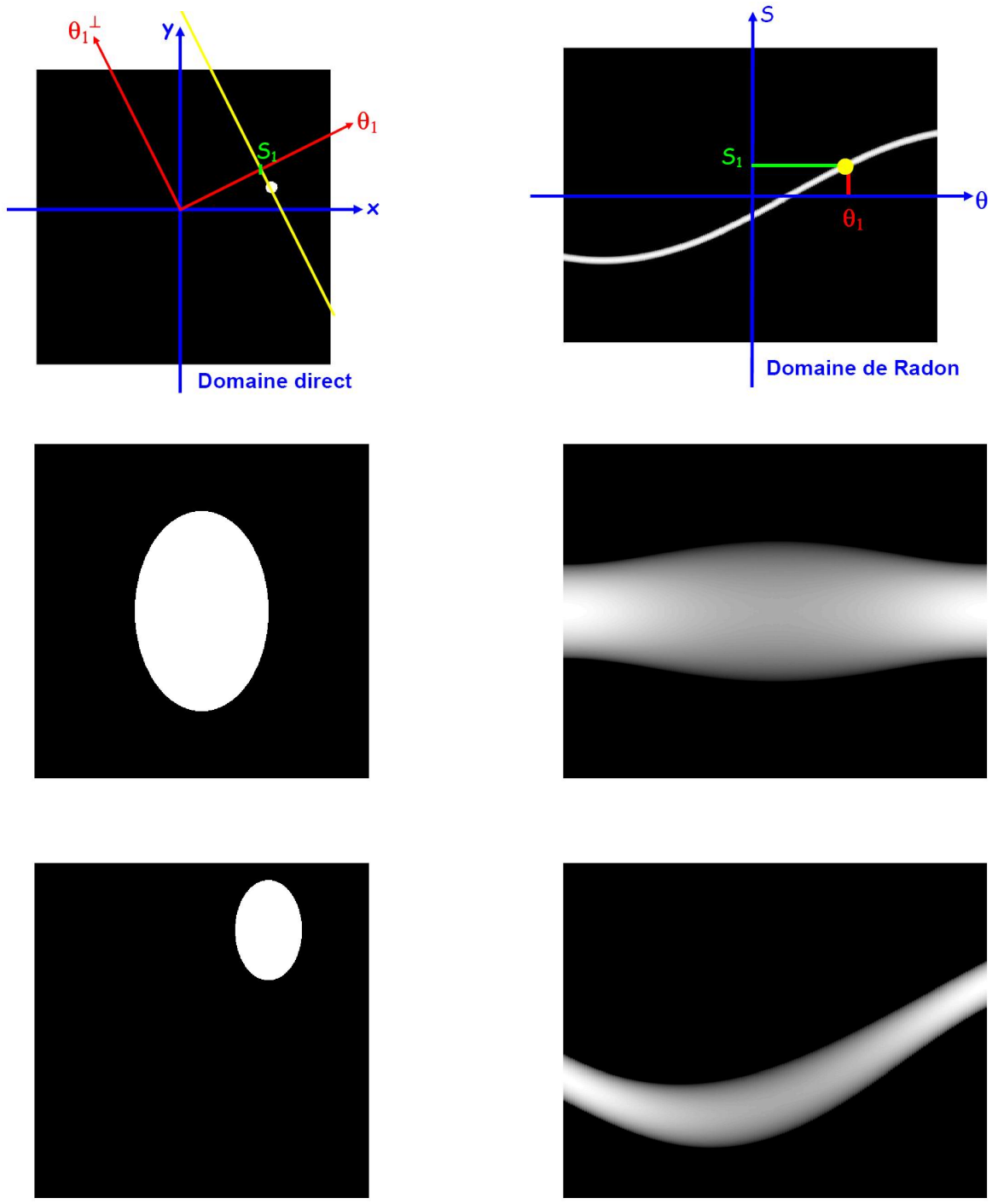


FIG. 2.2 – En haut, le sinogramme d'un disque quasi-ponctuel : la valeur de la transformée de Radon mesurée selon la droite jaune dans le domaine direct est consignée au point jaune dans le domaine de Radon, puis, quand on fait pivoter la droite dans le domaine direct autour d'un point (ici en blanc) , les valeurs relevées sont consignées le long d'une courbe qui s'avère être une sinusoïde dans le domaine de Radon. En dessous, le sinogramme d'une ellipse centrée et celui d'une ellipse décentrée. La variable θ est consignée en abscisses, la variable s est en ordonnées.

d'indicatrices de domaines réguliers du plan (c'est-à-dire des fonctions constantes sur des domaines dont la frontière est au moins de classe $\mathcal{C}^2$), dont le prototype est l'ellipse. Un des fantômes les plus utilisés est le fantôme de Shepp et Logan, qui sera notre référence principale dans ce manuscrit. Comme on peut le voir en figure (2.3) il est constitué d'ellipses de densités constantes. Sa description précise est donnée par Shepp et Logan dans [95], où les auteurs expliquent qu'ils ont cherché à représenter le plus fidèlement possible une coupe du cerveau humain. Sa transformée de Radon est une combinaison linéaire des transformées de Radon respectives de chacune des ellipses.

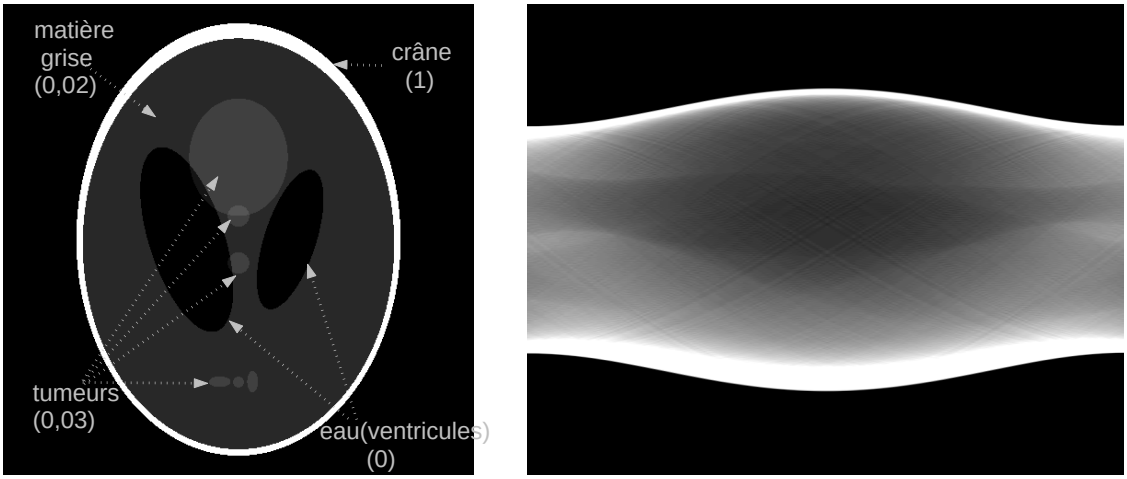


FIG. 2.3 – Le fantôme de Shepp et Logan et son sinogramme

2.1.2 Propriétés de la fonction $\mathcal{R}f$

Nous présentons ici quelques propriétés des fonctions obtenues après application de la transformée de Radon.

Proposition 2.1.1 (Parité de la transformée de Radon)
La transformée de Radon est une fonction paire sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$, au sens où, pour toute fonction f appartenant à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$, on a

$$\forall(\mathbf{\Theta}, s) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R},\ \mathcal{R}f(-\mathbf{\Theta}, -s) = \mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}, s)$$

ou, autrement dit

$$\forall(\theta, s) \in [0, 2\pi[\times\mathbf{R},\ \mathcal{R}f_{\theta+\pi}(-s) = \mathcal{R}f_\theta(s)$$

Preuve .

$$\begin{aligned}\forall(\mathbf{\Theta}, s) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R},\ \mathcal{R}f(-\mathbf{\Theta}, -s) &= \int_{t\in\mathbf{R}} f\left(-s(-\mathbf{\Theta}) + t(-\mathbf{\Theta}^\perp\right) dt = \int_{t\in\mathbf{R}} f(s\mathbf{\Theta} - t\mathbf{\Theta}^\perp)dt \\ &= \int_{\tau\in\mathbf{R}} f(s\mathbf{\Theta} + \tau\mathbf{\Theta}^\perp)d\tau = \mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}, s)\end{aligned}$$

■

Proposition 2.1.2 (Support de la transformée de Radon d'une fonction à support compact)
Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$, à support inclus dans le disque unité de $\mathbf{R}^2$ noté $\mathbf{\Omega}$. Quelle que soit la direction $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1$, le support de la fonction $\mathcal{R}_\theta f$ est inclus dans l'intervalle $[-1, 1]$, et le support de la fonction $\mathcal{R}f$ est inclus dans le cylindre unité $\mathbf{S}^1 \times [-1, 1]$.

Preuve. Si le support de la fonction f est inclus dans le disque unité $\mathbf{\Omega}$, alors la transformée de Radon de f est égale à

$$\forall(\mathbf{\Theta}, s) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R},\ \mathcal{R}_\theta f(s) = \int_{\{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega}|\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}=s\}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

On fixe $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1$; $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2, |\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{\Theta}\| = \|\mathbf{x}\|$, donc :

$$\mathbf{x} \in \mathbf{\Omega} \Rightarrow |\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}| \leq 1$$

et

$$\forall s \in \mathbf{R}, |s| > 1 \Rightarrow \{\mathbf{x} \in \mathbf{\Omega}|\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} = s\} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{R}_\theta f(s) = 0.$$

ce qui prouve que le support de la fonction $\mathcal{R}_\theta f$ est inclus dans $[-1, 1]$.
Par extension, le support de la transformée de Radon $\mathcal{R}f$ est donc inclus dans l'ensemble $\mathbf{S}^1 \times [-1, 1]$. ■

Proposition 2.1.3 (Intégrabilité des projections)
Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$, alors pour tout $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1$, la fonction $\mathcal{R}_\theta f$ appartient $\mathbf{L}^1(\mathbf{R})$.

Preuve. On fixe $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1$.

$$\forall s \in \mathbf{R},\ |\mathcal{R}_\theta f(s)| = \left|\int_{\mathbf{R}} f(s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp)dt\right| \leq \int_{\mathbf{R}} \left|f(s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp)\right| dt$$

et

$$\int_{\mathbf{R}} |\mathcal{R}_\theta f(s)|ds \leq \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} \left|f(s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp)\right| dtds = \int_{\mathbf{R}^2} |f(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} < \infty\ ,\ \text{car } f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$$ ■

Nous introduisons maintenant une propriété qui joue un rôle fondamental dans l'étude de la transformée de Radon, et notamment dans son inversion, comme on le verra par la suite, et qui fait appel à la transformée de Fourier. Précisons d'ores et déjà que dans ce manuscrit, nous adoptons la normalisation suivante pour définir la transformée de Fourier d'une fonction intégrable f sur $\mathbf{R}^n$, où n appartient à $\mathbf{N}^*$:

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbf{R}^n, \hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}$$

Pour une fonction f du domaine direct fixée, la propriété qui suit établit un lien entre la transformée de Fourier de la fonction f et la transformée de Fourier de sa transformée de Radon. Nous l'énonçons ici dans le cas où la fonction f appartient à l'espace de Schwartz des fonctions du plan, que nous notons $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$. Nous verrons ensuite - après avoir établi la continuité de l'opérateur $\mathcal{R}$ sur $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ - qu'elle peut être prolongée à l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$.

Proposition 2.1.4 (Le théorème de coupe projection)
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$. Alors pour tout $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1$, $\mathcal{R}_\theta f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, et

$$\forall \omega \in \mathbf{R}, \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\omega\mathbf{\Theta})$$

Preuve. On fixe $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1$; si f appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, alors en particulier f appartient à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$, et d'après la propriété (2.1.3), la fonction $\mathcal{R}_\theta f$ appartient à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R})$. On peut donc calculer sa transformée de Fourier, et on a

$$\begin{aligned}\forall \omega \in \mathbf{R}, \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}_\theta f(s)e^{-i\omega s}ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}\left(\int_{\mathbf{R}} f(s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp)dt\right)e^{-i\omega s}ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2} f(\mathbf{x})e^{-i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}}d\mathbf{x} = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\omega\mathbf{\Theta})\end{aligned}$$

Pour prouver l'appartenance de $\mathcal{R}_\theta f$ à l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, il suffit de remarquer que comme f appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, sa transformée de Fourier $\hat{f}$ appartient aussi à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$; grâce à l'égalité précédente, ceci implique que la fonction $\widehat{\mathcal{R}_\theta f}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, d'où l'on déduit que la fonction $\mathcal{R}_\theta f$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. ■

2.1.3 Propriétés de l'opérateur $\mathcal{R}$

Nous exposons maintenant une autre famille de propriétés, en ne nous plaçant plus au niveau des fonctions obtenues par application de la transformée de Radon, mais au niveau de l'opérateur $\mathcal{R}$ lui-même. Dans la première propriété ci-dessous, nous montrons que $\mathcal{R}$ est un opérateur linéaire et continu, et nous explicitons son opérateur adjoint. Pour cela, rappelons d'abord que pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$, muni du produit scalaire

$$< f, g >= \int_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n} \overline{f(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

est un espace de Hilbert. De la même manière, on peut montrer que l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R})$ des fonctions définies sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ telles que

$$\int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |g(\theta, s)|^2 ds d\theta < \infty$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par

$$[g, h] = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \overline{g(\theta, s)} h(\theta, s) ds d\theta$$

Pour établir certaines des propriétés qui vont suivre, nous aurons besoin de formuler une hypothèse supplémentaire sur la fonction f que l'on cherche à reconstruire, à savoir que f sera supposée à support compact - et sans restriction de la généralité, à support compact inclus dans le disque unité de $\mathbf{R}^2$, noté $\mathbf{\Omega}$. Cette hypothèse supplémentaire, commode pour établir certains résultats théoriques, n'entre pas en contradiction avec les objectifs de modélisation que nous nous sommes fixés, dans la mesure où en pratique, les fonctions f que l'on cherche à identifier modélisent des densités à support sur des sections de l'organisme, et sont donc bien à support compact.
Nous supposerons donc dans cette partie que les fonctions f manipulées sont des éléments de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$, à support inclus dans le disque unité fermé $\mathbf{\Omega}$; elles appartiennent donc à l'ensemble $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$ des fonctions de carré intégrable sur $\mathbf{\Omega}$. Rappelons ici que si B est un sous-ensemble **borné** de $\mathbf{R}^n$, l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur B, muni du produit scalaire[4]

$$< f, g >= \int_{\mathbf{x}\in\mathbf{B}} \overline{f(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

est un espace de Hilbert, noté $\mathbf{L}^2(\mathbf{B})$. De la même manière, l'espace des fonctions de carré intégrable sur le cylindre unité $\mathbf{S}^1 \times [-1, 1]$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$[g, h] = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \overline{g(\theta, s)} h(\theta, s) ds d\theta$$

Proposition 2.1.5 (Continuité et adjoint entre espaces $\mathbf{L}^2$)

1. *Pour toute direction $\mathbf{\Theta}$ appartenant à $\mathbf{S}^1$, l'opérateur $\mathcal{R}_\theta$ est linéaire et continu de $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$ dans $\mathbf{L}^2([-1, 1])$; son opérateur adjoint, noté $\mathcal{R}_\theta^*$, est linéaire et continu de $\mathbf{L}^2([-1, 1])$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$, et vérifie*

$$\forall g \in \mathbf{L}^2([-1, 1]),\ \mathcal{R}_\theta^* g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta})$$

[4] Le produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$ défini plus haut et le produit scalaire sur $\mathbf{\Omega}$ défini ici seront notés de manière identique dans ce manuscrit ; nous les distinguerons en mentionnant explicitement le domaine d'intégration.

2. *l'opérateur $\mathcal{R}$ est linéaire et continu de $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$ dans $\mathbf{L}^2(S^1 \times [-1,1])$; son opérateur adjoint, noté $\mathcal{R}^*$, est continu de $\mathbf{L}^2(S^1 \times [-1,1]$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$, et vérifie*

$$\forall h \in \mathbf{L}^2(S^1 \times [-1,1]),\ \mathcal{R}^* h(\mathbf{x}) = \int_0^{2\pi} h(\mathbf{\Theta}, \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}) d\theta$$

Preuve . La linéarité des opérateurs $\mathcal{R}_\theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$, ainsi que celle de l'opérateur $\mathcal{R}$, découlent immédiatement de la linéarité de l'intégrale.
Soit alors $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$ et $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1$. Alors, d'après la propriété (2.1.2), pour tout θ, le support de $\mathcal{R}_\theta f$ est inclus dans $[-1,1]$, et on a

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} |\mathcal{R}_\theta f(s)|^2 \, ds = \int_{-1}^{1} \left| \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f\left(s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp\right) dt \right|^2 ds \\
\leq\ & \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \left| f\left(s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp\right)\right|^2 dt \right) \left(\int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} 1^2 dt \right) ds \text{ (théorème de Cauchy-Schwarz)} \\
=\ & \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \left| f\left(s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp\right)\right|^2 dt \right) 2\sqrt{1-s^2} ds \leq 2 \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \left| f\left(s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp\right)\right|^2 dt \right) ds \\
=\ & 2 \int_{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega}} |f(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} = 2\|f\|^2_{\mathbf{L}^2} < \infty \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{R}_\theta f$ appartient à $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$, et que l'opérateur $\mathcal{R}_\theta$ est continu de l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$ dans $\mathbf{L}^2([-1,1])$.
On sait alors que $\mathcal{R}_\theta$ admet un opérateur adjoint noté $\mathcal{R}^*_\theta$, unique, linéaire et continu de $\mathbf{L}^2([-1,1])$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$, tel que

$$\forall g \in \mathbf{L}^2([-1,1]), \forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega}),\ < \mathcal{R}_\theta \mathbf{f}, \mathbf{g} > = < \mathbf{f}, \mathcal{R}^*_\theta \mathbf{g} >$$

On peut expliciter $\mathcal{R}^*_\theta$:

$$\begin{aligned}
\forall g \in \mathbf{L}^2([-1,1]), \forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega}), \qquad & < \mathcal{R}^*_\theta g, f > = < g, \mathcal{R}_\theta f > = \int_{-1}^{1} \overline{g(s)} \mathcal{R}_\theta f(s) ds \\
= \ & \int_{-1}^{1} \overline{g(s)} \int_{\mathbf{R}} f(s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp) dt ds = \int_{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega}} \overline{g(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

et on fait ainsi apparaître l'expression de l'adjoint de l'opérateur $\mathcal{R}_\theta$:

$$\forall g \in \mathbf{L}^2([-1,1]),\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{\Omega},\ \mathcal{R}^*_\theta \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})$$

Prolongeant (2.5), on a

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} |\mathcal{R}_\theta f(s)|^2 \, ds d\theta \leq 2 \int_0^{2\pi} \|f\|^2_{\mathbf{L}^2} d\theta = 4\pi \|f\|^2_{\mathbf{L}^2}$$

ce qui montre que $\mathcal{R}f$ appartient à $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times [-1,1])$, et que l'opérateur $\mathcal{R}$ est continu de l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times [-1,1])$. L'opérateur $\mathcal{R}$ admet donc un opérateur adjoint, que l'on peut expliciter de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\forall g \in \mathbf{L}^2([-1,1]), \qquad & \forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega}),\ < \mathcal{R}^* \mathbf{g}, \mathbf{f} > = [\mathbf{g}, \mathcal{R}\mathbf{f}] = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2\pi}} < \mathbf{g}_\theta, \mathcal{R}_\theta \mathbf{f} > \mathbf{d}\theta \\
= \ & \int_0^{2\pi} < \mathcal{R}^*_\theta g, f > d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega}} \overline{g_\theta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\theta \\
= \ & \int_{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega}} \left(\int_0^{2\pi} \overline{g(\mathbf{\Theta}, \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})} d\theta \right) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega}} \overline{\left(\int_0^{2\pi} g(\mathbf{\Theta}, \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}) d\theta \right)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

et on fait ainsi apparaître l'expression de l'adjoint de l'opérateur $\mathcal{R}$

$$\forall g \in \mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times [-1,1]),\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{\Omega},\ \mathcal{R}^*\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2\pi}} \mathbf{g}(\mathbf{\Theta}, \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})\mathbf{d}\theta \tag{2.6}$$

■

Remarque : L'opérateur $\mathcal{R}^*$, défini comme adjoint de $\mathcal{R}$ sur $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1\times[-1,1])$ dans la propriété précédente, est appelé *opérateur de rétroprojection*. Sous sa forme explicite (2.6), il peut être prolongé à un ensemble plus grand que $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times [-1,1])$: à partir du moment où, pour tout $\mathbf{x}$ appartenant à $\mathbf{\Omega}$, la fonction $\theta \mapsto g(\mathbf{\Theta}, \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$, l'intégrale à paramètre est définie [45]. L'opérateur de rétroprojection ainsi prolongé est communément noté $\mathcal{R}^{\#}$, (au lieu de la notation pour l'adjoint $\mathcal{R}^*$), et nous retiendrons pour la suite la définition suivante

$$\boxed{\forall \mathbf{x} \in \mathbf{\Omega},\ \mathcal{R}^{\#}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2\pi}} \mathbf{g}(\mathbf{\Theta}, \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})\mathbf{d}\theta}$$

Appliqué à une fonction définie sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times [-1,1]$ (c'est-à-dire sur l'ensemble des droites du plan traversant le disque unité $\mathbf{\Omega}$ de $\mathbf{R}^2$), il permet d'accumuler en chaque point du domaine direct la somme des valeurs associées aux droites qui passent par ce point, comme l'illustre le schéma (2.4). Comme nous le verrons ensuite, il joue un rôle-clé dans l'algorithme de reconstruction par rétroprojection filtrée.

Remarque importante : la continuité de l'opérateur $\mathcal{R}$ de l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$ dans l'espace $\mathbf{L}^2(S^1 \times [-1,1])$ prouvée dans la propriété (2.1.5) admet un corollaire important. Elle permet en effet de prolonger à l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$ toutes les propriétés établies dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ (ou établies au moins dans l'espace $\mathcal{C}_0^\infty$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, inclus dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$), et ceci en exploitant la densité de $\mathcal{C}_0^\infty$, donc *a fortiori* de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$. Ainsi, par exemple, le théorème de coupe-projection énoncé dans la propriété (2.1.4) pour des fonctions appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ se prolonge en une égalité des transformées de Fourier dans l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$.

Comme on l'a vu plus haut, lors de l'énoncé du théorème de coupe-projection, le domaine de Fourier peut jouer le rôle de domaine intermédiaire entre le domaine direct et le domaine de Radon. Le théorème de coupe-projection établit ainsi le lien entre la transformée de Fourier d'une fonction du domaine direct, et la transformée de Fourier, par rapport à la variable s, de sa transformée de Radon. Dans la propriété qui suit, on établit une relation entre la transformée de Fourier, par rapport à la variable s, d'une fonction du domaine de Radon, et la transformée de Fourier de sa *rétroprojetée* dans le domaine direct.

Proposition 2.1.6 (Transformée de Fourier de l'opérateur de rétroprojection)
Soit g une fonction appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R})$. Alors la fonction $\mathcal{R}^{\#}g$ appartient à l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$, et sa transformée de Fourier vérifie

$$\widehat{\mathcal{R}^{\#}g}(\mathbf{k}) = \sqrt{2\pi}\frac{1}{|\mathbf{k}|}\left(\widehat{g}\left(\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, |\mathbf{k}|\right) + \widehat{g}\left(-\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, -|\mathbf{k}|\right)\right)$$

où $\hat{g}$ désigne la transformée de Fourier de la fonction g par rapport à sa variable $s \in \mathbf{R}$, et où l'égalité est à prendre au sens faible dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$.

Preuve . On a vu plus haut que l'opérateur $\mathcal{R}^{\#}$, opérateur adjoint de l'opérateur $\mathcal{R}$, est défini sur $\mathbf{L}^2(S^1 \times \mathbf{R})$, à valeurs dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$. Sa transformée de Fourier, au sens de l'espace $\mathbf{L}^2$, est bien

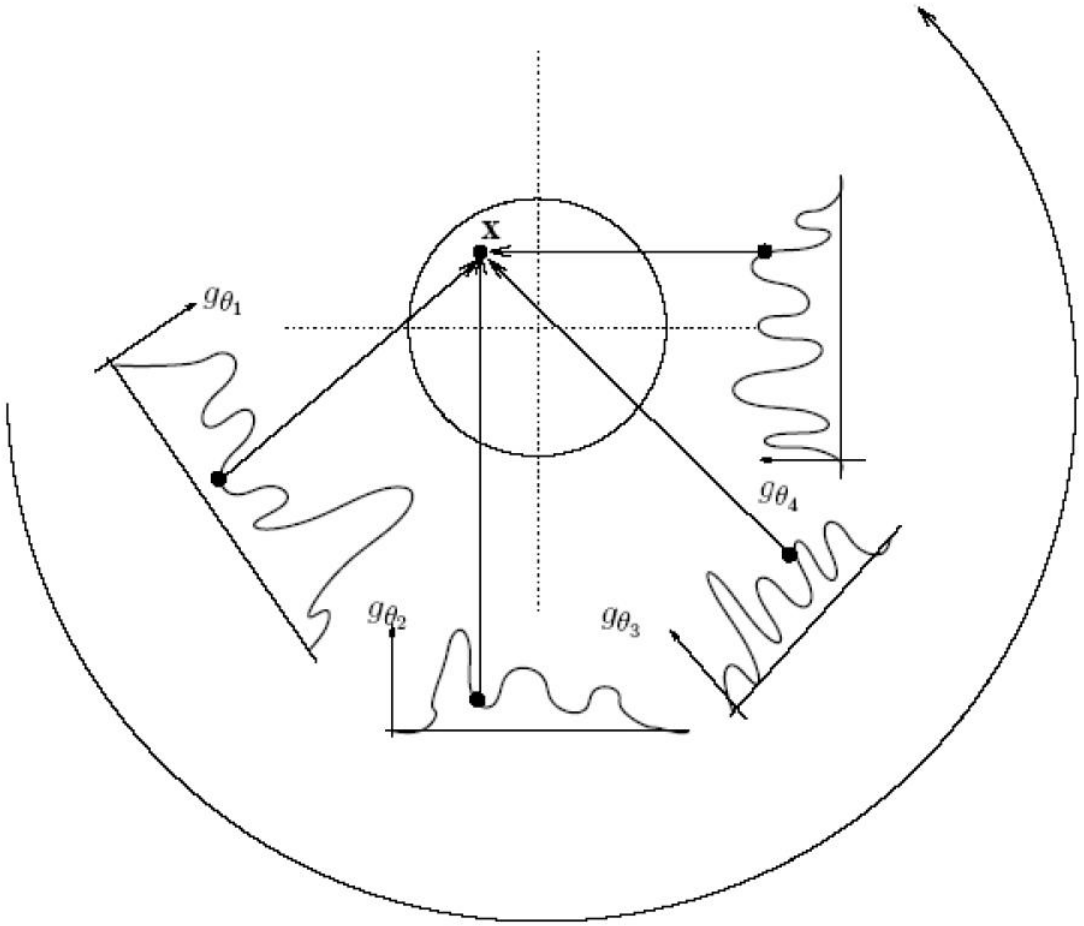


FIG. 2.4 – Le rôle de l'opérateur de rétroprojection filtrée $\mathcal{R}^{\#}$: appliqué à une fonction g du domaine de Radon, il permet d'accumuler en un point $\mathbf{x}$ appartenant au disque unité du domaine direct les valeurs $g(\mathbf{\Theta}, \mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta})$ pour $\mathbf{\Theta}$ décrivant l'ensemble des projections.

définie, et on a

$$
\begin{aligned}
\forall \varphi \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2), \qquad & < \widehat{\mathcal{R}^{\#} g}, \varphi > = < \left(\mathcal{R}^{\#} g\right)_{\sigma}, \hat{\varphi} > \quad \text{(d'après la relation de Parseval (A.0.5))} \\
= \; & < \mathcal{R}^{\#}\left(g_{\sigma}\right), \hat{\varphi} > \quad \text{où pour tout } \theta \in [0, 2\pi[, \text{ on note } g_{\sigma}(\theta, s) = g_{\sigma}(\theta, -s) \\
= \; & [g_{\sigma}, \mathcal{R}\hat{\varphi}] = \int_0^{2\pi} < (g_{\theta})_{\sigma}, \mathcal{R}_{\theta}\hat{\varphi} > d\theta = \int_0^{2\pi} < \widehat{(g_{\theta})_{\sigma}}, \widehat{\mathcal{R}_{\theta}\hat{\varphi}} > d\theta \\
= \; & \int_0^{2\pi} < \left(\widehat{g_{\theta}}\right)_{\sigma}, \widehat{\mathcal{R}_{\theta}\hat{\varphi}} > d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \overline{\widehat{g_{\theta}}(-r)} \widehat{\mathcal{R}_{\theta}\hat{\varphi}}(r) dr d\theta \\
= \; & \sqrt{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g_{\theta}}(-r)} \hat{\hat{\varphi}}(r\mathbf{\Theta}) dr d\theta \quad \text{(d'après la propriété (2.1.4))} \\
= \; & \sqrt{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g_{\theta}}(-r)} \varphi(-r\mathbf{\Theta}) dr d\theta \stackrel{r'=r}{=} \sqrt{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g_{\theta}}(r')} \varphi(r'\mathbf{\Theta}) dr' d\theta \\
= \; & \sqrt{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \overline{\widehat{g}(\mathbf{\Theta}, r)} \varphi(r\mathbf{\Theta}) dr d\theta + \sqrt{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \overline{\widehat{g}(\mathbf{\Theta}, r)} \varphi(r\mathbf{\Theta}) dr d\theta \\
= \; & \sqrt{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \overline{\widehat{g}(\mathbf{\Theta}, r)} \varphi(r\mathbf{\Theta}) dr d\theta + \sqrt{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \overline{\widehat{g}(-\mathbf{\Theta}, -r)} \varphi(r\mathbf{\Theta}) dr d\theta \\
= \; & \sqrt{2\pi} \int_{\mathbf{k} \in \mathbf{R}^2} \left(\overline{\widehat{g}\left(\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, |\mathbf{k}|\right)} + \overline{\widehat{g}\left(-\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, -|\mathbf{k}|\right)} \right) \varphi(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \\
= \; & \sqrt{2\pi} \int_{\mathbf{k} \in \mathbf{R}^2} \overline{\left(\widehat{g}\left(\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, |\mathbf{k}|\right) + \widehat{g}\left(-\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, -|\mathbf{k}|\right) \right)} \varphi(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}
\end{aligned}
$$

ce qui permet d'identifier l'expression de la transformée de Fourier de l'adjoint $\widehat{\mathcal{R}^{\#} g}$. ■

Corollaire 2.1.1 (T. de Fourier de l'opérateur de rétroprojection en coordonnées polaires)
Soit g une fonction appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R})$; alors pour toute direction $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1$, on a

$$\widehat{\mathcal{R}^{\#} g}(\omega\mathbf{\Theta}) = \sqrt{2\pi} \, \frac{\left(\widehat{g_{\mathbf{\Theta}}}(\omega) + \widehat{g_{-\mathbf{\Theta}}}(-\omega)\right)}{|\omega|}$$

et si g est une fonction paire sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ (ie si $g(\mathbf{\Theta}, s) = g(-\mathbf{\Theta}, -s)$ pour tout $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1$, et pour tout $s \in \mathbf{R}$), alors

$$\widehat{\mathcal{R}^{\#} g}(\omega\mathbf{\Theta}) = 2\sqrt{2\pi} \frac{\widehat{g_{\theta}}(\omega)}{|\omega|}$$

Preuve . D'après la propriété précédente,

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{R}^{\#} g}(\omega\mathbf{\Theta}) \; &= \; \sqrt{2\pi} \frac{1}{|\omega|} \left(\widehat{g}\left(\mathrm{sgn}(\omega)\mathbf{\Theta}, |\omega|\right) + \widehat{g}\left(-\mathrm{sgn}(\omega)\mathbf{\Theta}, -|\omega|\right) \right) \\
&= \; \begin{cases} \sqrt{2\pi} \frac{1}{|\omega|} \left(\widehat{g}\left(\mathbf{\Theta}, \omega\right) + \widehat{g}\left(-\mathbf{\Theta}, -\omega\right) \right) & \text{si } \omega > 0 \\ \sqrt{2\pi} \frac{1}{|\omega|} \left(\widehat{g}\left(-\mathbf{\Theta}, -\omega\right) + \widehat{g}\left(\mathbf{\Theta}, \omega\right) \right) & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \qquad (2.7) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

ce qui prouve la première affirmation.
Si on suppose en plus que la fonction g est paire sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$, alors sa transformée de Fourier par rapport à la variable s est également paire, au sens où, sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, puis par prolongement sur

$\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1,\ \widehat{g}(-\mathbf{\Theta}, -\omega) &= = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(-\mathbf{\Theta}, s) e^{i\omega s} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(\mathbf{\Theta}, -s) e^{i\omega s} ds \text{ par parité de } g \\ &\overset{u=-s}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(\mathbf{\Theta}, u) e^{-i\omega u} du = \widehat{g}\,(\mathbf{\Theta}, \omega)\end{aligned}$$

Dans ces conditions, reprenant l'expression (2.7), on peut alors écrire :

$$\widehat{\mathcal{R}^{\#} g}(\omega \mathbf{\Theta}) = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{2\pi} \frac{1}{|\omega|} \left(\widehat{g}\,(\mathbf{\Theta}, \omega) + \widehat{g}\,(\mathbf{\Theta}, \omega)\right) & \text{si } \omega > 0 \\ \sqrt{2\pi} \frac{1}{|\omega|} \left(\widehat{g}\,(\mathbf{\Theta}, \omega) + \widehat{g}\,(\mathbf{\Theta}, \omega)\right) & \text{si } \omega < 0 \end{array} \right\} = 2\sqrt{2\pi} \frac{\widehat{g}\,(\mathbf{\Theta}, \omega)}{|\omega|}$$

■

La propriété (2.1.6) admet un second corollaire, dans lequel on exprime, dans le domaine de Fourier, le résultat de l'application successive de l'opérateur $\mathcal{R}$ puis de son adjoint. Ceci interviendra à l'application de l'opérateur Λ^{-1}, utilisé en Λ tomographie, que nous présenterons à la fin de ce chapitre.

Corollaire 2.1.2 (Transformée de Fourier de l'opérateur $\mathcal{R}^{\#}\mathcal{R}f$)
Soit f une fonction appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$. La transformée de Fourier de l'opérateur $\mathcal{R}^{\#}\mathcal{R}f$, à valeurs dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$, vérifie la relation suivante :

$$\widehat{\mathcal{R}^{\#}\mathcal{R}f}(\mathbf{k}) = 4\pi \frac{\hat{f}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|}$$

Preuve . D'après la propriété précédente et son premier corollaire (en utilisant la parité de la transformée de Radon (2.1.1)), puis en appliquant le théorème de coupe-projection, on peut écrire l'égalité suivante :

$$\widehat{\mathcal{R}^{\#}\mathcal{R}f}(\omega\Theta) = 2\sqrt{2\pi} \frac{\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)}{|\omega|} = 4\pi \frac{\hat{f}(\omega\Theta)}{|\omega|}$$

ce qui, en coordonnées cartésiennes, s'écrit $\widehat{\mathcal{R}^{\#}\mathcal{R}f}(\mathbf{k}) = 4\pi \dfrac{\hat{f}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|}$. ■

Nous énonçons maintenant une propriété qui montre que l'on peut exprimer une convolution dans le domaine direct par rétroprojection d'une convolution dans le domaine de Radon. Cette propriété aura des applications primordiales dans la suite, au sens où c'est sur elle que reposent notamment l'implémentation du principal algorithme d'inversion de la transformée de Radon , mais aussi certains algorithmes de reconstruction de coefficients d'ondelettes.

Proposition 2.1.7 (Rétroprojection et convolution)
Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$, et $w \in \mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R})$.

$$f * \mathcal{R}^{\#} w = \mathcal{R}^{\#} \left(\mathcal{R} f * w\right)$$

où la convolution est bidimensionnelle dans le domaine direct, et porte uniquement sur la variable $s \in \mathbf{R}$ dans le domaine de Radon.

Preuve . Remarquons d'abord que la condition $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$ assure que, pour tout $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1$, la fonction $\mathcal{R}_\theta f$ appartient à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R})$, et donc que la convolution unidimensionnelle par la fonction $w_\theta \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ est bien définie, et donne une fonction qui appartient à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ [45] :

$\forall \mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1,\ \mathcal{R}_\theta * w_\theta \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$. On peut donc lui appliquer l'opérateur $\mathcal{R}^\#$.
Ensuite, en appliquant le corollaire (2.1.1), on a, pour tout $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^\#\widehat{(\mathcal{R}f * w)}(\omega\mathbf{\Theta}) &= \sqrt{2\pi}\frac{\widehat{(\mathcal{R}f * w)}_\theta(\omega) + \widehat{(\mathcal{R}f * w)}_{\theta+\pi}(-\omega)}{|\omega|} \\
&= \sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{2\pi}\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)\widehat{w_\theta}(\omega) + \sqrt{2\pi}\widehat{\mathcal{R}_{\theta+\pi}f}(-\omega)\widehat{w_{\theta+\pi}}(\omega)}{|\omega|} \text{ (d'après la propriété (A.0.4))} \\
&= 2\pi\frac{\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega\mathbf{\Theta})\widehat{w_\theta}(\omega) + \sqrt{2\pi}\hat{f}(-\omega(-\mathbf{\Theta}))\widehat{w_{\theta+\pi}}(\omega)}{|\omega|} \text{ (d'après la propriété (2.1.4))} \\
&= \sqrt{2\pi}^3\hat{f}(\omega\mathbf{\Theta})\frac{\widehat{w_\theta}(\omega) + \widehat{w_{\theta+\pi}}(\omega)}{|\omega|} \\
&= 2\pi\hat{f}(\omega\mathbf{\Theta})\widehat{\mathcal{R}^\# w}(\omega\mathbf{\Theta}) \text{ (d'après le corollaire (2.1.1))} \\
&= \widehat{f * \mathcal{R}^\# w}(\omega\mathbf{\Theta}) \text{ (d'après la propriété (A.0.4))}
\end{aligned}$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$, on obtient l'égalité cherchée. ■

2.2 Inversion de la transformée de Radon à partir de données globales

2.2.1 Un problème inverse

Comme on l'a dit en introduction, la reconstruction en tomographie consiste à délivrer une information sur une densité f à partir des seules informations sur f que l'on sait mesurer et qui sont modélisées par la transformée de Radon. Le problème de reconstruction est donc en fait le problème de l'inversion de la transformée de Radon. Dans cette partie, nous présentons d'abord cette inversion en présence de données dites *globales*. Nous montrerons ensuite en quoi ce cadre est modifié dans le contexte qui est le nôtre dans ce manuscrit, à savoir le traitement de données *locales*.

2.2.1.1 Introduction : notion de problème inverse

Nous précisons d'abord en quel sens l'inversion de la transformée de Radon est un problème inverse.

Définition 2.2.1 (Conditions d'Hadamard et problème inverse bien posé)
Soit H et K deux espaces de Hilbert, $\mathcal{A}$ une application linéaire continue de H dans K, et $(\mathcal{P})$ le problème suivant :

$$(\mathcal{P})\ :\ g \in K \text{ étant donné, trouver } f \in H \text{ tel que } \mathcal{A}f = g$$

On dit que $(\mathcal{P})$ est un problème inverse.
Suivant Hadamard, on dit que le problème $(\mathcal{P})$ est bien posé *si et seulement si*

1. *quel que soit g appartenant à K, $(\mathcal{P})$ admet une solution et une seule f_g ;*
2. *cette solution f_g dépend continûment de g.*

Cette définition revient à dire qu'un problème inverse relatif à un opérateur continu $\mathcal{A}$ est bien posé lorsque $\mathcal{A}$ est à la fois injectif et surjectif, avec un inverse *stable*, au sens où l'on veut pouvoir contrôler l'erreur répercutée sur la fonction f quand on inverse des données potentiellement entâchées d'un bruit, avec un niveau de bruit connu.
Par ailleurs, lorsque le problème inverse défini ci-dessus est bien posé, on dira de manière équivalente que la *transformée* Af est une *représentation* de f, et que cette représentation est *stable* ; l'idée étant

alors qu'il n'y a aucune perte d'information sur f, par rapport à sa description dans le domaine direct, quand on la décrit par son image Af.

2.2.1.2 L'inversion de la transformée de Radon : un problème inverse

On se focalise maintenant sur le cas particulier de la transformée de Radon : dans ce cas $\mathcal{A} = \mathcal{R}$, et connaissant des projections g dans le domaine de Radon $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$, on cherche à identifier la fonction f du domaine direct tel que $\mathcal{R}f = g$.

Première constatation : on a vu, dans la propriété (2.1.5), que l'opérateur $\mathcal{R}$ est linéaire et continu de $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times [-1,1])$. Cependant, on ne peut pas construire un inverse stable allant de $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times [-1,1])$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$: l'exemple suivant illustre pourquoi.

Exemple 2.2.1 (Instabilité de l'inversion de la transformée de Radon entre espaces $\mathbf{L}^2$)
Dans cet exemple, nous allons montrer que contrôler la norme $\mathbf{L}^2$ des données ne suffit pas pour contrôler la norme $\mathbf{L}^2$ de la fonction du domaine direct.
On considère le disque $\mathbf{\Omega_R}$ inclus dans le disque unité, de rayon $R \leq 1$ et de densité homogène $\alpha_R > 0$. Comme on l'a vu avec le résultat (2.4), la transformée de Radon à travers le disque Ω_R est isotrope, à support dans $\mathbf{S}^1 \times [-R \times R]$, et égale pour tout angle θ à

$$\mathcal{R}_\theta f_R(s) = \begin{cases} 2\alpha_R\sqrt{R^2 - s^2} & \text{si } |s| < R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La norme $\mathbf{L}^2$ de la fonction f_R est égale à

$$\|f_R\|^2_{\mathbf{L}^2} = \int_{\Omega_R} |f_R(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \pi\alpha_R^2 R^2$$

La norme $\mathbf{L}^2$ de la transformée de Radon de f_R est égale à

$$\|\mathcal{R}f_R\|^2_{\mathbf{L}^2} = \int_0^{2\pi} \int_{-R}^{R} |\mathcal{R}_\theta f_R(s)|^2 ds d\theta = 8\pi\alpha_R^2 \int_{-R}^{R} \left(R^2 - s^2\right) ds = \frac{32}{3}\pi R^3 \alpha_R^2$$

Si on choisit alors comme densité $\alpha_R = \frac{1}{R}$ alors $\|f_R\|_{\mathbf{L}^2}$ est indépendante de R et on a

$$\|f_R\|_{\mathbf{L}^2} = \sqrt{\pi}, \|\mathcal{R}f_R\|_{\mathbf{L}^2} = 4\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{R} \xrightarrow[R\to 0]{} 0$$

On a ainsi un exemple où, aussi petite soit la norme $\mathbf{L}^2$ de sa transformée de Radon, la fonction f reste de norme constante.
De même, si on choisit $\alpha_R = \frac{1}{R\sqrt{R}}$ alors $\|\mathcal{R}f_R\|_{\mathbf{L}^2}$ est indépendante de R et on a

$$\|f_R\|_{\mathbf{L}^2} = \sqrt{\frac{\pi}{R}} \xrightarrow[R\to 0]{} +\infty \text{ et } \|\mathcal{R}f_R\|_{\mathbf{L}^2} = 4\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$$

On a ainsi un exemple où l'on peut maintenir constante la norme de la transformée de Radon, tandis que la norme de la fonction f du domaine direct "explose".
Comme on le précisera ensuite, c'est en contrôlant la norme des données non plus en norme $\mathbf{L}^2$, mais dans une norme relative à un espace de Sobolev bien choisi, que l'on pourra simultanément contrôler les effets sur la norme de la fonction f. Ainsi, si l'on munit l'espace $\mathbf{L}^2(S^1 \times [-1,1])$ de la norme dite $H^{\frac{1}{2}}$ définie par

$$\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |\widehat{g_\theta}(\omega)|^2 \sqrt{1+\omega^2} d\omega d\theta}$$

alors la norme $H^{\frac{1}{2}}$ de la transformée de Radon est égale à

$$\|\mathcal{R}f_R\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}} |\widehat{\mathcal{R}_\theta f_R}(\omega)|^2\sqrt{1+\omega^2}d\omega d\theta$$

avec ici

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{R}_\theta f_R}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} 2\alpha_R\sqrt{R^2-s^2}e^{-i\omega s}ds = \frac{2\alpha_R R}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}\sqrt{1-\left(\frac{s}{R}\right)^2}e^{-i\omega s}ds \\ &= \frac{2\alpha_R R^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}e^{-iR\omega u}du = 2\alpha_R R^2\hat{h}(\omega R)\end{aligned}$$

où on a noté h la fonction

$$h : s\in\mathbf{R}\mapsto\begin{cases}\sqrt{1-s^2} & \textit{si } |s|\le 1\\ 0 & \textit{sinon}\end{cases}$$

La transformée de Fourier de la fonction h s'exprime à l'aide d'une fonction de Bessel de première espèce (voir Annexe B), et on a $\hat{h}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{J}_1(\omega)}{\omega}$.
Finalement, on a donc

$$\|\mathcal{R}f_R\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} = 4\pi^2\alpha_R^2R^2\int_{\mathbf{R}}\frac{\mathrm{J}_1(\omega R)^2}{\omega^2}\sqrt{1+\omega^2}d\omega$$

Dans le cas où $\alpha_R = \frac{1}{R}$, alors

$$\|\mathcal{R}f_R\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} = 4\pi^2\int_{\mathbf{R}}\frac{\mathrm{J}_1(\omega R)^2}{\omega^2}\sqrt{1+\omega^2}d\omega$$

et on peut vérifier (par exemple à l'aide du logiciel `Maple`*) que $\|\mathcal{R}f_R\|_{H^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[R\to 0]{} 2\pi$ (l'intégrale tend vers 1). A la différence de la norme $\mathbf{L}^2$, cette nouvelle norme ne tend pas vers 0 quand R tend vers zéro ; elle "suit" l'évolution de la norme $\mathbf{L}^2$ de f, comme on l'a représenté à gauche en figure (2.5).*
De même, dans le cas où $\alpha_R = \frac{1}{R\sqrt{R}}$

$$\|\mathcal{R}f_R\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} = \frac{4\pi^2}{R}\int_{\mathbf{R}}\frac{\mathrm{J}_1(\omega R)^2}{\omega^2}\sqrt{1+\omega^2}d\omega$$

et on peut vérifier que $\|\mathcal{R}f_R\|_{H^{\frac{1}{2}}} \simeq \frac{2\pi}{\sqrt{R}}$ quand R tend vers zéro ; ainsi, à la différence de la norme $\mathbf{L}^2$, cette norme tend vers l'infini quand R tend vers zéro, comme la norme $\mathbf{L}^2$ de f.
On a tracé en figure (2.5) l'évolution en fonction du rayon R des trois normes considérées dans cet exemple : la norme $\mathbf{L}^2$ de f, la norme $\mathbf{L}^2$ de $\mathcal{R}f$, et la norme $H^{\frac{1}{2}}$ de $\mathcal{R}f$.

La construction d'un inverse stable entre les espaces $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ et $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1\times\mathbf{R})$ n'est donc pas possible. Pour construire un inverse stable, il faut prendre en compte le fait que l'opérateur de Radon est *régularisant*, propriété que l'on peut quantifier par les appartenances respectives de f et de sa transformée de Radon $\mathcal{R}f$ à des espaces de type espace de Sobolev, « décalés » d'un facteur $\frac{1}{2}$. C'est l'objet de la propriété suivante, établie dans le cas d'une fonction à support compact, et que nous admettrons.
Pour cela, on définit au préalable l'espace $H^{\frac{1}{2}}(S^1\times\mathbf{R})$ tel que

$$H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{S}^1\times\mathbf{R}) = \left\{g\in\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1\times\mathbf{R}); \int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}}|\widehat{g_\theta}(\omega)|^2(1+\omega^2)^{\frac{1}{2}}d\omega d\theta<\infty\right\}$$

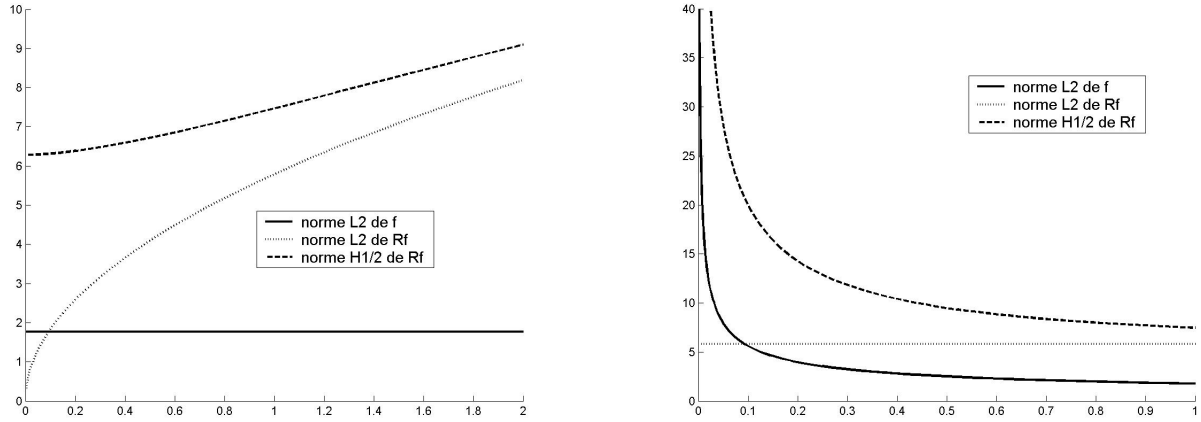


FIG. 2.5 – Instabilité de l'opérateur de Radon en norme $\mathbf{L}^2$: $\alpha_R = \frac{1}{R}$ (à gauche) et $\alpha_R = \frac{1}{R\sqrt{R}}$ (à droite) : contrôler la norme $\mathbf{L}^2$ des données ne suffit pas pour contrôler la norme $\mathbf{L}^2$ de la fonction dans le domaine direct quand R tend vers zéro ; à gauche la norme $\mathbf{L}^2$ de la transformée de Radon tend vers zéro quand R tend vers zéro, alors que la norme $\mathbf{L}^2$ de la fonction f reste constante (égale à $\sqrt{\pi}$) ; à droite la norme $\mathbf{L}^2$ de la transformée de Radon reste constante, tandis que la norme $\mathbf{L}^2$ de la fonction f explose. En revanche, dans les deux cas, la norme dite $H^{\frac{1}{2}}$ de la transformée de Radon permet de suivre le comportement de la norme $\mathbf{L}^2$ de la fonction f.

Proposition 2.2.1 (Continuité de l'inverse de la transformée de Radon [78])
Soit $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$, à support compact inclus dans le disque unité de $\mathbf{R}^2$; il existe une constante $C > 0$ telle que

$$2\sqrt{\pi}\|f\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|\mathcal{R}f\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq C\|f\|_{\mathbf{L}^2}$$

Cette propriété permet d'affirmer que l'application linéaire $f \in \mathbf{L}^2 \mapsto \mathcal{R}f \in H^{\frac{1}{2}}(S^1 \times \mathbf{R})$ est continue, injective, donc inversible sur son image, et que son inverse est borné (donc continu), avec

$$\forall g \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}),\ \|\mathcal{R}^{-1}g\|_{\mathbf{L}^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}}$$

2.2.2 Inversion de la transformée de Radon par rétroprojection filtrée

L'inversion de la transformée de Radon par *rétroprojection filtrée* est une méthode construite directement à partir du théorème de coupe-projection (propriété 2.1.4) qui, on l'a dit, permet de calculer la transformée de Fourier de la fonction du domaine direct f à partir de la transformée de Fourier de sa transformée de Radon. Pour obtenir l'expression de la fonction dans le domaine direct, il ne reste en théorie qu'une étape à accomplir : une transformée de Fourier inverse dans le domaine direct.

En pratique, il s'avère que l'implémentation directe d'une telle stratégie est délicate : en effet, en appliquant le théorème de coupe-projection, on obtient les valeurs de la transformée de Fourier de la fonction f sur une grille polaire, alors que les algorithmes d'inversion de la transformée de Fourier bidimensionnelle s'appuient sur des données réparties sur une grille cartésienne. Le couplage des deux étapes nécessite donc une étape intermédiaire d'interpolation des données, d'une grille polaire vers une grille cartésienne ; or on sait qu'une telle interpolation est un processus instable.

Pour pallier ces difficultés, on utilise un jeu d'écriture dans la formule d'inversion de la transformée de Fourier bidimensionnelle : la formule continue obtenue n'est rien d'autre que la formule d'inversion

continue de la transformée de Fourier, mais elle est écrite sous une forme qui se prête ensuite à une implémentation discrète permettant de contourner la phase d'interpolation entre les grilles bidimensionnelles. Cette écriture peut ensuite être lue en deux étapes, que nous détaillerons plus loin : une étape de filtrage, et une étape de rétroprojection, d'où le nom de *méthode de rétroprojection filtrée*.
Nous l'énonçons dans un premier temps dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$.

Proposition 2.2.2 (Inversion par rétroprojection filtrée dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$)
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$.

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2, f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_0^\pi \int_{\mathbf{R}} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)|\omega| e^{i\omega \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}} d\omega d\theta$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$.

La formule d'inversion de la transformée de Fourier en dimension 2, en coordonnées polaires, permet d'écrire :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2,\ f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\omega\mathbf{\Theta}) e^{+i\omega \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}} |\omega| d\omega d\theta$$

On introduit alors la transformée de Fourier de la transformée de Radon de f grâce au résultat établi en (2.1.4), et on obtient alors, en tout point $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2,\ f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_0^\pi \int_{\mathbf{R}} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) e^{+i\omega \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}} |\omega| d\omega d\theta$$

■

Comme on l'a indiqué plus haut, cette formule se prête à une interprétation en deux étapes :

- une première étape de filtrage de chacune des projections $\mathcal{R}_\theta f$, $\theta \in [0, \pi]$, par le filtre *rampe*, dont la transformée de Fourier est la fonction $\omega \mapsto |\omega|$;
  L'expression du filtrage par le filtre rampe dans le domaine de Radon peut être écrite avec l'opérateur Λ, défini ainsi dans le domaine de Fourier

  $$\forall g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}), \widehat{\Lambda g}(\omega) = |\omega| \hat{g}(\omega)$$

  Dans cette définition, comme g appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, $\hat{g}$ appartient aussi à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, donc $\omega \mapsto |\omega|\hat{g}(\omega)$ appartient à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}) \cap \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, et est à décroissance rapide ; par conséquent, en utilisant des résultats sur la transformée de Fourier [45] , on peut en déduire que :
  - Λg est bien défini, et appartient à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ (comme transformée de Fourier inverse d'une fonction de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$;
  - Λg est borné (comme transformée de Fourier d'une fonction appartenant à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R})$) ;
  - Λg est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (comme transformée de Fourier d'une fonction de $\mathbf{L}^1(\mathbf{R})$ à décroissance rapide).
- une étape de rétroprojection des projections filtrées :

  $$\Lambda\mathcal{R}f \in \mathbf{L}^\infty(S^1 \times \mathbf{R}) \mapsto \mathcal{R}^\# (\Lambda\mathcal{R}f)$$

  avec, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$

  $$\mathcal{R}^\# (\Lambda\mathcal{R}f)(\mathbf{x}) = 2\int_0^\pi \Lambda\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}) d\theta$$

Ainsi, la formule de reconstruction exprimée plus haut dans le domaine de Fourier peut aussi se réécrire

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2),\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2,\ f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^\pi \Lambda\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}) d\theta = \frac{1}{4\pi} \mathcal{R}^\# \Lambda\mathcal{R} f(\mathbf{x})} \tag{2.9}$$

Cette formulation présente l'avantage de se prêter à un prolongement à un cadre plus large que $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ [89] (nous n'abordons pas ce problème ici, car, comme nous le verrons ensuite, les contraintes de discrétisation lors de l'implémentation de l'algorithme font, qu'en pratique, on manipule des approximations des fonctions en jeu, régularisées en fonction de l'espace de Schwartz) : en effet, en remarquant d'abord que, dans le domaine de Fourier, et pour g appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, on peut écrire la relation

$$\widehat{\Lambda g}(\omega) = |\omega|\hat{g}(\omega) = (i\omega\hat{g}(\omega))\,(-i\,\mathrm{sgn}(\omega)) \tag{2.10}$$

faisant ainsi apparaître l'opérateur Λ comme la convolution de deux opérateurs : l'opérateur de dérivation, et l'opérateur dont la transformée de Fourier est la fonction signe, que nous noterons sgn : ce dernier opérateur, à une constante près, est la distribution appelée *valeur principale* ([45]). Celle-ci est une distribution tempérée (car sa transformée de Fourier en est une), définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}), < \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi >= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|t|\geq\epsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

avec

$$\widehat{\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sgn}$$

ce qui permet d'écrire, en notant $\partial_s g$ la dérivée partielle de g par rapport à s,

$$\forall g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}),\ \Lambda g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) * \partial_s g = \frac{1}{\pi}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) * \partial_s g$$

La formule d'inversion s'écrit donc aussi dans le domaine direct :

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}),\ f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi}\mathcal{R}^{\#}\Lambda\mathcal{R}f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) * \partial_s \mathcal{R}_\theta f\right)(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{s\in\mathbf{R};|\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-s|>\epsilon}\frac{\partial_s\mathcal{R}_\theta f(s)}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-s}ds\right)d\theta \end{aligned} \tag{2.11}$$

ou encore sous la forme

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}),\ f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{s\in\mathbf{R};|s|>\epsilon}\frac{\partial_s\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-s)}{s}ds\right)d\theta$$

Notons enfin que l'on peut écrire cette formule d'inversion à l'aide de la transformée de Hilbert : celle-ci est définie pour des fonctions 1D dans le domaine de Fourier par : $\widehat{\mathcal{H}g}(\omega) = -i\mathrm{sgn}(\omega)\widehat{g}(\omega)$ c'est-à-dire que l'on a

$$\mathcal{H}g(s) = \frac{1}{\pi}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) * g(s) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{u\in\mathbf{R};|u|>\epsilon}\frac{g(s-u)}{u}du \tag{2.12}$$

et donc

$$\Lambda g = \mathcal{H}\partial_s g$$

La formule d'inversion de la transformée de Radon s'écrit donc

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}),\ f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\mathcal{R}^{\#}\left(\mathcal{H}\partial_s g\right)(\mathbf{x}) \tag{2.13}$$

Afin d'illustrer l'effet de l'étape de filtrage de la méthode de rétroprojection filtrée - entre autres pour pouvoir ensuite mieux comprendre le comportement de cet algorithme en présence de données tronquées - nous détaillons dans l'exemple qui suit le cas de la reconstruction du disque unité, en explicitant le résultat de l'application du filtre rampe sur chacun des détecteurs.

Exemple 2.2.2 (Filtrage des projections du disque unité)
Comme on l'a vu précédemment, pour le disque unité avec une densité uniforme f égale à 1, la transformée de Radon est égale à :

$$\forall \mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R},\ \mathcal{R}f(\theta,s) = \begin{cases} 2\sqrt{1-s^2} & \textit{si } |s|<1 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} \quad \textit{et } \partial_s \mathcal{R}_\theta f(s) = \begin{cases} -\frac{2s}{\sqrt{1-s^2}} & \textit{si } |s|<1 \\ 0 & \textit{si } |s|>1 \end{cases}$$

Les fonctions $\mathcal{R}_\theta f$ appartiennent à l'espace $\mathbf{L}^1(\mathbf{R})$, mais pas leurs transformées de Fourier. Pour faire un calcul exact du résultat de l'étape de filtrage, on a recours à une formulation du filtrage qui n'utilise pas la transformée de Fourier.

La fonction $\partial_s \mathcal{R}_\theta f$ est continue en tout point u de l'intervalle $]-1,1[$ et on peut donc écrire

$$\forall \mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1,\ \forall u \in \mathbf{R},\ \Lambda\mathcal{R}_\theta f(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{s \in [-1,u-\epsilon] \cap [-1,1]} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds + \int_{s \in [u+\epsilon,1] \cap [-1,1]} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds \right)$$

Premier cas : $|u|>1$
Dans ce cas, il n'y a pas de singularité dans le domaine d'intégration, et l'intégrale en valeur principale est une intégrale au sens classique :

$$\Lambda\mathcal{R}_\theta f(u) = \int_{-1}^{1} \frac{-2s}{\sqrt{1-s^2}(u-s)} ds$$

Cette intégrale peut se calculer à l'aide de plusieurs changements de variables successifs :

$$\begin{aligned}
\Lambda\mathcal{R}_\theta f(u) &\overset{s=\sin\theta}{=} -2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{u-\sin\theta} d\theta \\
&\overset{t=\tan\frac{\theta}{2}}{=} -2\int_{-1}^{1} \frac{2t}{(ut^2-2t+u)} \frac{2dt}{1+t^2} = -2\left(\int_{-1}^{1} -\frac{2dt}{1+t^2} dt + \int_{-1}^{1} \frac{2u}{ut^2-2t+u} dt \right) \\
&= 4\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2} dt - 4u \int_{-1}^{1} \frac{1}{ut^2-2t+u} dt \\
&\quad \textit{(le polynôme } ut^2-2t+u \textit{ est irréductible car } |u|>1\textit{)} \\
&= 4\left(\arctan(1) - \arctan(-1)\right) - 4\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{u}\right)^2 + \frac{u^2-1}{u^2}} \\
&\overset{v=t-\frac{1}{u}}{=} 2\pi - 4\int_{-1-\frac{1}{u}}^{1-\frac{1}{u}} \frac{dv}{v^2+\gamma^2} \quad \left(\textit{où on a posé } \gamma = \sqrt{\frac{u^2-1}{u^2}} = \frac{\sqrt{u^2-1}}{|u|} \right) \\
&= 2\pi - \frac{4}{\gamma}\left(\arctan\left(\frac{1-\frac{1}{u}}{\gamma} \right) - \arctan\left(\frac{-1-\frac{1}{u}}{\gamma} \right) \right) \\
&= 2\pi - \frac{4|u|}{\sqrt{u^2-1}}\left(\arctan\left(\frac{\mathrm{sgn}(u)(u-1)}{\sqrt{u^2-1}} \right) - \arctan\left(\frac{\mathrm{sgn}(u)(-u-1)}{\sqrt{u^2-1}} \right) \right) \\
&= 2\pi - \frac{2\pi|u|}{\sqrt{u^2-1}} \\
&\quad \textit{car } \arctan a - \arctan\frac{-1}{a} = \frac{\pi}{2} \textit{ pour tout } a>0 \\
&\quad \textit{avec ici } \frac{\mathrm{sgn}(u)(u-1)}{\sqrt{u^2-1}} > 0, \textit{ et } \left(\frac{\mathrm{sgn}(u)(u-1)}{\sqrt{u^2-1}} \right)\left(\frac{\mathrm{sgn}(u)(-u-1)}{\sqrt{u^2-1}} \right) = -1.
\end{aligned}$$

Deuxième cas : $u \in]-1,1[$

$$\Lambda\mathcal{R}_\theta f(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-1}^{u-\epsilon} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds + \int_{u+\epsilon}^{1} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds$$

Or pour tout $\epsilon > 0$ (choisi suffisamment petit pour que $]u-\epsilon, u+\epsilon[\subset]-1,1[$),

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{u-\epsilon} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds + \int_{u+\epsilon}^{1} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds \\ = \; & -2\int_{-1}^{\alpha(u,\epsilon)} \frac{4t}{(1+t^2)(ut^2-2t+u)} dt - 2\int_{\beta(u,\epsilon)}^{1} \frac{4t}{(1+t^2)(ut^2-2t+u)} dt \end{aligned}$$

(avec les deux mêmes changements de variable que dans le cas précédent)

où on a posé

$$\alpha(u,\epsilon) = \tan\left(\frac{\arcsin(u-\epsilon)}{2}\right) = \frac{u-\epsilon}{1+\sqrt{1-(u-\epsilon)^2}} = \frac{1-\sqrt{1-(u-\epsilon)^2}}{u-\epsilon}$$

$$\left(\textit{en effet, } \forall X \in]-\pi,\pi[, \tan\left(\frac{X}{2}\right) = \frac{\sin X}{1+\cos X}, \textit{ et, } \forall x \in]-1,1[, \; \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}\right)$$

et, de la même manière,

$$\beta(u,\epsilon) = \tan\left(\frac{\arcsin(u+\epsilon)}{2}\right) = \frac{u+\epsilon}{1+\sqrt{1-(u+\epsilon)^2}} = \frac{1-\sqrt{1-(u+\epsilon)^2}}{u+\epsilon}$$

Pour tout u vérifiant $|u|<1$, à la différence du cas précédent, le polynôme ut^2-2t+u est scindé, et on a

$$\frac{4t}{(1+t^2)(ut^2-2t+u)} = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\left(\frac{1}{t-r_1(u)} - \frac{1}{t-r_2(u)}\right) - \frac{2}{1+t^2}$$

où on a noté $r_1(u)$ et $r_2(u)$ les deux racines du polynôme en t ut^2-2t+u :

$$r_1(u) = \frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u} \textit{ et } r_2(u) = \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u}$$

$|r_1(u)|>1$ et il n'y a pas de singularité en son voisinage. La singularité qui était présente autour de u dans l'intégrale initiale se retrouve autour de $r_2(u)$. D'ailleurs, par un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $\epsilon = 0$, on peut écrire

$$\alpha(u,\epsilon) = r_2(u) - \frac{1}{\sqrt{1-u^2}\left(1+\sqrt{1-u^2}\right)}\epsilon + o(\epsilon) \;\; \textit{et} \;\; \beta(u,\epsilon) = r_2(u) + \frac{1}{\sqrt{1-u^2}\left(1+\sqrt{1-u^2}\right)}\epsilon + o(\epsilon) \tag{2.14}$$

Finalement, on a, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{u-\epsilon} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds + \int_{u+\epsilon}^{1} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds \\ = \; & \frac{-2u}{\sqrt{1-u^2}}\left(\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t-r_1(u)} - \int_{-1}^{\alpha(u,\epsilon)} \frac{dt}{t-r_2(u)} - \int_{\beta(u,\epsilon)}^{1} \frac{dt}{t-r_2(u)}\right) + \int_{-1}^{1} \frac{4}{1+t^2} dt \\ = \; & \frac{-2u}{\sqrt{1-u^2}}\left(\ln\left(\frac{r_1(u)-1}{r_1(u)+1}\right) + \ln\left(\frac{1+r_2(u)}{1-r_2(u)}\right) + \ln\left(\frac{\beta(u,\epsilon)-r_2(u)}{r_2(u)-\alpha(u,\epsilon)}\right)\right) + 2\pi \\ = \; & 2\pi + \frac{-2u}{\sqrt{1-u^2}}\left(\ln\left(\frac{r_1(u)-1}{r_1(u)+1}\right)\left(\frac{1+r_2(u)}{1-r_2(u)}\right) + \ln\left(\frac{\beta(u,\epsilon)-r_2(u)}{r_2(u)-\alpha(u,\epsilon)}\right)\right) \end{aligned}$$

Or

$$\forall u \in]-1,1[, \; r_1(u)r_2(u) = 1 \textit{ donc } \frac{(1+r_2(u))(r_1(u)-1)}{(1-r_2(u))(r_1(u)+1)} = \frac{r_1(u)-r_2(u)}{r_1(u)-r_2(u)} = 1$$

et donc pour tout $\epsilon > 0$,

$$\int_{-1}^{u-\epsilon} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds + \int_{u+\epsilon}^{1} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds = 2\pi - \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}} \ln\left(\frac{\beta(u,\epsilon) - r_2(u)}{r_2(u) - \alpha(u,\epsilon)}\right) \tag{2.15}$$

D'après (2.14), quand ϵ *tend vers zéro,*

$$\frac{\beta(u,\epsilon) - r_2(u)}{r_2(u) - \alpha(u,\epsilon)} = 1 + \mathrm{o}(1) \text{ et donc } \ln\left(\frac{r_2(u) - \alpha(u,\epsilon)}{\beta(u,\epsilon) - r_2(u)}\right) \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0$$

et finalement, pour $u \in]-1,1[$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-1}^{u-\epsilon} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds + \int_{u+\epsilon}^{1} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds = 2\pi$$

En conclusion : *lors de la phase de filtrage dans la reconstruction, par rétroprojection filtrée, du disque unité, les projections filtrées sont égales, pour toute direction* $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1$ *à*

$$\boxed{\Lambda \mathcal{R}_\theta f(u) = \begin{cases} 2\pi & \text{si} \quad |u| < 1 \\ 2\pi - \frac{2\pi|u|}{\sqrt{u^2-1}} & \text{si} \quad |u| > 1 \end{cases}} \tag{2.16}$$

Les courbes représentatives des fonctions $\mathcal{R}_\theta f$ *et* $\Lambda \mathcal{R}_\theta f$ *sont présentées en figure (2.2.2).*

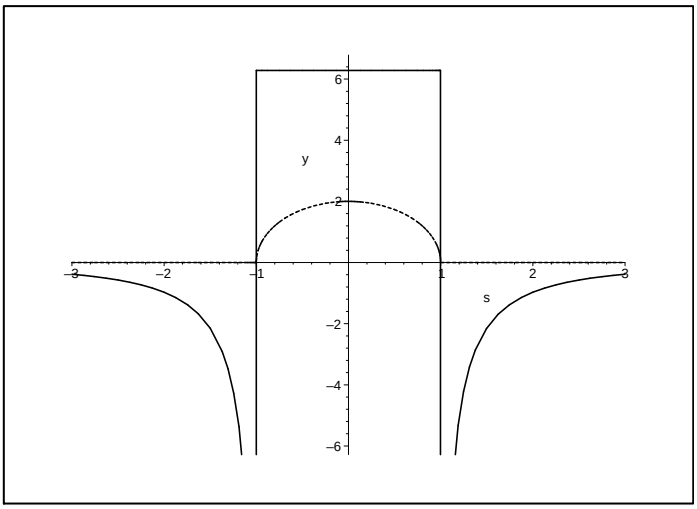


FIG. 2.6 – Le résultat de l'étape de filtrage sur les projections du disque unité avec une densité uniforme : la courbe en pointillés représente une projection avant filtrage (elle est nulle en dehors de $[-1,1]$), la courbe en trait plein représente une projection après filtrage par le filtre rampe.

Nous prolongeons cet exemple avec un calcul qui s'en déduit : celui des projections filtrées dans le cas d'une ellipse.

Exemple 2.2.3 (Filtrage des projections d'une ellipse)
On a explicité plus haut (dans l'exemple (2.1.1)) la transformée de Radon d'une ellipse homogène, en montrant qu'elle pouvait s'exprimer à l'aide de la transformée de Radon du disque unité ; plus précisément, on a vu que si on note $f^{0,0,0}$ *la densité du disque unité, et* $f^{\psi_0,\rho_0,\varphi_0}$ *la densité d'une ellipse centrée au point de coordonnées* $\rho_0(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$*, tournée d'un angle* ψ_0 *par rapport aux axes du repère, et dont les demi-axes ont pour longueurs respectives* $a > 0$ *et* $b > 0$*, alors*

$$\mathcal{R}f^{\psi_0,\rho_0,\varphi_0}(\mathbf{\Theta}, s) = \frac{ab}{\sqrt{a^2\cos^2(\theta-\psi_0) + b^2\sin^2(\theta-\psi_0)}} \mathcal{R}f_0\left(\mathbf{\Theta}, \frac{s - \rho_0\cos(\varphi_0 - \theta)}{\sqrt{a^2\cos^2(\theta-\psi_0) + b^2\sin^2(\theta-\psi_0)}}\right)$$

On peut alors en déduire l'expression de $\Lambda\mathcal{R}_\theta f^{\psi_0,\rho_0,\varphi_0}$; pour cela, précisons les effets du couplage d'une dilatation et d'une translation avec l'opérateur Λ.
On considère une fonction $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, et on note $g_{u,v}$ la fonction obtenue par translation d'un facteur v et dilatation d'un facteur $u > 0$, normalisée de telle sorte que $\|g_{u,v}\| = \|g\|$, c'est-à-dire définie par :

$$\forall s \in \mathbf{R},\ g_{u,v}(s) = \frac{1}{\sqrt{u}} g\left(\frac{s-v}{u}\right)$$

On sait alors que $g_{u,v}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, et, d'après la propriété (A.0.2), sa transformée de Fourier est égale à

$$\forall \omega \in \mathbf{R}, \widehat{g_{u,v}}(\omega) = \sqrt{u} e^{-i\omega v} \hat{g}(u\omega)$$

On en déduit que sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$

$$\Lambda g_{u,v}(s) = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega v} \hat{g}(u\omega)|\omega| e^{i\omega s} d\omega = \frac{1}{u\sqrt{u}\sqrt{2\pi}} \int \hat{g}(\omega')|\omega'| e^{i\omega' \frac{s-v}{u}} d\omega' = \frac{1}{u\sqrt{u}} \Lambda g\left(\frac{s-v}{u}\right)$$

Cette égalité peut alors être prolongée à l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ et s'écrit alors

$$\forall g \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}),\ \Lambda g_{u,v} = \frac{1}{u} (\Lambda g)_{u,v}$$

Ici, puisque l'on sait exprimer $\mathcal{R}_\theta f^{\psi_0,\rho_0,\varphi_0}$ à partir de $\mathcal{R}_\theta f^{0,0,0}$ et d'une translation et d'une rotation, selon

$$\mathcal{R}_\theta f^{\psi_0,\rho_0,\varphi_0} = \frac{ab}{\left(a^2\cos^2(\theta-\psi_0) + b^2\sin^2(\theta-\psi_0)\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\mathcal{R}_\theta f^{0,0,0}\right)_{\sqrt{a^2\cos^2(\theta-\psi_0)+b^2\sin^2(\theta-\psi_0)}, \rho_0\cos(\varphi_0-\theta)}$$

on en déduit que, à θ fixé,

$$\Lambda\mathcal{R}_\theta f^{\psi_0,\rho_0,\varphi_0}(s) = \frac{ab}{\left(a^2\cos^2(\theta-\psi_0) + b^2\sin^2(\theta-\psi_0)\right)} \Lambda\mathcal{R}_\theta f^{0,0,0}\left(\frac{s-\rho_0\cos(\varphi_0-\theta)}{\sqrt{a^2\cos^2(\theta-\psi_0) + b^2\sin^2(\theta-\psi_0)}}\right)$$

$$= \frac{ab}{a^2\cos^2(\theta-\psi_0) + b^2\sin^2(\theta-\psi_0)} \begin{cases} 2\pi \quad si\ |s-\rho_0\cos(\varphi_0-\theta)| < \sqrt{a^2\cos^2(\theta-\psi_0) + b^2\sin^2(\theta-\psi_0)} \\ 2\pi - \dfrac{2\pi|s-\rho_0\cos(\varphi_0-\theta)|}{\sqrt{(s-\rho_0\cos(\varphi_0-\theta))^2 - a^2\cos^2(\theta-\psi_0) - b^2\sin^2(\theta-\psi_0)}} \\ \quad si\ |s-\rho_0\cos(\varphi_0-\theta)| > \sqrt{a^2\cos^2(\theta-\psi_0) + b^2\sin^2(\theta-\psi_0)} \end{cases}$$

La figure (2.2.3) présente quelques cas, pour une ellipse occupant plusieurs positions, sous différentes incidences.

2.2.2.1 Régularisation de la rétroprojection filtrée

Nous allons exposer la technique qui consiste à régulariser la rétroprojection filtrée en régularisant le filtre rampe.
Nous avons vu dans la propriété (2.2.2) que la formule de rétroprojection filtrée, dans sa version continue, s'écrit, pour f appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$,

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_0^\pi \int_{\mathbf{R}} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)|\omega| e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}} d\omega d\theta$$

En l'état, elle ne se prête pas à une implémentation : le filtre rampe n'est à support borné ni dans le domaine direct, ni dans le domaine de Fourier ; de plus, il réhausse les hautes fréquences, et amplifierait

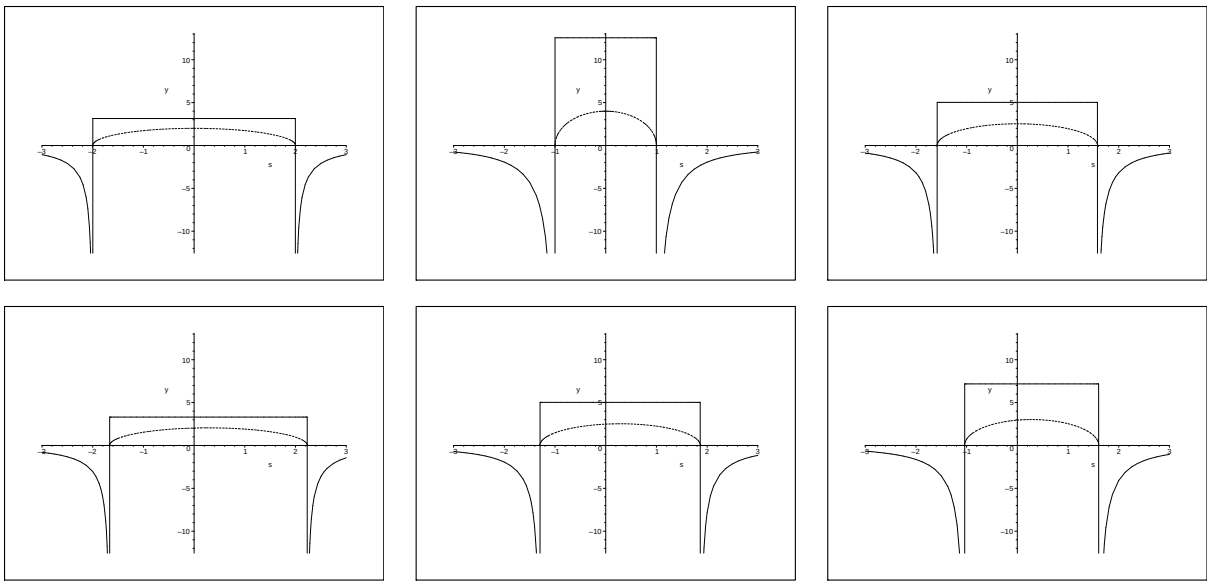


FIG. 2.7 – Le résultat de l'étape de filtrage sur les projections d'une ellipse avec une densité uniforme : la courbe en pointillés représente une projection avant filtrage, la courbe en trait plein représente une projection après filtrage par le filtre rampe. Première ligne : ellipse centrée, dont les axes sont alignés avec les axes du repère, avec $a = 2$ et $b = 1$, dans les cas $\theta = 0$,$\theta = \frac{\pi}{2}$,$\theta = \frac{\pi}{4}$. Deuxième ligne : la même ellipse, dont le centre a été translaté au point de coordonnées $\rho_0 = 0.4, \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$, et qui a subi trois rotations d'angles respectifs $\psi_0 = \frac{\pi}{12}$,$\psi_0 = \frac{\pi}{4}$, et $\psi_0 = \frac{\pi}{3}$; on a tracé ses projections dans le cas $\theta = 0$

donc le bruit en présence de données corrompues.
En pratique, on se replie vers la formule suivante, que nous avons établie dans la propriété (2.1.7) :

$$\forall f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2), \forall w \in \mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}),\ f * W = \mathcal{R}^{\#}\left(\mathcal{R}f * w\right) \text{ où } W = \mathcal{R}^{\#}w$$

L'idée que l'on met alors en oeuvre consiste à reconstruire, plutôt que la fonction f, la fonction $f * W_b$, où $b > 0$ est une fréquence de coupure que l'on choisit, et où W_b est la fonction radiale définie dans le domaine de Fourier par

$$\widehat{W_b}(\omega\mathbf{\Theta}) = \frac{1}{2\pi}\chi_{[-b,b]}(\omega)$$

En effet, en choisissant ainsi la fonction W_b, on assure que

$$\widehat{f * W_b} = 2\pi\hat{f}\widehat{W_b} = \hat{f}\chi_{[-b,b]}$$

c'est-à-dire que $f * W_b$ constitue une approximation de f jusqu'à la fréquence b.
Pour exprimer le filtre w_b associé dans le domaine de Radon, on s'appuie sur le corollaire (2.1.1), établie plus haut : pour vérifier la relation $W_b = \mathcal{R}^{\#}w_b$, il suffit que la fonction w_b soit paire sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$, et vérifie la relation

$$\forall \mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1,\ \widehat{W_b}(\omega\mathbf{\Theta}) = 2\sqrt{2\pi}\frac{\widehat{(w_b)_\theta}(\omega)}{|\omega|}$$

c'est-à-dire

$$\forall \mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1,\ \widehat{(w_b)_\theta}(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}^3}|\omega|\chi_{[-b,b]}(\omega) \tag{2.17}$$

La fonction w_b constitue donc de son côté une approximation du filtre rampe jusqu'à la fréquence de coupure b. C'est une fonction appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, qui peut être exprimée dans le domaine de Radon :

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1,\ \forall s \in \mathbf{R},\ w_b(\mathbf{\Theta}, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-b}^{b}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}^3}|\omega|e^{i\omega s}d\omega = \frac{1}{4\pi}\left(\int_0^b \omega e^{i\omega s}d\omega + \int_0^b \omega e^{-i\omega s}d\omega\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^b \omega\cos(\omega s)d\omega = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}b^2 & \text{si } s = 0\\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos(bs)+bs\sin(bs)-1}{s^2}\right) & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

On remarque que cette fonction est radiale, et dans la suite, on se contentera de la noter w_b.

Dans le cas particulier où l'on représente la fonction f par une image de taille $N \times N$, nous admettrons pour le moment (cela sera expliqué lors de la définition des conditions d'échantillonnage) que l'on peut fixer comme valeur pour b

$$b = \frac{N\pi}{2}$$

Le filtre rampe régularisé s'écrit alors

$$w_{\frac{N\pi}{2}}(s) = \begin{cases} \frac{\pi N^2}{16} & \text{si } s = 0\\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos(\frac{N\pi s}{2})+\frac{N\pi s}{2}\sin(\frac{N\pi s}{2})-1}{s^2}\right) & \text{sinon}\end{cases}$$

La fonction w_b a été représentée en figure (2.8), sur l'intervalle $[-1, 1]$, pour $N = 64$ et $N = 256$.
Cette régularisation du filtre rampe ayant été effectuée, la formule de reconstruction à mettre en oeuvre s'écrit alors

$$f_b(\mathbf{x}) = \mathcal{R}^{\#}\left(\mathcal{R}f * w_b\right)(\mathbf{x}) = \int_0^{2\pi}\left(\mathcal{R}_\theta f * w_b\right)(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})d\theta$$

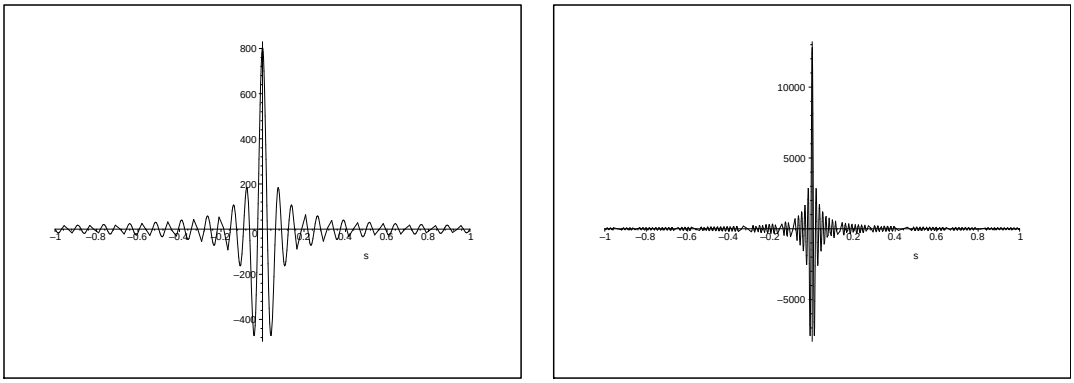


FIG. 2.8 – Tracé du filtre rampe régularisé à appliquer sur les projections pour obtenir une reconstruction $b-$bande-limitée dans le domaine direct, avec $b = \dfrac{N\pi}{2}$, pour deux tailles d'images : $N = 64$, à gauche, et $N = 256$, à droite.

ce qui, en utilisant la parité sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ des fonctions w_b et $\mathcal{R}f$ s'écrit aussi

$$f_b(\mathbf{x}) = 2\int_0^{\pi} \left(\mathcal{R}_\theta f * w_b\right)(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})d\theta \tag{2.18}$$

où on a noté f_b l'approximation $b-$bande limitée de f que l'on vise dans la reconstruction.

2.2.3 Inversion par filtrage de la rétroprojection des projections

Nous mentionnons enfin une autre écriture de la formule d'inversion, à laquelle nous aurons recours plus loin, lors de la présentation de la méthode d'inversion de la transformée de Radon par ondelettes-vaguelettes (plus précisément de l'implémentation qui en proposée par Kolaczyk dans [60]).
Par rapport à la méthode de rétroprojection filtrée, l'ordre des étapes de filtrage et de rétroprojection est ici inversé : on rétroprojette dans un premier temps les projections, puis on effectue un filtrage dans le domaine direct (ce qui est plus coûteux que la rétroprojection filtrée, puisqu'on effectue un filtrage 2D à la place d'un filtrage 1D).
Cette nouvelle écriture s'obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2),\ f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{+\infty} \widehat{f}(\omega\mathbf{\Theta})e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}}\omega d\omega d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}}\omega d\omega d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)}{\omega}e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}}\omega^2 d\omega d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\widehat{\mathcal{R}^{\#}\mathcal{R}f}(\omega\mathbf{\Theta})e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}}\omega^2 d\omega d\theta \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^2}\int_{\mathbf{k}\in\mathbf{R}^2} \widehat{\mathcal{R}^{\#}\mathcal{R}f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Theta}}|\mathbf{k}|d\mathbf{k} = \mathcal{F}_2^{-1}\left(\frac{1}{4\pi}\widehat{\mathcal{R}^{\#}\mathcal{R}f}(\mathbf{k})|\mathbf{k}|\right)
\end{aligned}$$

où on a noté $\mathcal{F}_2^{-1}$ la transformée de Fourier inverse 2D.

2.2.4 Inversion à l'aide de la décomposition en valeurs singulières

Nous présentons ici une autre approche de l'inversion de la transformée de Radon, qui a inspiré la transformée en ondelettes-vaguelettes que nous présenterons dans le chapitre suivant. Cette décomposition

s'appelle la *décomposition en valeurs singulières*. L'idée est la suivante : la fonction du domaine direct et la transformée de Radon sont chacune décomposées dans des systèmes orthonormés bien choisis ; l'inversion consiste alors à identifier les coefficients de la fonction à reconstruire dans la famille orthonormée du domaine direct à partir des coefficients de la transformée de Radon dans la famille orthonormée du domaine de Radon - alors que, pour mémoire, dans la méthode de rétroprojection filtrée, on s'appuie sur des relations entre les transformées de Fourier respectives dans les deux domaines.

Comme nous allons le voir ensuite, tout repose ici sur le fait qu'il est possible de construire deux familles orthonormées, une dans chacun des domaines, et dans lesquelles les coefficients puissent ainsi être mis en correspondance ; cependant, elles sont définies de manière très précise : on ne dispose d'aucune latitude dans le choix de leurs élements ; dans les méthodes d'inversion de type ondelettes-vaguelettes, la contrainte d'orthonormalité simultanée des deux familles est relâchée, au profit, on le verra, d'autres propriétés.

Avant de définir la transformée en valeurs singulières, nous introduisons d'abord une notion d'inverse *généralisé*, appelé *pseudo-inverse*.

2.2.4.1 Notion de pseudo-inverse

Dans ce paragraphe, nous nous appuyons sur l'ouvrage de F. Natterer [78], ainsi que sur le cours donné par P. Maréchal lors du CEMRACS 2002 [71].

Comme on l'a vu plus haut, le problème

$$g \in \mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times [-1,1]) \textit{ étant fixée, trouver une fonction } f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega}) \textit{ tel que } \mathcal{R}f = g$$

est un problème inverse mal posé, au sens où on ne peut garantir ni l'existence de l'inverse (l'image de $\mathcal{R}$ est incluse dans le sous-ensemble $H^{\frac{1}{2}}$ de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$), ni, *a fortiori* sa stabilité.

On définit alors la notion de *pseudo-inverse* : le pseudo-inverse de g est l'opérateur qui coïncide avec l'inverse de l'opérateur $\mathcal{R}$ sur $\mathrm{Im}(\mathcal{R})$, mais qui est défini sur un ensemble plus grand (en l'occurence, comme on va le voir, $\mathrm{Im}(\mathcal{R}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{R})^{\perp}$), et qui est solution, lorsque cette solution existe, du problème, plus faible, suivant :
($\mathcal{P}'$) : $g \in \mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times [-1,1])$ étant fixée, trouver $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$, de norme minimale, minimisant la norme $\|g - \mathcal{R}f\|$.

Les grandes étapes de la construction du pseudo-inverse, que nous admettrons ici, s'articulent de la manière suivante (elle reposent sur des résultats connus [78, 71], applicables dans les espaces de Hilbert séparables) :

- $\mathcal{R}$ est un opérateur linéaire continu de l'espace de Hilbert $H = \mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$ dans l'espace de Hilbert $K = \mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times [-1,1])$;
- $\mathrm{Ker}(\mathcal{R})$, noyau de l'opérateur, est un sous-espace fermé de H, et H admet la décomposition suivante :
$$H = \mathrm{Ker}(\mathcal{R}) \oplus \mathrm{Ker}(\mathcal{R})^{\perp}$$
- $\mathrm{Ker}(\mathcal{R})^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(\mathcal{R}^*)}$, et donc
$$H = \mathrm{Ker}(\mathcal{R}) \oplus \overline{\mathrm{Im}(\mathcal{R}^*)}$$
- les fonctions f qui minimisent sur H la norme $\|g - \mathcal{R}f\|$ sont exactement les fonctions qui sont solutions de l'équation suivante, dite *équation normale* :
$$\mathcal{R}^*\mathcal{R}f = \mathcal{R}^*g$$

(en effet minimiser $\|g - \mathcal{R}f\|$ revient à trouver la projection orthogonale de g sur $\mathrm{Im}(\mathcal{R})$; f est donc solution de ce problème de minimisation si et seulement si $(\mathcal{R}f - g) \in \mathrm{Im}(\mathcal{R})^{\perp}$, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $u \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$, $[\mathcal{R}f - g, \mathcal{R}u] = 0$, soit $< \mathcal{R}^*\mathcal{R}f - \mathcal{R}^*g, u >= 0$, et donc f vérifie la relation $\mathcal{R}^*\mathcal{R}f = \mathcal{R}^*g$) ;

– $\mathrm{Im}(\mathcal{R})$ est un sous-espace fermé de K et

$$\mathrm{Im}(\mathcal{R}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{R})^{\perp} = K$$

– si $g \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{R})^{\perp}$, alors l'ensemble des solutions de l'équation normale est non vide, et il existe une solution et une seule dont la projection sur $\mathrm{Ker}(\mathcal{R})$ est nulle (ie incluse dans $\overline{\mathrm{Im}(\mathcal{R}^*)}$).

Lorsqu'elle existe (ie si $g \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{R})^{\perp}$), on appelle cette solution le *pseudo-inverse de* g, et on la note $\mathcal{R}^+g$; elle est de norme minimale parmi toutes les solutions de l'équation normale (l'ensemble des solutions est le sous-espace affine $\mathcal{R}^+g + \mathrm{Ker}(\mathcal{R})$).
L'opérateur $\mathcal{R}^+$, défini sur $\mathrm{Im}(\mathcal{R}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{R})^{\perp}$ est appelé le pseudo-inverse de l'opérateur $\mathcal{R}$. Il « prolonge » l'inverse de $\mathcal{R}$ à l'ensemble $\mathrm{Im}(\mathcal{R}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{R})^{\perp}$, et permet donc d'envisager la reconstruction d'un *inverse* (au sens large) en présence de données bruitées.

Dans la suite, nous présentons la décomposition en valeurs singulières, qui permet de calculer le pseudo-inverse.

2.2.4.2 Décomposition en valeurs singulières

Soit $(H, <.,.>)$ et $(K, [.,.])$ deux espaces de Hilbert séparables, et A un opérateur linéaire continu de H dans K.
Suivant Natterer [78], on appelle *décomposition en valeurs singulières de* A une écriture de A sous la forme

$$\forall f \in H,\ Af = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sigma_\lambda < f, f_\lambda > g_\lambda \tag{2.19}$$

où $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{N}}$ et $(g_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{N}}$ sont deux familles orthonormées respectivement dans H et K, et où la famille $(\sigma_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{N}}$ est une famille bornée de réels strictement positifs, appelées les *valeurs singulières* de A.

L'existence de deux telles familles est assurée à partir du moment où A est un opérateur compact, car alors A^*A, opérateur autoadjoint, est également compact, et un théorème spectral (voir par exemple [13, 71]) assure que l'espace H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de A^*A ; on a alors

$$\forall k \in \mathbf{N}, A^*Af_\lambda = \sigma_\lambda^2 f_\lambda$$

où on a noté σ_λ^2 la valeur propre associée au vecteur propre f_λ.
Puisque la famille (f_λ) ainsi construite est une base hilbertienne de H, on peut donc écrire

$$\forall f \in H,\ f = \sum_{\lambda \in \mathbf{N}} < f, f_\lambda > f_\lambda \tag{2.20}$$

avec

$$\forall \lambda \in \mathbf{N},\ < f, f_\lambda > = < f, \frac{1}{\sigma_\lambda^2} A^*Af_\lambda > = [Af, \frac{1}{\sigma_\lambda^2} Af_\lambda]$$

Ainsi, chacun des coefficients de la décomposition de f dans H peut être obtenu directement en calculant le coefficient correspondant de Af , et on a

$$\forall f \in H,\ f = \sum_{\lambda \in \mathbf{N}} [Af, \frac{1}{\sigma_\lambda^2} Af_\lambda] f_\lambda$$

Par ailleurs, reprenant (2.20), et applicant l'opérateur A, on a

$$\forall f \in H,\ Af = \sum_{\lambda \in \mathbf{N}} < f, f_\lambda > Af_\lambda$$

avec

$$\forall (\lambda, \lambda') \in \mathbf{N}^2,\ [Af_\lambda, Af_{\lambda'}] =< A^* Af_\lambda, f_{\lambda'} >=< \sigma_\lambda^2 f_\lambda, f_{\lambda'} >= \sigma_\lambda^2 < f_\lambda, f_{\lambda'} >= \sigma_\lambda^2 \delta_{\lambda,\lambda'}$$

c'est-à-dire que

$$\forall (\lambda, \lambda') \in \mathbf{N}^2,\ [\frac{1}{\sigma_\lambda} Af_\lambda, \frac{1}{\sigma_{\lambda'}} Af_{\lambda'}] = \delta_{\lambda,\lambda'}$$

On peut donc écrire

$$\forall f \in H,\ Af = \sum_{\lambda \in \mathbf{N}} \sigma_\lambda < f, f_\lambda > g_\lambda$$

où on a fait apparaître la famille orthonormée $(g_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{N}}$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbf{N},\ g_\lambda = \frac{1}{\sigma_\lambda} Af_\lambda$$

faisant ainsi apparaître la relation caractéristique de la décomposition en valeurs singulières (2.19), les valeurs singulières étant les racines carrées σ_λ des valeurs propres de A^*A.
On a donc aussi

$$\forall \lambda \in \mathbf{N},\ < f, f_\lambda >= \frac{1}{\sigma_\lambda} [Af, g_\lambda]$$

et donc

$$\forall f \in H,\ f = \sum_{\lambda \in \mathbf{N}} \frac{1}{\sigma_\lambda} [Af, g_\lambda] f_\lambda$$

Le fait que $(g_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{N}}$ soit également orthonormée constitue la particularité de la décomposition en valeurs singulières ; d'une part cela fournit un moyen de reconstruction efficace de f (au sens où « un coefficient calculable à partir des mesures donne directement un coefficient de la fonction que l'on cherche à identifier »), et d'autre part, en présence de données bruitées, cela permet de contrôler l'erreur commise sur chacun des coefficients reconstruits enfonction du niveau d'erreur supposé sur les données : ainsi, si au lieu d'observer Af, on observe $g = Af + z$ (où z est un bruit que l'on supposera de carré intégrable sur $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times [-1, 1])$), alors pour tout k, au lieu de reconstruire le coefficient $< f, f_k >$, on reconstruit $y_k =< g, f_k >$ avec une erreur égale à

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbf{N},\ | < f, f_k > - y_k | &= \left| [Af, \frac{1}{\sigma_k^2} Af_k] - [g, \frac{1}{\sigma_k^2} Af_k] \right| = \left| [z, \frac{1}{\sigma_k^2} Af_k] \right| \\ &= \frac{1}{\sigma_k} \left| [z, \frac{1}{\sigma_k} Af_k] \right| \leq \frac{1}{\sigma_k} \|z\|\ \| \frac{1}{\sigma_k} Af_k \| = \frac{1}{\sigma_k} \|z\| \end{aligned}$$

Si le niveau du bruit z est connu, l'erreur commise lors du calcul du $k^{\text{ème}}$ coefficient 2D est contrôlée par la valeur de la $k^{\text{ème}}$ valeur singulière.

Cependant, dans le cas où les valeurs singulières (σ_k) tendent vers zéro quand k tend vers l'infini, on voit que l'on ne sait pas contrôler de cette manière la stabilité de la reconstruction, puisqu'alors $\frac{1}{\sigma_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$

Pour construire des inverses stables, on peut avoir recours à des techniques dites *de régularisation*, nombreuses dans la littérature(par exemple [78, 72, 22]). Nous mentionnerons seulement ici la technique exposée dans [78] qui consiste à tronquer la décomposition en valeurs singulières pour ne conserver que les K premiers termes, correspondant aux K plus grandes valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{R}^*\mathcal{R}$.

2.2.4.3 Décomposition en valeurs singulières de la transformée de Radon

Elle est construite en dimension quelconque par Davison dans [27], reprise dans [89, 78] et énoncée par Caponnetto et Bertero dans le cas de la dimension 2 dans [20].
Nous allons expliciter les grandes étapes de sa construction. Celle-ci s'appuie sur le fait que l'opérateur $\mathcal{R}$ est, comme on l'a montré plus haut, continu de $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$ dans $\mathbf{L}^2(S^1 \times [-1,1])$, et les conditions d'applications du théorème spectral mentionné dans le paragraphe précédent sont réunies. En effet :

- L'opérateur $\mathcal{R}\mathcal{R}^*$ est autoadjoint ;
- L'opérateur $\mathcal{R} : \mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega}) \to \mathbf{L^2}(\mathbf{S^1} \times [\mathbf{-1}, \mathbf{1}])$ s'écrit sous la forme

$$\mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}, s) = \int_{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega}|\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}=\mathbf{s}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega}} K(\mathbf{\Theta}, s, \mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

  où on a noté K la fonction définie par

$$K(\mathbf{\Theta}, s, \mathbf{x}) = \chi_{\{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega}|\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}=\mathbf{s}\}}$$

  Suivant par exemple [13], on dit alors que $\mathcal{R}$ est un *opérateur intégral*, dont le noyau est K. Ici K appartient à $\mathbf{L}^2\left([0, 2\pi] \times [-1, 1] \times \mathbf{\Omega}, d\theta ds d\mathbf{x}\right)$. Nous admettrons que ceci permet de montrer que l'opérateur $\mathcal{R} : \mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega}) \to \mathbf{L^2}(\mathbf{S^1} \times [\mathbf{-1}, \mathbf{1}])$ est un opérateur *compact*, car on peut montrer qu'un opérateur intégral de cette forme est un opérateur dit *de Hilbert Schmidt*, puis qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est un opérateur compact. (cf [9]). Ceci permet alors d'en déduire, toujours d'après [13], que son opérateur adjoint est lui-aussi compact, puis, par composition, que l'opérateur $\mathcal{R}\mathcal{R}^*$ est compact.

L'opérateur $\mathcal{R}\mathcal{R}^*$ vérifie ainsi les conditions du théorème spectral énoncé plus haut, et l'existence de la décomposition en valeurs singulières est assurée.

Dans la suite, nous allons expliciter la décomposition en valeurs singulières de la transformée de Radon.

Proposition 2.2.3 (Décomposition en valeurs singulières de la transformée de Radon)
Pour toute fonction f appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$*, on peut écrire*

$$f = \sum_{k\in\mathbf{N}} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{\epsilon=1}^{2} \frac{1}{\sigma_{k,k-2m}} [\mathcal{R}f, g_{k,k-2m,\epsilon}]_{w^{-1}} f_{k,k-2m,\epsilon}$$

et

$$\mathcal{R}f = \sum_{k\in\mathbf{N}} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{\epsilon=1}^{2} \sigma_{k,k-2m} < f, f_{k,k-2m,\epsilon} > g_{k,k-2m,\epsilon}$$

où les familles $(f_{k,k-2m,\epsilon})$ *et* $(g_{k,k-2m,\epsilon})$*, avec* $k \in \mathbf{N}$*,* $m = 0 \cdots \frac{k}{2}$*,* $\epsilon \in \{1, 2\}$*, sont des familles orthonormées, respectivement dans* $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ *et* $\mathbf{L}^2\left(\mathbf{S}^1 \times [-1, 1], w^{-1}(s)\right)$*, définies par*

$$f_{k,k-2m,\epsilon}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{2(k+1)}{\pi}} |\mathbf{x}|^{k-2m} P_m^{(0,k-2m)}(2|\mathbf{x}|^2 - 1) Y_{k-2m,\epsilon}\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right)$$

et

$$g_{k,r,\epsilon}(\mathbf{\Theta}, s) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} w(s) U_k(s) Y_{r,\epsilon}(\mathbf{\Theta})$$

où

- *pour tout* $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1$, $Y_{r,1}(\mathbf{\Theta}) = \cos(r\theta)$, $Y_{r,2}(\mathbf{\Theta}) = \sin(r\theta)$;
- *pour tout* $s \in [-1,1]$, $w(s) = \sqrt{1-s^2}$;
- *pour tout* $k \in \mathbf{N}$, U_k *désigne le polynôme de Tchebychev de 2ème espèce et de degré* k (cf. Annexe B) ;
- *pour tous* $k \in \mathbf{N}$ *et* $m = 0...\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, $P_m^{(0,k-2m)}$ *désigne le polynôme de Jacobi de degré* m, *de paramètres* 0 *et* $k-2m$ (cf. Annexe B et [89]) ;

et où les valeurs singulières $(\sigma_{k,k-2m})$, *pour* $k \in \mathbf{N}$, $m = 0 \cdots \frac{k}{2}$ *sont égales à*

$$\sigma_{k,k-2m} = 2\sqrt{\frac{\pi}{k+1}}$$

De plus, les familles $(f_{k,k-2m,\epsilon})$ *et* $(g_{k,k-2m,\epsilon})$ *sont liées par les relations suivantes :*

$$f_{k,k-2m,\epsilon} = \frac{1}{\sigma_{k,k-2m}} \mathcal{R}^*_{w^{-1}} g_{k,k-2m,\epsilon}$$

Preuve . Nous donnons ici les étapes principales de la construction.

Pour cela, on peut d'abord remarquer que pour toute fonction h définie sur $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times [-1,1])$,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{\Theta_1} \in \mathbf{S}^1,\ \forall s \in [-1,1],\ \mathcal{R}\mathcal{R}^*(h)(\mathbf{\Theta_1}, s) &= \mathcal{R}_{\theta_1}\mathcal{R}^* h(s) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \mathcal{R}^* h(s\mathbf{\Theta_1} + t\mathbf{\Theta_1}^\perp) dt \\ &= \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \int_0^{2\pi} h\left(\mathbf{\Theta_2}, (s\mathbf{\Theta_1} + t\mathbf{\Theta_1}^\perp)\cdot\mathbf{\Theta_2}\right) d\theta_2 dt \end{aligned}$$

L'idée consiste alors à chercher les fonctions singulières de l'opérateur $\mathcal{R}\mathcal{R}^*$ sous forme séparable, c'est-à-dire sous la forme $h = YP : (\mathbf{\Theta}_1, s) \in \mathbf{S}^1 \times [-1,1] \mapsto Y(\mathbf{\Theta}_1)P(s)$, où Y est une fonction 2π périodique appartenant à l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1)$, et où P appartient à $\mathbf{L}^2([-1,1])$, à support inclus dans $[-1,1]$. Or, pour une fonction h ainsi choisie, on a

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{\Theta_1} \in \mathbf{S}^1,\ \forall s \in [-1,1], \quad & \mathcal{R}_{\theta_1}\mathcal{R}^* h(s) = \mathcal{R}_{\theta_1}\mathcal{R}^*(YP)(s) \\ &= \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \int_0^{2\pi} Y\left(\mathbf{\Theta_2}\right) P\left(s\mathbf{\Theta_1}\cdot\mathbf{\Theta_2} + t\mathbf{\Theta_1}^\perp\cdot\mathbf{\Theta_2}\right) d\theta_2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} Y\left(\mathbf{\Theta_2}\right) \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} P\left(s\mathbf{\Theta_1}\cdot\mathbf{\Theta_2} + t\mathbf{\Theta_1}^\perp\cdot\mathbf{\Theta_2}\right) dt\ d\theta_2 \end{aligned}$$

Guidé par le fait que l'on sait que l'on peut construire des bases orthonormées de $\mathbf{L}^2([-1,1])$ à partir de polynômes, on choisit P sous forme polynomiale ; or si P est un polynôme de degré $k \geq 0$, noté $P(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j$, alors

$$P\left(\mathbf{\Theta_1}\cdot\mathbf{\Theta_2} s + \mathbf{\Theta_1}^\perp\cdot\mathbf{\Theta_2} t\right) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \left(\sum_{i=0}^{j} \beta_{i,j,\theta_1,\theta_2} t^i s^{j-i}\right)$$

où le coefficient $\beta_{i,j,\theta_1,\theta_2}$ est donné par $\beta_{i,j,\theta_1,\theta_2} = \mathrm{C}_j^i(\boldsymbol{\Theta_1}^\perp \cdot \boldsymbol{\Theta_2})^i(\boldsymbol{\Theta_1} \cdot \boldsymbol{\Theta_2})^{j-i}$, et donc

$$\begin{aligned}
&\int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} P\left(s\boldsymbol{\Theta_1} \cdot \boldsymbol{\Theta_2} + t\boldsymbol{\Theta_1}^\perp \cdot \boldsymbol{\Theta_2}\right) dt = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \left(\sum_{i=0}^{j} \beta_{i,j,\theta_1,\theta_2} s^{j-i} \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} t^i dt \right) \\
= \quad & \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \beta_{2m,j,\theta_1,\theta_2} s^{j-2m} \frac{2}{2m+1} \left(\sqrt{1-s^2}\right)^{2m+1} \quad \text{(les termes d'indice } i \text{ impair ont une contribution nulle)} \\
= \quad & 2\sqrt{1-s^2} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \frac{\beta_{2m,j,\theta_1,\theta_2}}{2m+1} s^{j-2m} (1-s^2)^m
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\mathcal{R}^*(YP)(\boldsymbol{\Theta_1}, s) &= \int_0^{2\pi} \left(2Y\left(\boldsymbol{\Theta_2}\right) \sqrt{1-s^2} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \frac{\beta_{2m,j,\theta_1,\theta_2}}{2m+1} s^{j-2m} (1-s^2)^m \right) d\theta_2 \\
&= 2\sqrt{1-s^2} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \frac{\mathrm{C}_j^{2m}}{2m+1} s^{j-2m} (1-s^2)^m \int_0^{2\pi} (\boldsymbol{\Theta_1}^\perp \cdot \boldsymbol{\Theta_2})^{2m} (\boldsymbol{\Theta_1} \cdot \boldsymbol{\Theta_2})^{j-2m} Y(\boldsymbol{\Theta_2}) d\boldsymbol{\Theta_2}
\end{aligned}$$

Ensuite, dans le but de faire apparaître une base de $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times [-1,1])$ comme produit tensoriel d'une base polynomiale de $\mathbf{L}^2([-1,1])$ par une base de $\mathbf{S}^1$, on choisit comme famille de fonctions Y la famille de fonctions $(Y_{r,\epsilon})_{r\in\mathbf{N},\epsilon\in\{1,2\}}$ définies par

$$\forall \boldsymbol{\Theta} \in \mathbf{S}^1,\ Y_{r,1}(\boldsymbol{\Theta}) = \cos(r\theta), Y_{r,2}(\boldsymbol{\Theta}) = \sin(r\theta)$$

Ce choix permet d'appliquer le résultat suivant, connu sous le nom de *théorème de Funk-Hecke* :

Lemme 2.2.1
Pour toute fonction réelle $h \in \mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times [-1,1])$

$$\begin{aligned}
\forall \boldsymbol{\Theta}_1 \in \mathbf{S}^1,\ \int_0^{2\pi} h(\boldsymbol{\Theta_1} \cdot \boldsymbol{\Theta_2}) \cos(r\theta_2) d\theta_2 &= 2\cos(r\theta_1) \int_{-1}^{1} h(t) T_r(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
\int_0^{2\pi} h(\boldsymbol{\Theta_1} \cdot \boldsymbol{\Theta_2}) \sin(r\theta_2) d\theta_2 &= 2\sin(r\theta_1) \int_{-1}^{1} h(t) T_r(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}
\end{aligned}$$

où, pour tout $r \in \mathbf{N}$, T_r *désigne le polynôme de Tchebychev de première espèce de degré* r [5].

[5] On rappelle que les polynômes de Tchebychev de première espèce $(T_r)_{r\in\mathbf{N}}$ forment une base orthonormée de $\mathbf{L}^2\left([-1,1], \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}\right)$.

Preuve :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} h(\mathbf{\Theta_1}\cdot\mathbf{\Theta_2})e^{ir\theta_2}d\theta_2 = \int_0^{2\pi} h(\cos(\theta_2-\theta_1))e^{ir\theta_2}d\theta_2\\
&= \int_0^{2\pi} h(\cos\varphi)e^{ir(\theta_1+\varphi)}d\varphi = e^{ir\theta_1}\left(\int_{-\pi}^{0} h(\cos\varphi)e^{ir\varphi}d\varphi + \int_0^{\pi} h(\cos\varphi)e^{ir\varphi}d\varphi\right)\\
&= e^{ir\theta_1}\left(\int_0^{\pi} h(\cos(-\varphi'))e^{-ir\varphi'}d\varphi' + \int_0^{\pi} h(\cos\varphi)e^{ir\varphi}d\varphi\right)\\
&= 2e^{ir\theta_1}\int_0^{\pi} h(\cos\varphi)\cos(r\varphi)d\varphi = 2e^{ir\theta_1}\int_{-1}^{1} h(t)\cos(r\arccos t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\\
&= 2e^{ir\theta_1}\int_{-1}^{1} h(t)T_r(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}
\end{aligned}$$

Il suffit alors d'identifier les parties réelle et imaginaire dans l'égalité précédente pour obtenir le résultat annoncé.

En appliquant le théorème de Funk-Hecke dans la dernière égalité écrite avant le lemme, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}\mathcal{R}^*(Y_{r,\epsilon}P)(\mathbf{\Theta_1},s)\\
=\;& 4\sqrt{1-s^2}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\frac{\mathrm{C}_j^{2m}}{2m+1}s^{j-2m}(1-s^2)^m\left(\int_{-1}^{1}(1-t^2)^m t^{j-2m}\frac{T_r(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\right)Y_{r,\epsilon}(\mathbf{\Theta_1})\\
=\;& 4\sqrt{1-s^2}Y_{r,\epsilon}(\mathbf{\Theta_1})Q_{k,r}(s)
\end{aligned}$$

où on a noté $Q_{k,r}$ le polynôme de degré k défini par

$$Q_{k,r}(s) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\frac{\mathrm{C}_j^{2m}}{2m+1}\left(\int_{-1}^{1}(1-t^2)^m t^{j-2m}\frac{T_r(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\right)s^{j-2m}(1-s^2)^m \qquad (2.21)$$

On a ainsi prouvé que si P est un polynôme de degré k alors il existe un polynôme $Q_{k,r}$ de degré k tel que

$$\mathcal{R}\mathcal{R}^*(Y_{r,\epsilon}P)(\mathbf{\Theta_1},s) = 4\sqrt{1-s^2}Q_{k,r}(s)Y_{r,\epsilon}(\mathbf{\Theta_1}) = 4w(s)Q_kY_{r,\epsilon}(\mathbf{\Theta_1}) \qquad (2.22)$$

où on a noté w la fonction définie sur $[-1,1]$ par

$$w(s) = \sqrt{1-s^2}$$

Afin de faire apparaître des vecteurs propres, on cherche alors à exhiber une famille de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tels que pour chaque P_k, le polynôme $Q_{k,r}$ qui lui est ainsi associé $Q_{k,r}$ lui soit proportionnel.
Pour cela, on a recours à la famille $(U_m)_m$ des polynômes de Tchebychev de deuxième espèce ; on sait que cette famille de polynômes constitue une base orthonormée de $\mathbf{L}^2([-1,1],w)$, où $\mathbf{L}^2([-1,1],w)$ désigne l'espace de Hilbert des fonctions définies sur $[-1,1]$ vérifiant

$$\|g\|_w^2 = \int_{-1}^{-1}|g(s)|^2w(s)ds < \infty$$

Dans la suite, on notera $< .,. >_w$ le produit scalaire associé, et, par extension, on notera $[.,.]_w$ le produit scalaire défini sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ par

$$[g,h]_w = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \overline{g(\mathbf{\Theta},s)} h(\mathbf{\Theta},s) ds d\theta$$

Si pour k fixé, on choisit $P = U_k$ dans l'égalité (2.22), alors le polynôme $Q_{k,r}$ associé à U_k, c'est-à-dire tel que $\mathcal{R}\mathcal{R}^*(Y_{r,\epsilon}U_k) = 4wQ_{k,r}Y_{r,\epsilon}$, vérifie les deux propriétés suivantes :

- d'une part, pour tout entier $l > k$, il est orthogonal au polynôme U_l, puisque celui-ci est orthogonal pour le poids w à tout polynôme de degré strictement inférieur au sien :

$$\forall l > k, \ < Q_{k,r}, U_l >_w = \int Q_{k,r}(s) U_l(s) w(s) ds = 0$$

- d'autre part, pour tout $l < k$, on peut écrire

$$\begin{aligned} [Q_{k,r}Y_{r,\epsilon}, Y_{r,\epsilon}U_l]_w &= [wQ_{k,r}Y_{r,\epsilon}, Y_{r,\epsilon}U_l] = \frac{1}{4}[\mathcal{R}\mathcal{R}^*(Y_{r,\epsilon}U_k), Y_{r,\epsilon}U_l] \\ &= \frac{1}{4}[Y_{r,\epsilon}U_k, \mathcal{R}\mathcal{R}^*(Y_{r,\epsilon}U_l)] = [Y_{r,\epsilon}U_k, wQ_{l,r}Y_{r,\epsilon}] \\ &= < Y_{r,\epsilon}, Y_{r,\epsilon} >< U_k, Q_{l,r} >_w = 0 \end{aligned}$$

  car U_k est orthogonal, pour le poids w, à tout polynôme de degré strictement inférieur à k.

On a ainsi montré que le polynôme $Q_{k,r}$ associé à U_k est orthogonal, pour le poids w, à tous les polynômes de Tchebychev (U_m) de degré différent de k, ce qui implique que le polynôme $Q_{k,r}$ est proportionnel à U_k, c'est-à-dire qu'il existe une constante réelle $\gamma_{k,r}$ telle que

$$Q_{k,r} = \gamma_{k,r} U_k \tag{2.23}$$

et donc on a

$$\mathcal{R}\mathcal{R}^*(Y_{r,\epsilon}U_k) = 4\gamma_{k,r} w U_k Y_{r,\epsilon}$$

On se place alors dans l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times [-1,1], w^{-1})$, où w^{-1} désigne le poids $s \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}$. On peut montrer, en adaptant la preuve de la propriété (2.1.5), que l'opérateur $\mathcal{R}$ est continu de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ dans $\mathbf{L}^2(S^1 \times [-1,1], w^{-1})$ (on peut en fait montrer que cette continuité est vérifiée pour tous les poids p tels que $|p(s)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}} = w^{-1}(s)$ sur $]-1,1[$) ; par conséquent, $\mathcal{R}$ admet un unique opérateur adjoint au sens du produit scalaire associé, que l'on note $\mathcal{R}^*_{w^{-1}}$, et qui est défini par

$$\mathcal{R}^*_{w^{-1}} g(\mathbf{x}) = \int_0^{2\pi} g(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}) \frac{d\theta}{\sqrt{1-(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta})^2}}$$

Introduire cet opérateur adjoint permet alors de faire apparaître la relation suivante :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \forall r \in \mathbf{N}, \ \mathcal{R}\mathcal{R}^*_{w^{-1}}(wU_kY_{r,\epsilon}) = 4\gamma_{k,r} w U_k Y_{r,\epsilon}$$

Les fonctions $(wU_kY_{r,\epsilon})_{k\in\mathbf{N}, r\in\mathbf{N}, \epsilon\in\{1,2\}}$ sont donc des vecteurs propres de l'opérateur $\mathcal{R}\mathcal{R}^*_{w^{-1}}$. Elles sont par ailleurs deux à deux orthogonales pour le poids w^{-1}, puisque l'on a :

$$\forall (k,l) \in \mathbf{N}^2, \ < wU_k, wU_l >_{w^{-1}} = < U_K, U_l >_w = \delta_{k,l}$$

On peut alors vérifier que cette famille orthogonale de vecteurs propres de $\mathcal{R}\mathcal{R}^*_{w^{-1}}$ forme une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R})$. Pour cela, considérons une fonction quelconque g appartenant à $\mathbf{L}^2([-1,1])$; alors

$$\begin{aligned}\sum_k < g, wU_k >_{w^{-1}} wU_k &= w\sum < g, wU_k >_{w^{-1}} U_k = w\sum < g, U_k > U_k \\ &= w\sum < \frac{g}{w}, U_k >_w U_k = w\frac{g}{w} = g\end{aligned}$$

On a utilisé dans l'avant-dernière égalité le fait que la famille $(U_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2([-1,1], w)$.
Par conséquent la famille $(wU_kY_{r,\epsilon})_{k\in\mathbf{N},r\in\mathbf{N},\epsilon\in\{1,2\}}$ de vecteurs propres de $\mathcal{R}\mathcal{R}^*_{w^{-1}}$ est, par produit tensoriel, une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times [-1,1], w^{-1})$.

On peut en outre expliciter les valeurs propres $(4\gamma_{k,r})_{k\in\mathbf{N},r\in\mathbf{N}}$ associées. Par définition de $\gamma_{k,r}$ (2.23), on a en particulier, pour tout $k \in \mathbf{N}$, fixé :

$$\gamma_{k,r} = \frac{Q_{k,r}(1)}{U_k(1)}$$

Or, d'une part, par définition des polynômes de Tchebychev de première espèce [78]

$$\begin{aligned}U_k(1) &= \lim_{s\to 1}\frac{\sin(k+1)\arccos s}{\sin\arccos s} = \lim_{s\to 1}\frac{\sin(k+1)\arccos s}{(k+1)\arccos s}(k+1)\frac{\arccos s}{\sin\arccos s} \\ &= k+1 \text{ car } \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1\end{aligned}$$

et d'autre part, d'après (2.21),

$$\begin{aligned}Q_{k,r}(1) &= \sum_{j=0}^{k}\alpha_j\left(\int_{-1}^{1} t^j\frac{T_r(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\right) = \int_{-1}^{1}\left(\sum_{j=0}^{k}\alpha_j t^j\right)\frac{T_r(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= \int_{-1}^{1} U_k(t)\frac{T_r(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{-1}^{1}\frac{\sin((k+1)\arccos t)}{\sin\arccos t}\frac{\cos(r\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= \int_0^{\pi}\frac{\sin((k+1)\varphi)}{\sin\varphi}\cos(r\varphi)d\varphi\end{aligned}$$

Commme, par récurrence sur p, on peut montrer que

$$\frac{\sin 2p\varphi}{\sin\varphi} = 2\sum_{i=1}^{p}\cos(2i-1)\varphi \quad \text{et} \quad \frac{\sin(2p+1)\varphi}{\sin\varphi} = 1 + 2\sum_{i=1}^{p}\cos 2i\varphi$$

avec pour $i \geq 0, j \geq 0$,

$$\int_0^{\pi}\cos i\varphi\cos j\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2}\delta_{i,j}$$

on en déduit que

$$Q_{k,r}(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > k \\ 0 & \text{si } r \leq k \text{ et si } r \text{ et } k \text{ n'ont pas la même parité} \\ \pi & \text{sinon}\end{cases}$$

Par conséquent, les seules valeurs propres non nulles sont les $\gamma_{k,k-2m}$, pour $k \in \mathbf{N}$, et $m = 0..\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$, et on a

$$\gamma_{k,k-2m} = \frac{\pi}{k+1},\ k \in \mathbf{N},\ m = 0..\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$$

et

$$\mathcal{R}\mathcal{R}^*(U_kY_{k-2m,\epsilon}) = \mathcal{R}\mathcal{R}^*_{w^{-1}}(wU_kY_{k-2m,\epsilon}) = \sigma^2_{k,k-2m}wU_kY_{k-2m,\epsilon}$$

avec

$$\sigma^2_{k,k-2m} = \frac{4\pi}{k+1},\ k \in \mathbf{N},\ m = 0..\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$$

Reste alors à normaliser les vecteurs propres de $\mathcal{R}\mathcal{R}^*_{w^{-1}}$:

$$\begin{aligned}\forall r \in \mathbf{N}, \qquad \|wY_{r,\epsilon}U_k\|^2_{w^{-1}} &= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} |Y_{r,\epsilon}(\theta)U_k(s)w(s)|^2 \frac{ds}{w(s)}d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} |Y_{r,\epsilon}(\theta)|^2\, d\theta\right)\left(\int_{-1}^{1} |U_k(s)|^2 \sqrt{1-s^2}ds\right) \\ &= \pi\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2((k+1)\arccos s)}{\sin^2\arccos s}\sqrt{1-s^2}ds = \pi\int_0^{\pi}\sin^2((k+1)\varphi)d\varphi = \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

On pose alors, pour tout couple (k,m,ϵ), $k \in \mathbf{N}$, $m = 0..\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$, $\epsilon \in \{1,2\}$:

$$g_{k,k-2m,\epsilon}(\mathbf{\Theta}, s) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}w(s)U_k(s)Y_{k-2m,\epsilon}(\mathbf{\Theta})$$

Dans le domaine direct, on définit

$$f_{k,k-2m,\epsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma_{k,k-2m}}\mathcal{R}^*_{w^{-1}}g_{k,k-2m,\epsilon}(\mathbf{x})$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^*_{w^{-1}}g_{k,k-2m,\epsilon}(\mathbf{x}) &= \int_0^{2\pi} g_{k,k-2m,\epsilon}(\mathbf{\Theta}, \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})\frac{d\theta}{w(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{2\pi} U_k(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})Y_{k-2m,\epsilon}(\mathbf{\Theta})d\theta \qquad (2.24)\end{aligned}$$

Or, pour toute fonction $h \in \mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times [-1,1])$, le lemme de Funk-Hecke (2.2.1) peut se prolonger de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\forall \rho > 0,\ \forall \mathbf{\Theta}_1 \in \mathbf{S}^1, \qquad \int_0^{2\pi} h(\rho\mathbf{\Theta_1}\cdot\mathbf{\Theta_2})e^{ir\theta_2}d\theta_2 &= \int_0^{2\pi} h(\rho\cos(\theta_2-\theta_1))e^{ir\theta_2}d\theta_2 \\ &= 2e^{ir\theta_1}\int_0^{\pi} h(\rho\cos\varphi)\cos(r\varphi)d\varphi = 2e^{ir\theta_1}\int_{-1}^{1} h(\rho t)\cos(r\arccos t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= 2e^{ir\theta_1}\int_{-1}^{1} h(\rho t)T_r(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\end{aligned}$$

où on a introduit à nouveau le polynôme de Tchebychev de première espèce et de degré r noté T_r.
Reprenant alors (2.24), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{*_{w^{-1}}}g_{k,k-2m,\epsilon}(\mathbf{x}) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{2\pi} U_k(|\mathbf{x}|\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\cdot\mathbf{\Theta})Y_{k-2m,\epsilon}(\mathbf{\Theta})d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}Y_{k-2m,\epsilon}\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right)\int_{-1}^{1} U_k(|\mathbf{x}|t)T_{k-2m}(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= 2\frac{\sqrt{2}}{\pi}Y_{k-2m,\epsilon}\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right)|\mathbf{x}|^{k-2m}\pi P^{(0,k-2m)}_{\frac{k-(k-2m)}{2}}(2|\mathbf{x}|^2-1) \\ &= 2\sqrt{2}Y_{k-2m,\epsilon}\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right)|\mathbf{x}|^{k-2m}P^{(0,k-2m)}_{m}(2|\mathbf{x}|^2-1)\end{aligned}$$

où on s'est appuyé sur une propriété conjointe des polynômes de Tchebychev de première et seconde espèces [89](p.40), pour introduire le polynôme de Jacobi [6] de paramètres 0 et $k-2m$ et de degré m, noté $P_m^{(0,k-2m)}$.

Finalement , pour $k \in \mathbf{N}$, $m = 0..\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, $\epsilon \in \{1,2\}$

$$f_{k,k-2m,\epsilon}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{2(k+1)}{\pi}} |\mathbf{x}|^{k-2m} P_m^{(0,k-2m)}(2|\mathbf{x}|^2 - 1) Y_{k-2m,\epsilon}\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right)$$

c'est-à-dire, en coordonnées polaires

$$f_{k,k-2m,\epsilon}(\rho\mathbf{\Theta}) = \sqrt{\frac{2(k+1)}{\pi}} \rho^{k-2m} P_m^{(0,k-2m)}(2\rho^2 - 1) Y_{k-2m,\epsilon}(\mathbf{\Theta})$$

■

Nous avons présenté ici ces résultats et explicité les calculs afin de pouvoir, dans le chapitre suivant, comparer cette décomposition, classique, avec d'autres modes de décompositions de la transformée de Radon. En ce sens, nous avons aussi représenté quelques-unes des fonctions de base de cette décomposition, en figure (2.9) pour des fonctions $g_{k,l,\epsilon}$ du domaine de Radon, et en figure (2.10) pour des fonctions $f_{k,l,\epsilon}$ du domaine direct.

Signalons enfin (même si nous ne l'utiliserons pas ici) que l'application courante de la décomposition en valeurs singulières de la transformée de Radon réside dans la possibilité d'inversion de données bruitées qu'elle procure, puisqu'elle permet de reconstruire les pseudo-inverses de données qui « sortent » de l'image de $\mathcal{R}f$: c'est l'objet de la propriété suivante, que nous admettrons.

Proposition 2.2.4 (Calcul du pseudo-inverse à l'aide de la décomposition en valeurs singulières)
Pour toute fonction g appartenant à $\mathrm{Im}(\mathcal{R}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{R})^{\perp}$, le pseudo-inverse de g s'écrit avec

$$\mathcal{R}^{+} g = \sum_{k \in \mathbf{N}} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{\epsilon=1}^{2} \frac{1}{\sigma_{k,k-2m}} [g, g_{k,k-2m,\epsilon}]_{w^{-1}} f_{k,k-2m,\epsilon}$$

Dans le cas où $g = \mathcal{R}f$ on retrouve la formule d'inversion de $\mathcal{R}f$ énoncée dans le cas précédent, mais cette formule, valable dans un cadre plus large, permet de calculer un inverse faible en présence de données bruitées.

2.2.5 Vers l'implémentation : Echantillonnage des données

La discrétisation d'une formule d'inversion passe par une étape d'échantillonnage des données à inverser, c'est-à-dire, ici, par l'échantillonnage de la transformée de Radon : comment l'échantillonner pour pouvoir conserver une quantité d'information suffisante, permettant ensuite de reconstruire fidèlement la fonction f ? Avant d'aborder ce problème - l'échantillonnage d'une fonction définie sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ - nous allons nous arrêter sur le cas de l'échantillonnage d'une fonction définie sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$,

2.2.5.1 Echantillonnage des fonctions réelles appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ [45, 105]

Soit f une fonction réelle appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$; on construit une grille régulière de $\mathbf{R}^n$, avec un pas $h > 0$: $(h\mathbf{p})_{\mathbf{p} \in \mathbf{Z}^n}$. Echantillonner f sur la grille $(h\mathbf{p})_{\mathbf{p} \in \mathbf{Z}^n}$ consiste à mesurer les valeurs de f en chacun des points de la grille, c'est-à-dire à construire le signal

$$f\Delta_h = \sum_{\mathbf{p} \in \mathbf{Z}^n} f(h\mathbf{p}) \delta_{h\mathbf{p}}$$

[6] Les polynômes de Jacobi $(P_k^{(a,b)})_k$ sont les polynômes orthogonaux pour le poids $(1-s)^a(1+s)^b$).

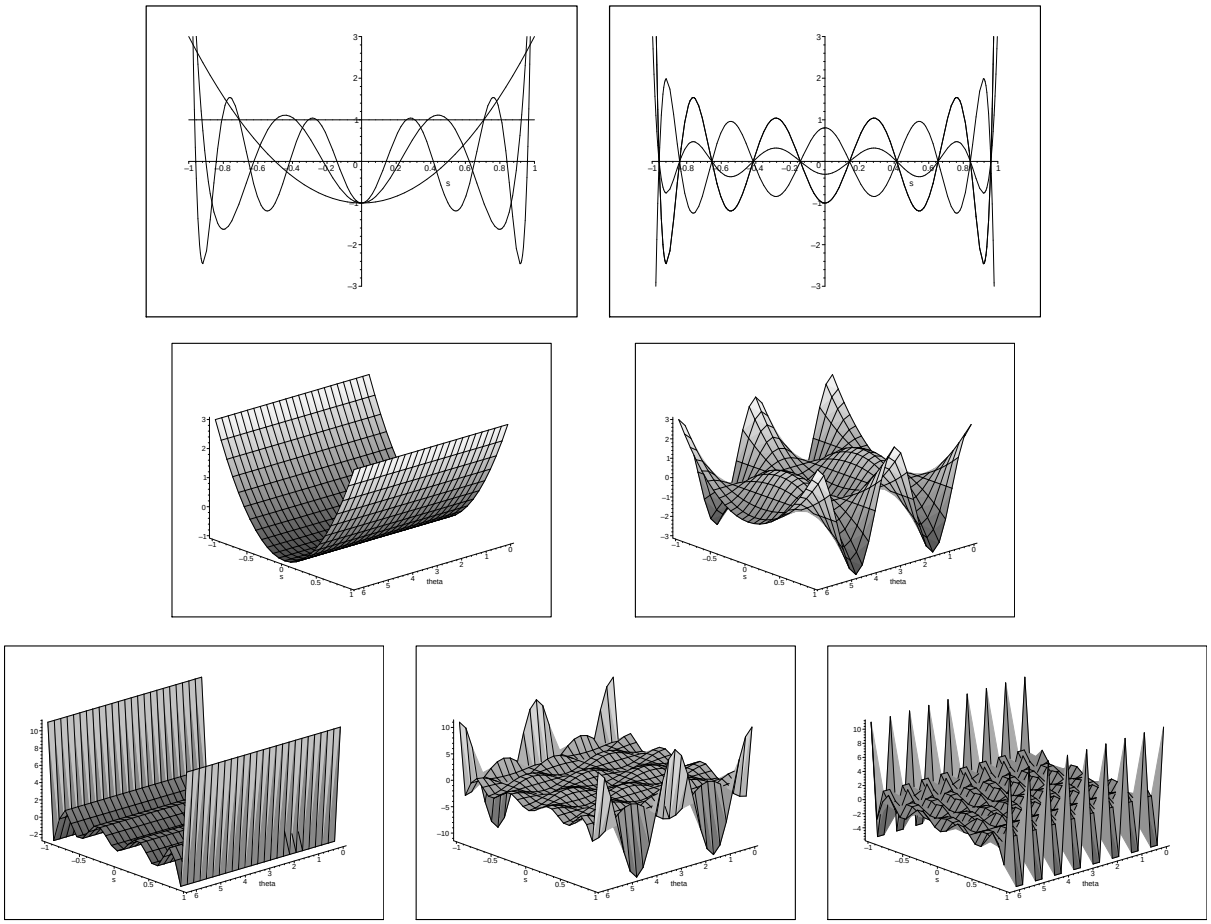


FIG. 2.9 – Les fonctions de base dans la décomposition en valeurs singulières, dans le domaine de Radon : en haut, évolution, pour $\theta = 0$, de $g_{m,0,1}$ en fonction de m : $m = 0, 2, 6, 10$; puis évolution, pour $m = 10$, $\theta = \frac{\pi}{5}$ de $g_{10,l,1}$, en fonction de l : $l = 0, 2, 6, 10$. Deuxième ligne : sinogramme de $g_{2,0,1}$ et $g_{2,2,1}$. Troisième ligne : sinogramme de $g_{10,0,1}$ et $g_{10,2,1}$ et $g_{10,8,1}$. On constate en particulier, pour la suite, que ces fonctions ne sont pas localisées en la variable s.

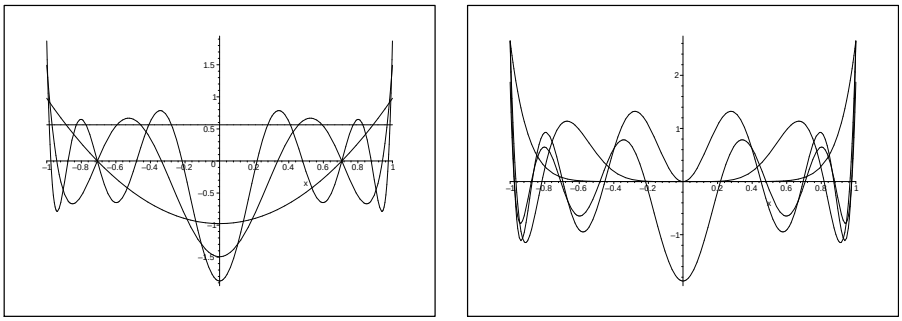


FIG. 2.10 – Les fonctions de base dans la décomposition en valeurs singulières, dans le domaine direct : ces fonctions sont radiales, et on en a seulement représenté une section ; en haut, évolution, de $f_{m,0,1}$ en fonction de m : $m = 0, 2, 6, 10$; puis évolution, pour $m = 10$ de $g_{10,l,1}$, en fonction de l : $l = 0, 2, 6, 10$. On constate en particulier, pour la suite, que ces fonctions ne sont pas localisées dans le domaine direct.

où on effectue le produit du signal f par la distribution Δ_h, appelée *peigne de Dirac*, définie par

$$\Delta_h = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} \delta_{h\mathbf{p}}$$

Le signal échantillonné est défini comme une somme d'impulsions coïncidant avec la fonction f en chacun des points de la grille $(h\mathbf{p})_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n}$. La théorie de l'échantillonnage s'attache alors à déterminer quelle part de l'information sur f est présente dans le signal échantillonné, ou, d'un autre point de vue, comment choisir la grille d'échantillonnage pour pouvoir ensuite restituer le plus possible d'information sur f, voire, si possible, *toute* l'information présente dans f, à partir des échantillons du signal disponibles.

Une réponse à ces questions réside dans la relation entre la transformée de Fourier de f et celle du signal échantillonné $f\Delta_h$.
La transformée de Fourier du signal $f\Delta_h$ est égale à

$$\widehat{f\Delta_h} = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} f(h\mathbf{p})\widehat{\delta_{h\mathbf{p}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} f(h\mathbf{p})e^{-ih\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}$$

(la distribution $\widehat{\delta_{h\mathbf{p}}}$ est la fonction $\mathbf{k} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-ih\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}$)
Pour faire le lien avec $\hat{f}$, on a recours à la formule de Poisson [78], qui établit que

$$\forall g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n),\ \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} \hat{g}\left(\mathbf{k} - \frac{2\pi}{h}\mathbf{p}\right) = \frac{h^n}{\sqrt{2\pi}^n} \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} g(h\mathbf{p})e^{-ih\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}$$

(après quelques calculs, on peut en effet montrer que le terme de droite n'est autre que le développement en série de Fourier du terme de gauche, fonction $\frac{2\pi}{h}$-périodique en chacune de ses variables).

Si on applique la formule de Poisson au signal échantillonné $f\Delta_h$, on obtient

$$\widehat{f\Delta_h}(\mathbf{k}) = \frac{1}{h^n} \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} \hat{f}\left(\mathbf{k} - \frac{2\pi}{h}\mathbf{p}\right) \tag{2.25}$$

La transformée de Fourier du signal échantillonné est donc une fonction périodique, de période $\frac{2\pi}{h}$ en chacune de ses variables (c'est en ce sens qu'on dit souvent qu'échantillonner revient à périodiser la transformée de Fourier), égale à la somme des translatés de $\hat{f}$ en chacun des points de la grille du domaine de Fourier $\frac{2\pi}{h}\mathbf{p}$.

Deux situations sont alors possibles :

Premier cas : la transformée de Fourier de f est à support compact Dans ce cas, si on note b la fréquence de coupure de f, c'est-à-dire si le support de $\hat{f}$ est inclus dans la boule de rayon b de $\mathbf{R}^n$, alors il est possible de faire en sorte que les *lobes* translatés $\mathbf{k} \mapsto \hat{f}(\mathbf{k} - \frac{2\pi}{h}\mathbf{p})$ soient à supports disjoints deux à deux (on dit *sans recouvrement*) : pour cela il suffit que le pas de la grille du domaine de Fourier $\frac{2\pi}{h}$ soit plus grand que le diamètre du support de $\hat{f}$, c'est-à-dire il suffit que

$$h \leq \frac{\pi}{b}$$

Cette condition sur le pas h est appelée *condition de Nyquist*. Sous cette condition, on peut, en multipliant dans l'expression (2.25), le signal $\widehat{f\Delta_h}$ par la fenêtre $\chi_{[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n}$, isoler le lobe à l'origine, et en prenant sa transformée de Fourier inverse, retrouver f :

$$\widehat{f\Delta_h\chi_{[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n}} = \frac{1}{h^n}\hat{f}$$

Ceci fournit ensuite une formule de reconstruction de f à partir de ses échantillons, puisqu'on a alors

$$\hat{f} = h^n \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} f(h\mathbf{p})\widehat{\delta_{h\mathbf{p}}}\chi_{[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n}$$

et donc

$$f = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} f(h\mathbf{p})\delta_{h\mathbf{p}} * \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{h}\cdot\right)$$

(on utilise la propriété (A.0.4)), et on obtient finalement

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} f(h\mathbf{p})\mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi}{h}(\mathbf{x}-h\mathbf{p})\Big)$$

Cette formule permet de reconstruire f par interpolation ; elle est appelée *formule de Shannon*. C'est une décomposition de f dans une base orthonormée des fonctions de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ b-bande limitées.

Généralisation à des grilles d'échantillonnages régulières, mais non carrées [30]
Ce qui précède définit des conditions d'échantillonnage de la fonction f sur la grille régulière, carrée, $(h\mathbf{p})_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} = ((hI)\mathbf{p})_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n}$; on dit que cette grille est engendrée par la matrice hI, où I désigne la matrice identité de $\mathbf{R}^n$.
On peut construire d'autres grilles d'échantillonnage de la manière suivante : on choisit une matrice inversible $W \in Gl_n(\mathbf{R})$ (où $Gl_n(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles à coefficients réels), et on construit la grille de points d'échantillonnage $W\mathbf{Z}^n$.
Le signal obtenu par échantillonnage de la fonction f est alors

$$f\Delta_W = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} f(W\mathbf{p})\delta_{W\mathbf{p}}$$

et sa transformée de Fourier est égale à

$$\widehat{f\Delta_W} = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} f(W\mathbf{p})\widehat{\delta}_{W\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} f(W\mathbf{p})e^{-iW\mathbf{p}\cdot k}$$

En appliquant la Formule de Poisson généralisée, qui établit que

$$\forall g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n),\ \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} \hat{g}\left(\mathbf{k}-2\pi W^{-T}\mathbf{p}\right) = \frac{\det W}{\sqrt{2\pi}^n}\sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} g(W\mathbf{p})e^{-i\mathbf{k}\cdot W\mathbf{p}}$$

(où W^{-T} désigne l'inverse de la transposée de la matrice inversible W), on obtient

$$\widehat{f\Delta_W}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\det W}\sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} \widehat{f}\left(\mathbf{k}-2\pi W^{-T}\mathbf{p}\right)$$

Si les ensembles translatés $K + 2\pi W^{-T}\mathbf{Z}^n$ sont sans recouvrement (*condition de Nyquist généralisée*), alors on peut isoler dans le terme de droite le lobe de $\widehat{f\Delta_W}$ ayant le même support que $\hat{f}$, en multipliant par l'indicatrice χ_K de l'ensemble K (ce lobe correspond au terme de la somme associé à $\mathbf{p} = (0,\cdots,0)$) ; on obtient alors, en repartant du terme de droite de la dernière égalité,

$$\frac{1}{\det W}\hat{f} = \left(\widehat{f\Delta_W}\right)\chi_K = \left(\sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} f(W\mathbf{p})\widehat{\delta_{W\mathbf{p}}}\right)\chi_K = \left(\sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} f(W\mathbf{p})\widehat{\delta_{W\mathbf{p}}}\chi_K\right)$$

et donc

$$f = \frac{\det W}{\sqrt{2\pi}^n} \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} f(W\mathbf{p})\delta_{W\mathbf{p}} * \check{\chi}_K$$

où $\check{\chi}_K$ désigne la transformée de Fourier inverse de l'indicatrice de K, ce qui conduit finalement à

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\det(W)}{\sqrt{2\pi}^n} \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} f(W\mathbf{p})\check{\chi}_K(\mathbf{x} - W\mathbf{p})$$

On obtient ainsi une formule de Shannon généralisée.

Il reste alors à choisir une matrice W satisfaisant la condition de Nyquist généralisée ; on dira ainsi qu'à chaque matrice W on associe un *schéma d'échantillonnage*.

A gauche de la figure (2.11), on a représenté un schéma d'échantillonnage dit *standard* en dimension 2, avec en haut le schéma d'empilement sans recouvrement des translatés du support de $\hat{f}$ dans le domaine de Fourier, et en bas la grille d'échantillonnage correspondante dans le domaine direct. On verra plus loin qu'il est associé à une matrice W diagonale.

Sur la partie droite de la figure (2.11), on a représenté un autre schéma d'empilement sans recouvrement des translatés du support de $\hat{f}$, dont il est clair visuellement qu'il est plus compact. Il vérifie comme le précédent la condition de Nyquist, et, à ce titre, la grille d'échantillonnage associée dans le domaine direct est aussi une grille *admissible*. Cependant, par rapport à la grille construite avec le schéma standard, on voit que la densité de points de mesure sur la grille du domaine direct est moindre par rapport au cas standard : on dit que cette grille d'échantillonnage est plus *efficace*.

Construire une grille d'échantillonnage la plus efficace possible, à quantité d'information sur la fonction f identique (ie pour le même support de la transformée de Fourier K) revient ainsi à choisir une matrice W inversible telle que les translatés $K + 2\pi W^{-T}\mathbf{Z}^n$ soient sans recouvrement, et de telle sorte que le réseau d'échantillonnage du domaine direct soit le moins dense possible. Une mesure de cette densité est fournie par l'aire de la maille élémentaire de ce réseau, qui est égale à $\det W$: pour construire un échantillonnage efficace, on cherchera donc une matrice W dont le déterminant est, en valeur absolue, maximal.

Dans le schéma d'échantillonnage présenté à droite de la figure (2.11), la matrice W_2 vérifie dans le domaine de Fourier

$$2\pi W_2^{-T} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}b & 0 \\ b & 2b \end{pmatrix}$$

(en effet, les centres des deux disques choisis pour définir la maille élémentaire ont respectivement comme coordonnées polaires $\left(\frac{\pi}{6}, 2b\right)$ et $\left(\frac{3\pi}{6}, 2b\right)$, soit, en coordonnées cartésiennes, $\left(\sqrt{3}b, b\right)$ et $(0, 2b)$). Dans le domaine direct, on a ainsi

$$W_2 = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\sqrt{3}b} & 0 \\ -\frac{\pi}{\sqrt{3}b} & \frac{\pi}{b} \end{pmatrix}$$

Le schéma d'échantillonnage associé est appelé *schéma hexagonal*. Comme le suggérait plus haut une simple constatation visuelle, il est plus efficace que le schéma standard, puisque l'on a

$$\det W_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi^2}{b^2} > \det W_1 = \frac{\pi^2}{b^2}$$

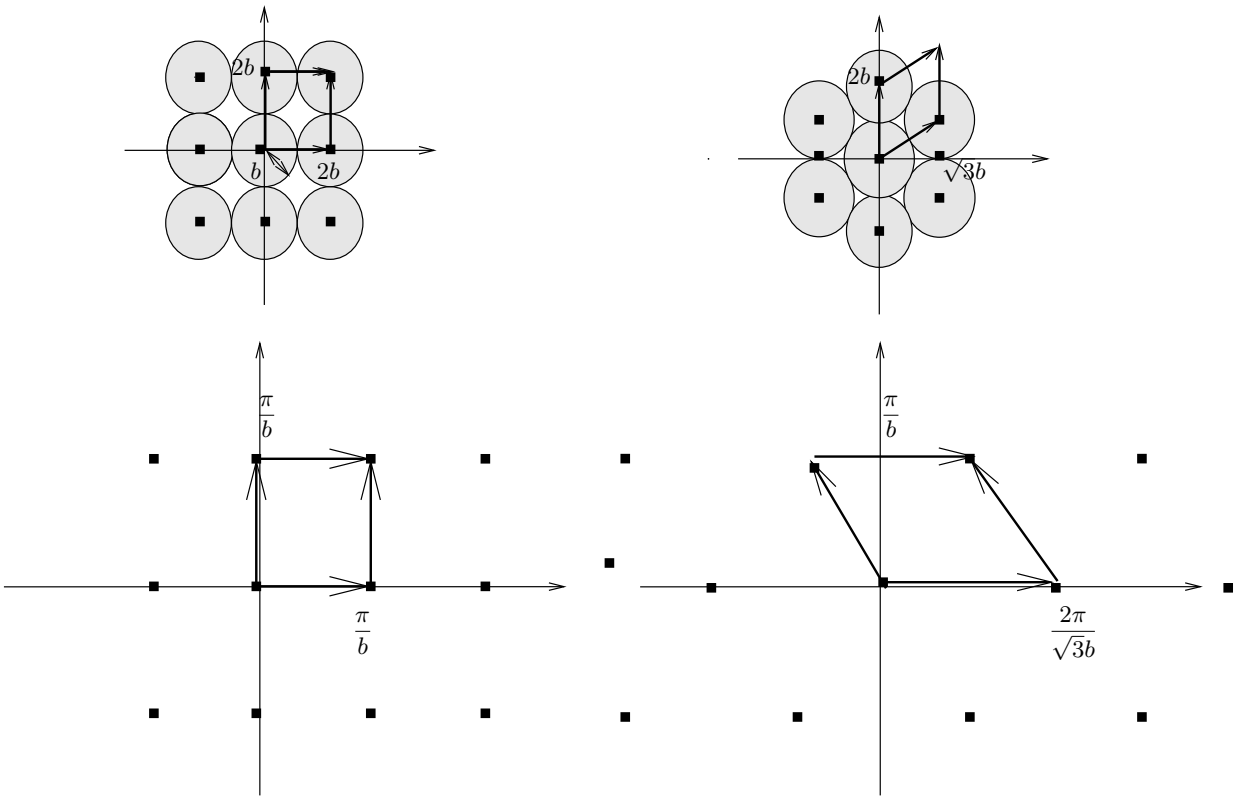


FIG. 2.11 – Deux grilles d'échantillonnage dans $\mathbf{R}^2$, toutes les deux admissibles pour une fonction b-bande limitée : à gauche, la grille dite standard, et à droite, la grille dite hexagonale, avec en haut la grille dans le domaine de Fourier, et en bas la grille dans le domaine direct. Dans le cas du schéma hexagonal, la densité de points de mesure dans le domaine direct est moindre ; on dit que le schéma hexagonal est plus efficace.

Deuxième cas : la transformée de Fourier de f n'est pas à support compact

Si on applique les formules de reconstructions de f à partir de ses échantillons établies dans le cas précédent, les translatés des supports de $\hat{f}$ vont se recouvrir : on ne peut donc pas trouver un pas d'échantillonnage h, ni une matrice W, tels que la condition de Nyquist soit vérifiée.
Pour une grille d'échantillonnage carrée, on peut cependant construire, par interpolation, comme dans le cas précédent, la fonction

$$S_h(f)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} f(h\mathbf{p})\mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi}{h}(\mathbf{x}-h\mathbf{p})\Big)$$

mais cette fois-ci, la fonction $S_h(f)$ ainsi construite n'est plus égale à f (elle a été obtenue par transformée de Fourier inverse d'une fonction qui n'était pas égale à $\hat{f}$, mais à $\hat{f}$ "brouillée" par certaines de ses translatées). On sait cependant contrôler l'erreur d'interpolation, grâce à la majoration suivante, donnée par Natterer dans [78] et que nous admettrons ici :

$$|f(\mathbf{x}) - S_h(f)(\mathbf{x})| \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbf{R}^n\setminus[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n} \Big|\hat{f}(\mathbf{k})\Big|\, d\mathbf{k}$$

On fixe alors un niveau d'erreur tolérable, d'amplitude $\epsilon > 0$; on dit alors , pour une fréquence $b > 0$ qu'une fonction est essentiellement $b-$bande limitée (sous-entendu relativement à ϵ), si

$$\int_{\mathbf{R}^n\setminus[-b,b]^n} \Big|\hat{f}(\mathbf{k})\Big|\, d\mathbf{k} \leq \epsilon$$

Dans ce cas, on considèrera qu'une grille d'échantillonnage construite avec un pas h satisfaisant la condition

$$\frac{\pi}{h} \geq b, \text{ c'est-à-dire } h \leq \frac{\pi}{b}$$

fournit, via la fonction $S_h f$, une approximation satisfaisante de la fonction f, car alors

$$\Big(\mathbf{R}^n\setminus[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n\Big) \subset \mathbf{R}^n\setminus[-b,b]$$

et l'erreur d'interpolation vérifie

$$|f(\mathbf{x}) - S_h(f)(\mathbf{x})| \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}^n}\epsilon$$

Généralisation à une grille d'échantillonnage régulière, engendrée par une matrice W

Comme dans le cas d'une grille carrée, on peut définir la fonction suivante, obtenue par interpolation à partir des échantillons de f :

$$S_W(f)(\mathbf{x}) = \frac{\det(W)}{\sqrt{2\pi}^n} \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^n} f(W\mathbf{p})\check{\chi}_K(\mathbf{x}-W\mathbf{p})$$

où $\check{\chi}_K$ désigne la transformée de Fourier inverse de l'indicatrice de K.
On dispose ici aussi d'une majoration de l'erreur d'interpolation [78] : pour tout ensemble $\mathbf{K}$ de $\mathbf{R}^n$ dont les translatés $\mathbf{K} + 2\pi W^{-T}\mathbf{Z}^n$ sont sans recouvrement, l'erreur d'interpolation vérifie

$$|f(\mathbf{x}) - S_W(f)(\mathbf{x})| \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbf{R}^n\setminus\mathbf{K}} \Big|\hat{f}(\mathbf{k})\Big|\, d\mathbf{k}$$

On fixe alors un niveau d'erreur tolérable, d'amplitude $\epsilon > 0$; on dit alors, généralisant la notion de fonction $b-$ bande limitée, que l'ensemble $\mathbf{K}$ est un *support essentiel* de la transformée de Fourier de f (sous-entendu relativement à ϵ), si

$$\int_{\mathbf{R}^n\setminus\mathbf{K}} \Big|\hat{f}(\mathbf{k})\Big|\, d\mathbf{k} \leq \epsilon$$

Dans ce cas, pour une fonction f dont on a déterminé un support essentiel K, on considèrera qu'une grille d'échantillonnage engendrée par une matrice W satisfaisant la condition de non-recouvrement des translatés $\mathbf{K}+2\pi W^{-T}\mathbf{Z}^n$, fournit, via la fonction $S_W(f)$, une approximation satisfaisante de la fonction f, car alors

$$|f(\mathbf{x}) - S_W(f)(\mathbf{x})| \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}^n}\epsilon$$

2.2.5.2 Echantillonnage de la transformée de Radon, vue comme une fonction appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R})$ [30, 39]

Nous présentons ici l'adaptation des conditions d'échantillonnages qui viennent d'être énoncées pour des fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$, aux fonctions définies sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$. Le but est d'établir les conditions d'échantillonnages à appliquer pour mesurer la transformée de Radon $\mathcal{R}f$ d'une fonction f, de manière à conserver le plus d'information possible sur $\mathcal{R}f$, pour être en mesure d'assurer ensuite une reconstruction convenable de la fonction f. Comme dans le cas précédent, ces conditions découlent de conditions de non-recouvrement dans le domaine de Fourier.

Les grilles que l'on utilise ici sont de la forme $W\mathbf{Z}^2 = (W\mathbf{p})_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^2}$, où W une matrice carrée inversible, compatible avec le fait que les fonctions que l'on cherche à échantillonner sont $2\pi-$périodiques en leur première variable : pour que cette périodicité soit prise en compte, on impose à la matrice W de vérifier la condition suivante : $(2\pi, 0) \in W\mathbf{Z}^2$ (condition d'*admissibilité* de la matrice W).

La transformée de Fourier (à deux variables) d'une fonction g définie sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$, vue comme une fonction 2π-périodique en sa variable angulaire, est définie de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \forall \sigma \in \mathbf{R},\ \hat{g}_n(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{g_\theta}(\sigma)e^{-in\theta}d\theta$$

(on peut la voir comme construite à partir d'une transformée de Fourier en la variable s et d'un coefficient de Fourier en la variable θ).
En particulier, si g est la transformée de Radon de la fonction f, on a, en appliquant le théorème de coupe-projection (2.1.4),

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \forall \sigma \in \mathbf{R}, \hat{g}_n(\sigma) = \widehat{(\mathcal{R}f)}_n(\sigma) = \int_0^{2\pi} \hat{f}(\sigma\Theta)e^{-in\theta}d\theta$$

Le résultat suivant (énoncé par exemple dans [30, 39]), que nous admettrons, précise le rôle joué par la transformée de Fourier de la transformée de Radon dans les conditions d'échantillonnage de la transformée de Radon :

Proposition 2.2.5
Soit $\mathbf{K}$ un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbf{Z} \times \mathbf{R}$, et $W \in Gl_2(\mathbf{R})$ une matrice admissible telle que les translatés $\mathbf{K} + (2\pi W^{-1})^t\mathbf{Z}^2$ sont sans recouvrement. On note $\mathcal{A}_W$ l'ensemble

$$\mathcal{A}_W = \{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^2; W\mathbf{k} \in [0, 2\pi[\times\mathbf{R}\}$$

et on échantillonne la fonction f aux points de la grille $(W\mathcal{A}_W)$.
On note $S_W(\mathcal{R}f)$ définie par

$$S_W(\mathcal{R}f)(\theta, s) = \sum_{\mathbf{k}\in WA_W} \mathcal{R}f(W\mathbf{k})\chi_{\check{K}}(\mathbf{k})$$

Alors l'erreur d'interpolation est majorée par

$$\|\mathcal{R}f - S_W(\mathcal{R}f)\|_\infty \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_{\sigma\in\mathbf{R};(n,\sigma)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{R}\setminus\mathbf{K}} |\widehat{\mathcal{R}f}(n,\sigma)|d\sigma$$

Minimiser l'erreur d'approximation commise sur $\mathcal{R}f$ mise en évidence dans le résultat précédent, revient alors à choisir un ensemble K pour lequel la quantité

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_{\sigma\in\mathbf{R};(n,\sigma)\notin K} \left|\hat{\mathcal{R}f}_n(\sigma)\right| d\sigma \tag{2.26}$$

est *négligeable*, c'est-à-dire à déterminer un support essentiel de la transformée de Fourier de $\mathcal{R}f$.

Un tel support a été proposé par Rattey et Lindgreen, puis Natterer [91, 78]. Pour cela, pour $b > 0$, on note K_b le sous-ensemble de $\mathbf{Z} \times \mathbf{R}$ défini par

$$K_b = \left\{ (n,\sigma) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{R}; |\sigma| < b, |n| < \max\left(\frac{\sigma}{\vartheta}, \left(\frac{1}{\vartheta} - 1\right) b\right)\right\}$$

où ϑ est un paramètre appartenant à l'intervalle $]0,1[$, que l'on pourra moduler en fonction de la valeur prise par b (cf. interprétation de la propriété suivante). Ainsi construit, l'ensemble K_b a une forme de "papillon", comme on peut le voir en figure (2.12).

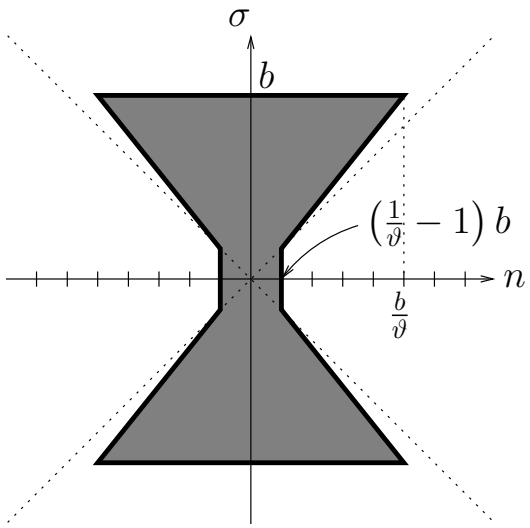


FIG. 2.12 – Une représentation de l'ensemble K_b, qui constitue un support essentiel de la transformée de Radon d'une fonction b-bande limitée.

Natterer montre alors que si une fonction f du domaine direct est essentiellement $b-$bande limitée, alors l'ensemble K_b peut être considéréré comme un support essentiel de la transformée de Fourier de sa transformée de Radon $\mathcal{R}f$. C'est l'objet du résultat suivant, que nous admettrons.

Proposition 2.2.6 (Support essentiel de la Transformée de Fourier de la T. de Radon [78, 30])
Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$, et $b > 0$.
Quelle que soit la valeur du paramètre $\vartheta \in]0,1[$, la transformée de Fourier de la transformée de Radon de f à l'extérieur de l'ensemble K_b vérifie la majoration suivante :

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_{\sigma\in\mathbf{R};(n,\sigma)\notin K_b} \left|\widehat{\mathcal{R}f}_n(\sigma)\right| d\sigma \leq \eta(\vartheta,b)\|f\|_{\mathbf{L}^1} + \frac{8}{\sqrt{2\pi}\vartheta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}^n\setminus[-b,b]} \left|\hat{f}(\mathbf{k})\right| d\mathbf{k}$$

où $\eta(\vartheta,b)$ désigne une quantité qui décroît exponentiellement avec b, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes strictement positives $C(\vartheta)$ et $\lambda(\vartheta)$ telles que

$$0 \leq \eta(\vartheta,b) \leq C(\vartheta)\exp^{-\lambda(\vartheta)b}$$

Interprétation : ϑ joue le rôle d'un paramètre d'ajustement ; voici une explication succincte de son rôle :
- plus ϑ est proche de 1, plus le papillon est étroit dans la direction n, plus l'empilement est compact dans le domaine de Fourier, et moindre est la densité de points d'échantillonnage dans le domaine direct ;
- plus ϑ est proche de 0, plus la décroissance vers zéro de $\eta(\vartheta, b)$, à b fixé, est rapide (cf. [78] pour une formule explicite de la fonction η), et moindre est l'erreur d'interpolation donnée en (2.26).

Par conséquent, si on considère une fonction f essentiellement $b-$bande limitée, où b est connue, et ce relativement à un niveau d'erreur ϵ, on a d'abord

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus [-b,b]} \left| \hat{f}(\mathbf{k}) \right| d\mathbf{k} < \epsilon$$

et on peut ensuite chercher un compromis sur la valeur de ϑ pour que, dans la majoration de la propriété, $\eta(\vartheta, b)\|f\|_{\mathbf{L}^1}$ soit le plus faible possible, tout en faisant en sorte que la densité de points de mesure dans le domaine direct ne soit pas trop élevée.

On peut donc considérer que pour un choix convenable du paramètre ϑ, et pour une fonction f b-bande limitée, l'ensemble K_b constitue un support essentiel de la transformée de Fourier de la transformée de Radon de f. De manière informelle, on peut interpréter sa forme en papillon de la manière suivante : si on calcule la transformée de Fourier de chacune des projections $\mathcal{R}_\theta f$ et si on analyse ensuite les contenus fréquentiels de chacune des projections, on constate que les basses fréquences varient peu entre les projections : seuls les premiers coefficients de Fourier sont donc significatifs, et le papillon est étroit au niveau des basses fréquences σ ; en revanche, les hautes fréquences varient plus d'une projection à l'autre, et le papillon s'élargit au fur et à mesure que l'on va vers les fréquences σ plus élevées.

Soit alors une fonction f à reconstruire à partir de sa transformée de Radon ; on fixe un réel $b > 0$ tel que l'on puisse affirmer, *a priori*, que la transformée de Fourier de f est $b-$bande limitée. Alors on sait que l'ensemble K_b introduit plus haut est un support essentiel de la transformée de Fourier de la transformée de Radon, et on dira que la transformée de Radon est correctement échantillonnée sur une grille engendrée par la matrice W si la matrice W est admissible et vérifie la condition de non-recouvrement des ensembles $\mathbf{K} + 2\pi W^{-T}\mathbf{Z}^2$.

On peut alors préciser ces conditions d'échantillonnage dans le cas de deux schémas classiques.

Le schéma d'échantillonnage le plus classique est le schéma dit *standard*, pour lequel on adopte un pas d'échantillonnage régulier en les deux variables : si on suppose que la fonction à reconstruire a son support inclus dans le disque unité de $\mathbf{R}^2$, on effectue pour chaque projection $2q_S + 1$ mesures sur l'intervalle $[-1, 1]$ (avec $q_S \in \mathbf{N}$), et ceci pour p directions de projection sur $[0, \pi[$; l'ensemble des points de mesure de la transformée de Radon dans le domaine direct s'écrit donc sous la forme $(\theta_i, s_j)_{i=1..p, j=-q..q}$ avec

$$\theta_i = (i-1)\frac{\pi}{p} \text{ et } s_j = \frac{j}{q}, i = 1 \cdots p,\ j = -q \cdots q,$$

ce qui correspond à la matrice d'échantillonnage suivante, admissible :

$$W_S = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} \end{pmatrix}$$

On peut alors chercher les conditions sur les entiers p et q pour que les conditions d'échantillonnage soient satisfaites : en effet, on a alors

$$2\pi(W_S^{-1})^t = \begin{pmatrix} 2p & 0 \\ 0 & 2\pi q \end{pmatrix}$$

et on veut que les matrices $K+2\pi(W_S^{-1})^t\mathbf{Z}^2$ soient sans recouvrement ; l'empilement limite est représenté à gauche en figure (2.13), et correspondrait (sans prendre en compte la condition d'admissibilité) à la matrice W_S suivante :

$$2\pi(W_S^{-1})^t = \begin{pmatrix} \frac{2b}{\vartheta} & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$$

La condition de non-recouvrement s'écrit donc :

$$2p \geq \frac{2b}{\vartheta} \text{ et } 2\pi q \geq 2b$$

soit

$$p \geq \frac{b}{\vartheta} \text{ et } q \geq \frac{b}{\pi}$$

En général ([78]), une fois que q a été fixé, on choisit $p = \lceil \pi q \rceil$.

Comme dans le cas des fonctions définies sur $\mathbf{R}^2$, on peut définir des schémas d'échantillonnage plus efficaces : nous nous contentons de citer comme deuxième exemple de schéma d'échantillonnage le schéma dit *entrelacé*, engendré par la matrice W_E, qui correspond à l'empilement limite dans le domaine de Fourier représenté à droite en figure (2.13), et dont on peut montrer qu'il est presque deux fois plus efficace que le schéma standard [78, 30].

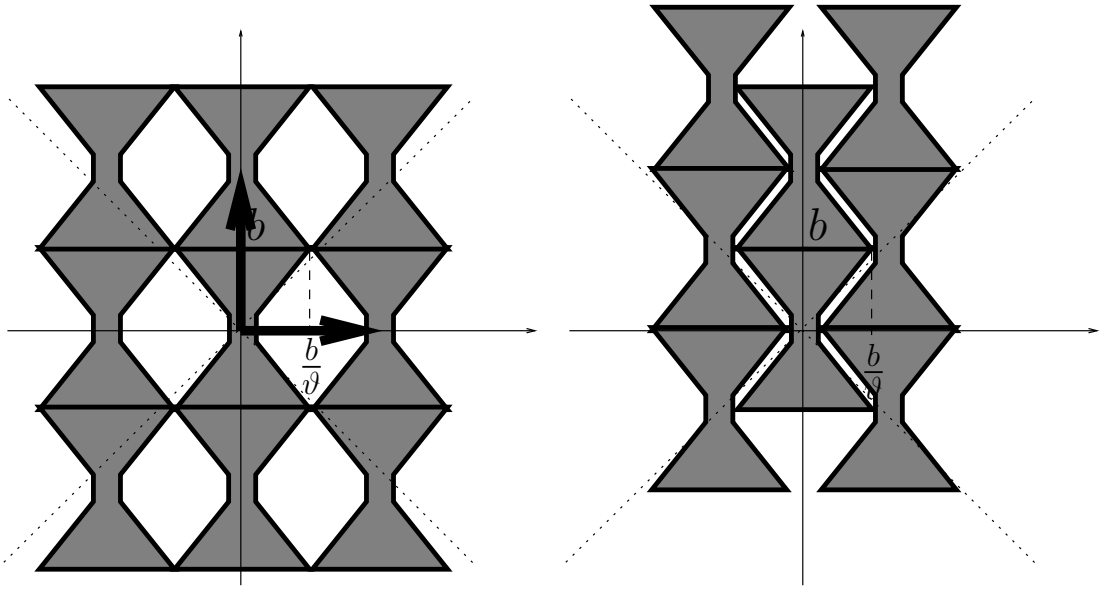


FIG. 2.13 – Deux schémas d'échantillonnage de la transformée de Radon, dans le domaine de Fourier : à gauche le schéma classique, dit standard, et à droite, un schéma plus efficace, dit entrelacé.

Conséquence pratique : conditions d'échantillonnage pour la reconstruction d'une image de taille $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ pour la grille d'échantillonnage standard : on se place dans le cas où l'on veut reconstruire une fonction f à support inclus dans le disque unité, en la représentant par une image de taille $N \times N$; le pas de discrétisation h de l'image est donc égal à $\frac{2}{N}$. Comme on le verra par la suite, lors de la présentation de l'implémentation de l'algorithme de rétroprojection filtrée, on ne reconstruit en fait pas la fonction f elle-même, mais une approximation bande-limitée ; si on note b la fréquence de coupure alors choisie, les conditions d'échantillonnage dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ montrent que b vérifie nécessairement la condition :

$$b \leq \frac{\pi}{h} \text{ soit } b \leq \frac{N\pi}{2}$$

et on considère donc que la fonction que l'on reconstruit en pratique est $b-$bande limitée, avec $b = \frac{N\pi}{2}$. On peut alors énoncer les conditions d'échantillonnage à appliquer sur les mesures : les entiers p et q définis ci-dessus doivent vérifier les relations suivantes :

$$p \geq \frac{N\pi}{2\vartheta} \text{ et } q \geq \frac{N}{2}$$

Pour remplir en pratique ces conditions, on pourra choisir par exemple

$$q = \frac{N}{2} \text{ et } p = \lceil \frac{\pi N}{2} \rceil$$

ce qui, pour quelques tailles courantes d'image, donne les valeurs suivantes :

Taille de l'image (N)	Nb de projections sur $[-1, 1]$ ($2q$+1)	Nb d'angles de projection sur $[0, \pi[$ (p)
128	129	202
256	257	403
512	513	806

2.2.6 Discrétisation de la formule de rétroprojection filtrée

La formule de rétroprojection filtrée après régularisation du filtre rampe a été donnée dans la formule (2.18). C'est elle que nous utiliserons par la suite.
Dans ce paragraphe, nous allons voir comment on peut la discrétiser. Nous suivons ici la technique de discrétisation mise en oeuvre dans le logiciel `Matlab` (fonction `iradon`) (outre le fait que c'est cette implémentation de la rétroprojection filtrée que nous avons utilisée tout au long de ce manuscrit, elle présente entre autres l'avantage d'être facilement adaptable pour la reconstruction des opérateurs $\Lambda^m f$ que l'on manipulera en Λ-tomographie). Une autre technique de discrétisation est proposée par exemple dans [55].

Dans la technique que nous exposons, la discrétisation se fait en deux étapes : la discrétisation de l'étape de rétroprojection, et la discrétisation de l'étape de filtrage, au bout desquelles on aboutit à la formule suivante :

Proposition 2.2.1 (Discrétisation de la formule de rétroprojection filtrée)
Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$, et f_b une approximation de f $b-$ bande limitée. On note

$$\theta_i = (i-1)\frac{\pi}{p} \text{ et } s_j = \frac{j}{q}, i = 1 \cdots p,\ j = -q \cdots q,$$

les points de mesure de la transformée de Radon, et M la plus petite puissance de 2 telle que $M > 2q+1$. On peut discrétiser la formule

$$f_b(\mathbf{x}) = 2\int_0^\pi \left(\mathcal{R}_\theta f * w_b\right)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}) d\theta$$

selon les deux étapes suivantes :

$$f_b(\mathbf{x}) \simeq \frac{2\pi}{p} \sum_{i=1}^{p} \left((j_{i,\mathbf{x}} + 1 - q\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}_i)\ \mathcal{R}_{\theta_i} f * w_b \left(\frac{j_{i,\mathbf{x}}}{q} \right) + (q\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}_i - j_{i,\mathbf{x}})\ \mathcal{R}_{\theta_i} f * w_b \left(\frac{j_{i,\mathbf{x}}+1}{q} \right) \right) \quad (2.27)$$

où

$$\forall i = 1 \cdots p,\ j_{i,\mathbf{x}} = \lfloor q\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}_i \rfloor$$

avec, pour tout $i = 1 \cdots p$, *pour tout* $j = -\frac{M}{2} \cdots \frac{M}{2} - 1$,

$$\mathcal{R}_\theta f * (w_b)_\theta \left(\frac{j}{q}\right) \simeq \frac{q}{2M} \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{ITFD}\left(\mathbf{X}\ \mathrm{TFD}(\mathbf{G}_\theta)\right)[j] & \textit{si } j = 1 \cdots \frac{M}{2} \\ \mathrm{ITFD}\left(\mathbf{X}\ \mathrm{TFD}(\mathbf{G}_\theta)\right)[j+M] & \textit{si } j = -\frac{M}{2} + 1 \cdots 0 \end{array} \right.$$

où

$$\forall j = 0 \cdots M-1,\ \mathbf{G}_\theta[j] = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{R}_\theta f(j) & \textit{si } j = 0 \cdots \frac{M}{2} - 1 \\ \mathcal{R}_\theta f(j-M) & \textit{si } j = \frac{M}{2} \cdots M-1 \end{array} \right.$$

et

$$\forall m = 0 \cdots M-1,\ \mathbf{X}[m] = \left\{ \begin{array}{ll} |m| & \textit{si } m = 0 \cdots \frac{M}{2} - 1 \\ |m-M| & \textit{si } m = \frac{M}{2} \cdots M-1 \end{array} \right.$$

Remarque : Si on utilise le logiciel `Matlab`, le vecteur $\mathbf{G}_\theta$ peut être construit à partir du vecteur des mesures de $\mathcal{R}_\theta f$ à l'aide de la fonction `fftshift`.

Preuve . On fixe un point $\mathbf{x}$ appartenant au disque unité du domaine direct (en pratique, $\mathbf{x}$ est un pixel de l'image que l'on cherche à reconstruire).

Discrétisation de l'étape de rétroprojection :

Cette discrétisation est effectuée par une méthode de quadrature : si l'on note $\left(\theta_i = \frac{(i-1)\pi}{p}\right)_{i=1..p}$ les p angles d'incidence pour lesquels on a mesuré la transformée de Radon, on peut obtenir une valeur approchée de f_b par la méthode des rectangles :

$$f_b(\mathbf{x}) \simeq \frac{2\pi}{p} \sum_{i=1}^{p} \left(\mathcal{R}_{\theta_i} f * w_b\right)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}_i)$$

où ensuite on peut, pour chaque incidence Θ_i, $i = 1 \cdots p$, approcher $\left(\mathcal{R}_{\theta_i} f * w_b\right)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}_i)$ par interpolation linéaire à partir des valeurs de $\mathcal{R}_{\theta_i} f * w_b$ calculées aux points de la grille d'échantillonnage de $\mathcal{R}_{\theta_i} f$: pour chaque incidence $\mathbf{\Theta}_i$ ($i = 1 \cdots p$) il existe un unique indice $j_{i,\mathbf{x}} \in \{-q \cdots q\}$ tel que

$$\frac{j_{i,\mathbf{x}}}{q} \leq \mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}_i < \frac{j_{i,\mathbf{x}} + 1}{q}$$

($j_{i,\mathbf{x}}$ est la partie entière du réel $q\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}_i$). On peut alors écrire :

$$\mathcal{R}_{\theta_i} f * w_b(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}_i) \simeq (j_{i,\mathbf{x}} + 1 - q\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}_i)\ \mathcal{R}_{\theta_i} f * w_b\left(\frac{j_{i,\mathbf{x}}}{q}\right) + (q\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}_i - j_{i,\mathbf{x}})\ \mathcal{R}_{\theta_i} f * w_b\left(\frac{j_{i,\mathbf{x}} + 1}{q}\right)$$

Il reste alors à calculer, pour chaque incidence θ_i les valeurs de la convolution $\mathcal{R}_{\theta_i} f * w_b$ aux points de la grille $\left(\frac{j}{q}, j = -q \cdots q\right)$. C'est l'objet de l'étape suivante.

Discrétisation de l'étape de filtrage :

Ici, l'angle θ est fixé ; il désigne l'un des angles pour lequel on a mesuré la transformée de Radon.

Pour calculer les valeurs cherchées, on utilise l'expression du filtre rampe tronqué dans le domaine de Fourier vue en (2.17), pour écrire

$$\forall s \in [-1,1],\ \mathcal{R}_\theta f * w_b(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \sqrt{2\pi} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) \widehat{w_b}(\omega) e^{i\omega s} ds = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}^3} \int_{-b}^{b} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) |\omega| e^{i\omega s} ds \tag{2.28}$$

Cette dernière intégrale peut alors être évaluée par une méthode de quadrature. Pour cela, on calcule d'abord des valeurs approchées d'échantillons de $\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)$, par transformée de Fourier discrète à partir des mesures $(\mathcal{R}_\theta f(s_j))_{j=-q..q} = \left(\mathcal{R}_\theta f\left(\frac{j}{q}\right)\right)_{j=-q..q}$:

$$\forall \omega,\ \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}_\theta f(s) e^{-i\omega s} ds \simeq \frac{1}{q\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-q}^{q} \mathcal{R}_\theta f\left(\frac{j}{q}\right) e^{-i\frac{\omega j}{q}}$$

Ensuite, on remarque que si on note M la plus petite puissance de 2 telle que $M > 2q+1$, alors, pour tout $m = -\frac{M}{2} \cdots \frac{M}{2} - 1$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{R}_\theta f}\left(\frac{2\pi m q}{M}\right) &\simeq \frac{1}{q\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \mathcal{R}_\theta f\left(\frac{j}{q}\right) e^{-i\frac{2\pi j m}{M}} \\
= \quad & \frac{1}{q\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{\frac{M}{2}-1} \mathcal{R}_\theta f\left(\frac{j}{q}\right) e^{-i\frac{2\pi j m}{M}} + \frac{1}{q\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\frac{M}{2}}^{-1} \mathcal{R}_\theta f\left(\frac{j}{q}\right) e^{-i\frac{2\pi j m}{M}} \\
= \quad & \frac{1}{q\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{\frac{M}{2}-1} \mathbf{G}_\theta\left[j\right] e^{-i\frac{2\pi j m}{M}} + \frac{1}{q\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\frac{M}{2}}^{-1} \mathbf{G}_\theta\left[j+M\right] e^{-i\frac{2\pi j m}{M}} \\
= \quad & \frac{1}{q\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{\frac{M}{2}-1} \mathbf{G}_\theta\left[j\right] e^{-i\frac{2\pi j m}{M}} + \frac{1}{q\sqrt{2\pi}} \sum_{j=\frac{M}{2}}^{M-1} \mathbf{G}_\theta\left[j\right] e^{-i\frac{2\pi (j-M) m}{M}} = \frac{1}{q\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{M-1} \mathbf{G}_\theta\left[j\right] e^{-i\frac{2\pi j m}{M}}
\end{aligned}$$

où on a noté $\mathbf{G}_\theta$ le vecteur des échantillons de $\mathcal{R}_\theta f$ après périodisation :

$$\forall j = 0 \cdots M-1,\ \mathbf{G}_\theta[j] = \begin{cases} \mathcal{R}_\theta f(j) & \text{si } j = 0 \cdots \frac{M}{2} - 1 \\ \mathcal{R}_\theta f(j-M) & \text{si } j = \frac{M}{2} \cdots M-1 \end{cases}$$

On reconnaît alors la transformée de Fourier discrète de $\mathbf{G}_\theta$, définie par

$$\forall l = 0 \cdots M-1,\ \mathrm{TFD}(\mathbf{G}_\theta)[l] = \sum_{k=0}^{M-1} \mathbf{G}_\theta\left[k\right] e^{-i\frac{2\pi k l}{M}}$$

On a ainsi

$$\forall m = -\frac{M}{2} \cdots \frac{M}{2} - 1,\ \widehat{\mathcal{R}_\theta f}\left(\frac{2\pi m q}{M}\right) \simeq \mathrm{Y}[m] \text{ où } \mathbf{Y}[m] = \begin{cases} \frac{1}{q\sqrt{2\pi}} \mathrm{TFD}(\mathbf{G}_\theta)[m] & \text{si } m = 0 \cdots \frac{M}{2} - 1 \\ \frac{1}{q\sqrt{2\pi}} \mathrm{TFD}(\mathbf{G}_\theta)[m+M] & \text{si } m = -\frac{M}{2} \cdots -1 \end{cases}$$

Par suite, reprenant (2.28), on peut écrire, pour tout $j = -\frac{M}{2} \cdots \frac{M}{2} - 1$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\theta f * (w_b)_\theta\left(\frac{j}{q}\right) &\simeq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}^3} \frac{2\pi q}{M} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}\left(\frac{2\pi q m}{M}\right) \left|\frac{2\pi q m}{M}\right| e^{i\frac{2\pi m j}{M}} \\
\simeq \quad & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{q^2}{M^2} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \mathbf{Y}[m]|m| e^{i\frac{2\pi m j}{M}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{q^2}{M^2} \left(\sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} \mathbf{Y}[m]|m| e^{i\frac{2\pi m j}{M}} + \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{-1} \mathbf{Y}[m]|m| e^{i\frac{2\pi m j}{M}} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{q}{2M^2}\left(\sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1}\mathrm{TFD}(\mathbf{G}_\theta)[m]|m|e^{i\frac{2\pi mj}{M}} + \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{-1}\mathrm{TFD}(\mathbf{G}_\theta)[m+M]|m|e^{i\frac{2\pi mj}{M}}\right)$$

$$= \frac{q}{2M^2}\left(\sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1}\mathrm{TFD}(\mathbf{G}_\theta)[m]|m|e^{i\frac{2\pi mj}{M}} + \sum_{m=\frac{M}{2}}^{M-1}\mathrm{TFD}(\mathbf{G}_\theta)[m]|m-M|e^{i\frac{2\pi(m-M)j}{M}}\right)$$

$$= \frac{q}{2M^2}\left(\sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1}\mathrm{TFD}(\mathbf{G}_\theta)[m]|m|e^{i\frac{2\pi mj}{M}} + \sum_{m=\frac{M}{2}}^{M-1}\mathrm{TFD}(\mathbf{G}_\theta)[m]|m-M|e^{i\frac{2\pi mj}{M}}\right)$$

$$= \frac{1}{2M^2}\sum_{m=1}^{M}\mathbf{X}[m]\mathrm{TFD}(\mathbf{G}_\theta)[m]e^{i\frac{2\pi mj}{M}} = \frac{q}{2M}\begin{cases}\mathrm{ITFD}\left(\mathbf{X}\,\mathrm{TFD}(\mathbf{G}_\theta)\right)[j] & \text{si } j = 0\cdots\frac{M}{2}-1\\ \mathrm{ITFD}\left(\mathbf{X}\,\mathrm{TFD}(\mathbf{G}_\theta)\right)[j+M] & \text{si } j = -\frac{M}{2}\cdots -1\end{cases}$$

où on a posé

$$\forall m = 0\cdots M-1,\ \mathbf{X}[m] = \begin{cases}|m| & \text{si } m = 0\cdots\frac{M}{2}-1\\ |m-M| & \text{si } m = \frac{M}{2}\cdots M-1\end{cases}$$

et où, après avoir noté,

$$\forall m = 0\cdots M-1, \left(\mathbf{X}\,\mathrm{TFD}(\mathbf{G}_\theta)\right)[m] = \mathbf{X}[m]\mathrm{TFD}(\mathbf{G}_\theta)[m]$$

on a reconnu une transformée de Fourier discrète inverse, définie pour tout vecteur $\mathbf{Z}$ à M échantillons par

$$\forall l = 0\cdots M-1,\ \mathrm{ITFD}(\mathbf{Z})[l] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\mathbf{Z}\,[k]\,e^{i\frac{2\pi kl}{M}}$$

■

2.3 Dépendance aux données - Problèmes à données tronquées

2.3.1 Description des problèmes

Nous nous plaçons ici en amont de la phase d'échantillonnage des mesures. Nous dirons qu'un problème de tomographie 2D en géométrie parallèle est un problème *à données tronquées*, ou un problème de *tomographie locale*, lorsque les données que l'on peut ou que l'on souhaite mesurer, le sont sur un sous-ensemble de $\mathbf{S}^1 \times [-1,1]$ strictement inclus dans $\mathbf{S}^1 \times [-1,1]$. Parmi ces problèmes, deux présentent un schéma classique de troncature des données : le problème intérieur, qui est le problème qui nous intéresse le plus ici et sur lequel nous allons nous attarder, et le problème à angle limité, que nous présenterons brièvement ensuite.

2.3.1.1 Le problème intérieur

Ce problème correspond par exemple au cas où le détecteur de rayons X dont on dispose est trop étroit pour recueillir tous les rayons X qui émergent du patient, ou bien au cas où la seule reconstruction d'une région bien cernée au coeur de la section du patient est intéressante, et où l'on souhaite donc irradier le moins possible les structures périphériques. Nous l'avons schématisé en figure (2.14).

Sur ce schéma, nous avons encerclé la région à travers laquelle on sait mesurer la transformée de Radon : nous l'appelerons *région d'exposition* aux rayons X. Dans certains algorithmes (par exemple en ondelettes, que nous présenterons au chapitre suivant), les reconstructions ne seront pas valables à la périphérie de la région d'exposition : nous définirons alors des *marges* au bord de la région d'exposition, et la région située à l'intérieur de ces marges sera appelée *région d'intérêt*. Dans ce paragraphe, pour simplifier la présentation, nous ne ferons pas cette distinction et assimilerons la région d'exposition et la région d'intérêt.

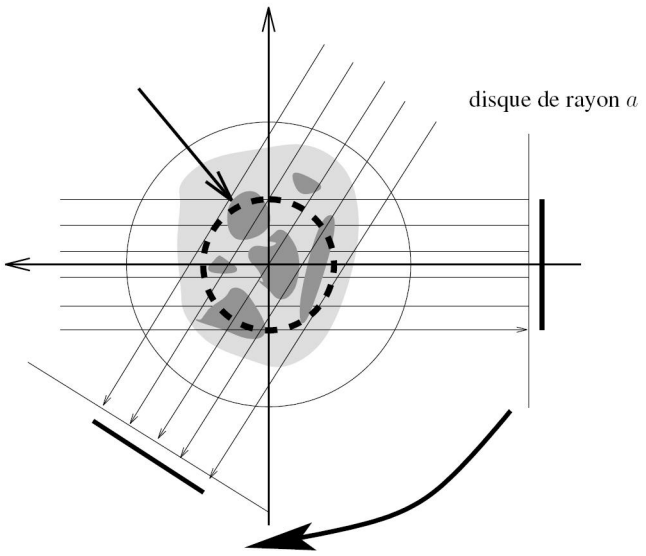


FIG. 2.14 – Le problème intérieur en géométrie parallèle 2D : on ne mesure la transformée de Radon qu'à travers une région centrée au coeur d'une section (entourée en pointillés ici), et on s'intéresse à la reconstruction de cette fonction à l'intérieur de cette région.

Nous allons paramétrer le problème intérieur de la manière suivante : a étant un réel strictement compris entre 0 et 1, nous noterons a le rayon de la région d'intérêt. Pour une fonction f à support inclus dans le disque unité du domaine direct, les données disponibles sont les valeurs de la transformée de Radon le long des droites qui traversent la région d'intérêt, et s'écrivent :

$$\mathcal{D}_a = \left\{ \mathcal{R}f(\boldsymbol{\Theta}, s); \boldsymbol{\Theta} \in \mathbf{S}^1 \times [-a, a] \right\}$$

La question qui se pose est alors suivante : *A partir de la connaissance des valeurs de $\mathcal{R}f$ consignées dans $\mathcal{D}_a$, est-il possible de reconstruire les valeurs de f dans le disque de rayon a ?*

Dans le domaine direct, nous parlerons de *structures intérieures* pour désigner les structures incluses dans la région d'intérêt, et de *structures extérieures* pour désigner les structures n'appartenant pas à la région d'intérêt.
Dans le domaine de Radon, nous séparerons les composantes mesurées à travers la région d'exposition (si celle-ci est de rayon a, elles correspondent à l'ensemble $\{\mathcal{R}f(\boldsymbol{\Theta}, s); (\boldsymbol{\Theta}, s) \in \mathbf{S}^1, |s| \leq a\}$, des composantes mesurées à l'extérieur de la région d'exposition $\{\mathcal{R}f(\boldsymbol{\Theta}, s); \boldsymbol{\Theta} \in \mathbf{S}^1, |s| > a\}$; pour faire référence aux premières, nous parlerons de la *transformée de Radon intérieure*, tandis que pour les deuxièmes, nous parlerons de la *transformée de Radon extérieure*.

Afin de mieux comprendre en quoi le problème intérieur est différent du problème global, nous distinguons deux cas, représentés en figure (2.15) :

– le cas où le support de la fonction f à reconstruire est inclus dans la région d'exposition : dans ce cas sa transformée de Radon est exclusivement intérieure (c'est-à-dire intérieure quelle que soit l'incidence considérée) ;

– le cas où le support de la fonction f à reconstruire n'est pas inclus dans la région d'exposition (avec une intersection avec la région d'exposition vide, ou non vide) : sa transformée de Radon est, selon les incidences, intérieure, extérieure, ou les deux, mais en aucun cas n'est exclusivement extérieure.

Par conséquent, dans la transformée de Radon intérieure, il y a une contribution des structures intérieures *et* une contribution des structures extérieures, et dans la transformée de Radon extérieure, il y a seulement une contribution des structures extérieures : autrement dit, si l'on décompose f entre ses structures intérieures et extérieures

$$f = f_{\text{int_2D}} + f_{\text{ext_2D}}$$

où $f_{\text{int_2D}}$ désigne la densité des structures intérieures à la région d'intérêt, et $f_{\text{ext_2D}}$ la densité des structures extérieures à la région d'intérêt, alors par linéarité de la transformée de Radon, on peut écrire

$$\mathcal{R}f = \mathcal{R}\left(f_{\text{int_2D}}\right) + \mathcal{R}\left(f_{\text{ext_2D}}\right)$$

ou bien encore, en séparant cette fois-ci les données intérieures des données extérieures dans le domaine de Radon

$$\mathcal{R}f = \left(\mathcal{R}f\right)_{\text{int_radon}} + \left(\mathcal{R}f\right)_{\text{ext_radon}}$$

où $\left(\mathcal{R}f\right)_{\text{int_radon}}$ désigne la transformée de Radon intérieure, qui se décompose en

$$\left(\mathcal{R}f\right)_{\text{int_radon}} = \mathcal{R}f_{\text{int_2D}} + \left(\mathcal{R}f_{\text{ext_2D}}\right)_{\text{int_radon}}$$

et où $\left(\mathcal{R}f\right)_{\text{ext_radon}}$ désigne la transformée de Radon extérieure, uniquement issue des structures extérieures dans le domaine direct :

$$\left(\mathcal{R}f\right)_{\text{ext_radon}} = \left(\mathcal{R}f_{\text{ext_2D}}\right)_{\text{ext_radon}}$$

Par conséquent, lors de l'inversion de la fonction f en fonction des seules données locales $\left(\mathcal{R}f\right)_{\text{int_radon}}$, on reconstruit dans la région d'intérêt[7] :

$$f_{\text{loc}} = \mathcal{R}^{-1}\left(\left(\mathcal{R}f\right)_{\text{int_radon}}\right) = \mathcal{R}^{-1}\left(\mathcal{R}f_{\text{int_2D}}\right) + \mathcal{R}^{-1}\left(\left(\mathcal{R}f_{\text{ext_2D}}\right)_{\text{int_radon}}\right)$$

c'est-à-dire qu'on reconstruit

– $f_{\text{int_2D}}$, qui est la restriction de la fonction f à la région d'intérêt ($\mathcal{R}^{-1}\left(\mathcal{R}f_{\text{int_2D}}\right) = f_{\text{int_2D}}$) ;
– le résultat de l'inversion de $\left(\mathcal{R}f_{\text{ext_2D}}\right)_{\text{int_radon}}$.

Lorsque les données sont globales, cette dernière composante $\mathcal{R}^{-1}\left(\left(\mathcal{R}f_{\text{ext_2D}}\right)_{\text{int_radon}}\right)$ est annulée dans la région d'intérêt par la contribution à la région d'intérêt de l'inversion des données extérieures $\mathcal{R}^{-1}\left(\left(\mathcal{R}f_{\text{ext_2D}}\right)_{\text{ext_radon}}\right)$. En revanche, lorsque les données sont locales, cette composante n'est plus annulée : elle vient donc « brouiller » la reconstruction de la région d'intérêt ; en ce sens, on dit que la reconstruction locale d'une région d'intérêt comporte un biais par rapport à la reconstruction globale : il manque $\mathcal{R}^{-1}\left(\left(\mathcal{R}f_{\text{ext_2D}}\right)_{\text{ext_radon}}\right) = \mathcal{R}^{-1}\left(\left(\mathcal{R}f\right)_{\text{ext_radon}}\right)$, ou bien, d'un autre point de vue, $\mathcal{R}^{-1}\left(\left(\mathcal{R}f_{\text{ext_2D}}\right)_{\text{int_radon}}\right)$ est en trop.
On dit que le problème intérieur est *mal posé*, et l'existence de ce biais suffit en général à motiver la recherche des méthodes de reconstruction "locales".

[7] On note $\mathcal{R}^{-1}$ l'opérateur de reconstruction.

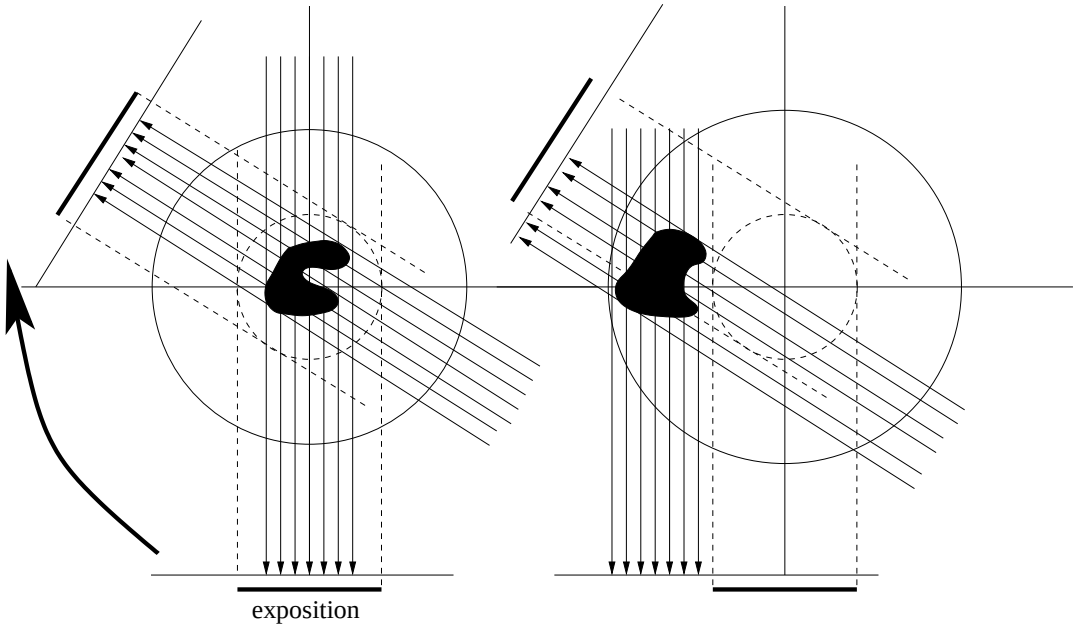


FIG. 2.15 – A gauche, l'objet à reconstruire est complètement inclus dans la région d'intérêt (disque en pointillés) : quelle que soit l'incidence considérée, la transformée de Radon est intérieure. A droite, l'objet à reconstruire est à l'extérieur de la région d'intérêt, et pour autant, la transformée de Radon n'est pas exclusivement extérieure ; en fait, quel que soit l'objet considéré dans le domaine direct, son intersection avec le faisceau de rayons X intérieur (limité par des pointillés) est non vide.

On peut cependant contrôler, dans une certaine mesure, le niveau de ce biais. En effet, la différence dans la région d'intérêt entre la reconstruction en présence de données locales $f_{\rm loc}$ et la reconstruction globale f est égale à

$$f - f_{\rm loc} = \mathcal{R}^{-1}\left(\mathcal{R}f - (\mathcal{R}f)_{\rm int_radon}\right) = \mathcal{R}^{-1}\left((\mathcal{R}f)_{\rm ext_radon}\right)$$

qui est une fonction obtenue en inversant des données de Radon exclusivement extérieures. Nous allons montrer que l'on sait quantifier les variations d'une telle fonction dans la région d'intérêt, mais auparavant, à titre d'exemple, nous présentons une fonction dont la transformée de Radon est nulle à travers la région d'intérêt, et qui pourtant, dans le domaine direct, n'est pas nulle dans la région d'intérêt. Une telle fonction ne peut pas être identifiée à partir des seules données intérieures (dans ce cas, avec les notations ci-dessus, $(\mathcal{R}f)_{\rm int_radon} = 0$ (on est dans un cas où $\mathcal{R}f_{\rm int_2D} = -\left(\mathcal{R}f_{\rm ext_2D}\right)_{\rm int_radon}$), et donc $f_{\rm loc} = \mathcal{R}^{-1}\left((\mathcal{R}f)_{\rm int_radon}\right) = 0$). On dit qu'une telle fonction appartient au *noyau de la transformée de Radon intérieure*.

Exemple 2.3.1 (Construction d'une fonction appartenant au noyau du problème intérieur)
Nous suivons ici la démarche proposée par Natterer dans [78] (paragraphe VI.4) pour construire une fonction à support inclus dans le disque unité, non nulle sur le disque de rayon $a < 1$, et dont la transformée de Radon est nulle pour $|s| < a$.
Natterer propose d'utiliser une fonction h de classe $\mathcal{C}^\infty$, paire, nulle en dehors des intervalles symétriques $[-1, -a]$ et $[a, 1]$ pour chacune des projections. De telles conditions assurent la consistance[8] *des projec-*

[8] Dans ce contexte, on dit qu'une fonction g définie sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ est consistante si elle appartient à l'image de la transformée de Radon. Natterer établit dans [78] les conditions de consistance pour les fonctions appartenant à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(S^1 \times \mathbf{R})$.

tions. Pour construire une telle fonction h, nous utilisons la fonction g définie par

$$g(s) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-s^2}} & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

dont on sait qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ tout en étant paire et à support compact, inclus dans [-1,1]. La fonction h_a, définie pour tout $a \in]0,1[$ par

$$\forall s \in \mathbf{R},\ h_a(s) = g\left(\frac{2}{1-a}\left(s + \frac{a+1}{2}\right)\right) + g\left(\frac{2}{1-a}\left(s - \frac{a+1}{2}\right)\right)$$

vérifie alors les hypothèses requises. La figure (2.16) (à gauche) représente la fonction h_a pour $a = \frac{1}{2}$. On sait alors donner une expression de la fonction f_a dont la transformée de Radon est égale à h_a pour chaque angle θ.
Pour cela, on utilise la formule de reconstruction (2.11) :

$$f_a(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{s\in\mathbf{R};|\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s|>\epsilon}\frac{\partial_s h_a(s)}{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s}ds\right)d\theta$$

qui puisque f_a est radiale, peut s'écrire de la manière suivante [78] : pour $\rho > 0$,

$$f_a(\rho) = -\frac{1}{\pi}\int_\rho^\infty \frac{\partial_s h_a(s)}{\sqrt{s^2-\rho^2}}ds$$

La figure (2.16) (à droite) représente la fonction f_a pour $a = \frac{1}{2}$ (représentation obtenue à l'aide du logiciel `Maple`*).*

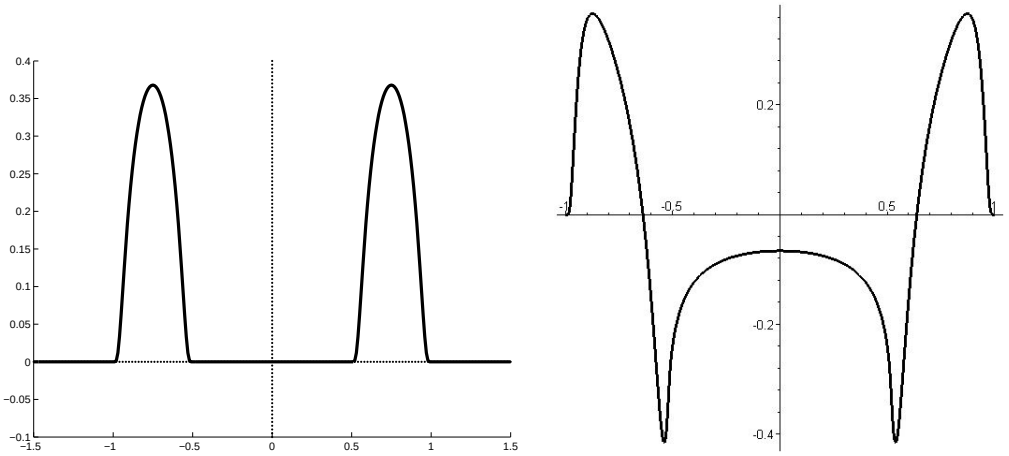


FIG. 2.16 – Une fonction appartenant au noyau de la transformée de Radon intérieure : à gauche, dans le domaine de Radon : toutes les projections, isotropes, sont nulles à travers la région d'intérêt ; à droite, une section centrale dans le domaine direct : la fonction n'est pas nulle dans la région d'intérêt.

Après cet exemple, nous revenons au cas général, et montrons, en nous inspirant de la preuve donnée par Natterer dans [78], que les fonctions obtenues par inversion de projections nulles dans la région d'intérêt ne varient pas "beaucoup" dans la région d'intérêt (dans [78], Natterer se limite au cas des fonctions g appartenant effectivement à l'image de la transformée de Radon, mais en fait, comme on va le voir, la consistance n'intervient pas : nous considèrons ici une fonction g définie sur le cylindre, "quelconque").

On utilise la formule d'inversion de la transformée de Radon (donnée dans la formule 2.11), que l'on applique à des projections g dont le support est inclus dans $\mathbf{S}^1 \times ([-1,-a] \cup [a,1])$. On se place en un point $\mathbf{x}$ appartenant à l'intérieur de la région d'intérêt, c'est-à-dire tel que $|\mathbf{x}| < a$; $\mathbf{x}$ étant ainsi choisi, il n'y a plus de singularité dans la formule de reconstruction, puisque pour tout θ, et pour tout s tel que $|s| > a$, $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}| < s$. La formule de reconstruction dans la région d'intérêt s'écrit donc :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{|s|\in[a,1]} \frac{\partial_s g_\theta(s)}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s} ds d\theta = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{|s|\in[a,1]} \frac{g_\theta(s)}{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s)^2} ds d\theta$$

la dernière égalité étant obtenue par intégration par parties, les projections étant nulles aux bords du domaine d'intégration.
Natterer explique alors que si l'on se place à l'intérieur de la région d'intérêt, plus précisément en un point $\mathbf{x}$ tel qu'il existe $b < a$ tel que $|\mathbf{x}| \leq b$, alors on peut contrôler la variation maximale de f sur le disque $\mathbf{\Omega_b}$ de rayon b : pour cela, on se place en un point $\mathbf{x}$ quelconque dans $\mathbf{\Omega_b}$, et on borne la différence entre la valeur prise par f en ce point et en un point fixé dans $\mathbf{\Omega_b}$, par exemple en son centre :

$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{\Omega_b}$,

$$\begin{aligned}
|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})| &= \left| \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{|s|\in[a,1]} g_\theta(s) \left(\frac{1}{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s)^2} - \frac{1}{s^2} \right) ds d\theta \right| \\
&\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{|s|\in[a,1]} |g_\theta(s)| \left| \frac{1}{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s)^2} - \frac{1}{s^2} \right| ds d\theta \\
&\leq \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{2\pi} \int_{|s|\in[a,1]} |g_\theta(s)|^2 ds d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \int_{|s|\in[a,1]} \left| \frac{1}{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s)^2} - \frac{1}{s^2} \right|^2 ds d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \|g\| \left(\int_0^{2\pi} \int_{|s|\in[a,1]} \left(\frac{1}{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s)^2} - \frac{1}{s^2} \right)^2 ds d\theta \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

avec, pour tout $\mathbf{x}$ tel que $|\mathbf{x}| \leq b$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_{|s|\in[a,1]} \left(\frac{1}{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s)^2} - \frac{1}{s^2} \right)^2 ds d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_{|s|\in[a,1]} \left(\frac{1}{(|\mathbf{x}|\cos\varphi - s)^2} - \frac{1}{s^2} \right)^2 ds d\theta \\
&\leq \int_0^{2\pi} \int_{|s|\in[a,1]} \left(\frac{1}{(b\cos\varphi - s)^2} - \frac{1}{s^2} \right)^2 ds d\theta,
\end{aligned}$$

la dernière inégalité se justifiant par le fait que, pour $s \in [0,a]$ la fonction $\rho \mapsto \left(\frac{1}{(\rho\cos\varphi - s)^2} - \frac{1}{s^2} \right)^2$ est croissante sur $[0,a]$, donc sur $[0,b]$, (on peut prouver ceci en étudiant le signe de sa dérivée seconde, puis les variations et le signe de sa dérivée).
Par conséquent,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{\Omega_b},\ |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{0})| \leq \mathbf{C}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \|\mathbf{g}\|$$

avec

$$C(a,b) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{2\pi} \int_{|s|\in[a,1]} \left(\frac{1}{(b\cos\varphi - s)^2} - \frac{1}{s^2} \right)^2 ds d\theta \right)^{\frac{1}{2}}$$

et donc

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega_b}} (|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})|) \leq C(a,b)\|g\| \tag{2.29}$$

On peut alors évaluer numériquement les valeurs prises par $C(a,b)$ en fonction de a et de b (valeurs obtenues à l'aide du logiciel `Maple`, et la méthode de Monte-Carlo comme méthode d'approximation). Quelques-unes des valeurs obtenues sont consignées dans le tableau suivant, et le graphique (2.17) représente à a fixé l'évolution de $C(a,b)$ en fonction de b, et ceci pour cinq valeurs successives de a (de gauche à droite : $a = 0.2$, $a = 0.4$, $a = 0.6$, $a = 0.8$, $a = 0.99$). Ceci permet d'estimer les conditions sur le rayon b du disque intérieur, sous lesquelles on sait garantir que la constante $C(a,b)$ est faible, ce qui assure en retour que la fonction f varie peu sur le disque de rayon b. On constate ainsi que quand on reste "suffisamment au coeur" de la région d'intérêt, on peut assurer que f varie peu (sur un disque de rayon 0.2 pour une région d'intérêt de rayon 0.4, sur un disque de rayon 0.4 pour une région d'intérêt de rayon 0.6, etc...) alors que quand on approche de la frontière, on ne sait plus garantir que f varie peu.

b \ a	0,2	0,4	0,6	0,8	0,99
0,19	12.664	0,158	0,044	0,017	0,003
0,39		10,657	0,176	0,051	0,007
0,59			9,623	0,168	0,018
0,79				8,949	0,068
0,98					7,699

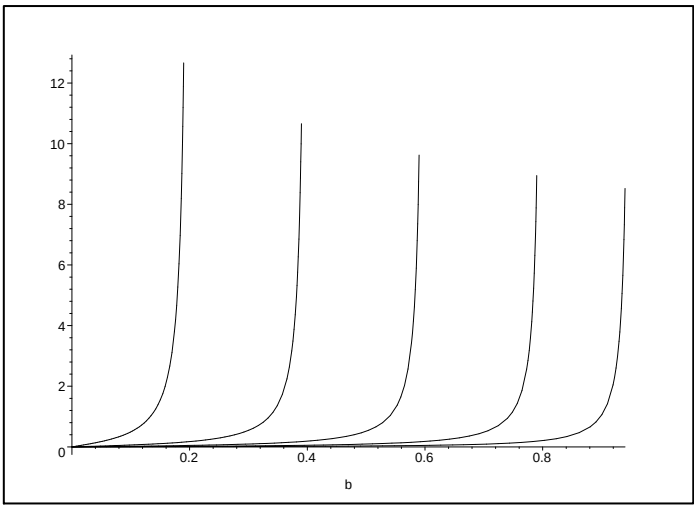


FIG. 2.17 – Evolution de $C(a,b)$ en fonction de b, pour cinq valeurs successives de a (de gauche à droite : $a = 0.2$, $a = 0.4$, $a = 0.6$, $a = 0.8$, $a = 0.95$)

De ces observations, on peut déduire que lorsque l'on reconstruit une fonction à partir de données locales, certes il existe éventuellement un biais dans la région d'intérêt que l'on ne peut pas identifier, mais cependant, au moins dans une région strictement incluse dans la région d'intérêt, on sait garantir que le biais introduit dans la reconstruction est une fonction qui varie peu. Par conséquent, ceci laisse présager que, même si la fonction elle-même ne peut pas être reconstruite dans la région d'intérêt, ses "grandes" variations d'amplitudes pourront être identifiées. Nous confirmerons ceci, de manière plus précise, à l'aide d'éléments issus de l'analyse micro-locale, grâce auxquels on sait établir un lien précis entre les singularités de la fonction à reconstruire et les singularités de sa transformée de Radon. Nous présentons juste avant brièvement un autre problème à données tronquées, le problème à angle limité.

2.3.1.2 Le problème à angle limité

Ce problème correspond par exemple au cas où des obstacles radio-opaques empêchent d'irradier le patient selon toutes les incidences utilisées dans les données globales : par rapport au problème intérieur,

les données ne sont plus tronquées en la variable s, mais le sont en la variable θ ; par exemple, on s'appuiera sur l'ensemble de mesures

$$\{\mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}, s); \mathbf{\Theta} \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}] \times [-1, 1]\}$$

ou

$$\{\mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}, s); \mathbf{\Theta} \in [0, \theta_{\min}] \times [-1, 1]\} \cup \{\mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}, s); \mathbf{\Theta} \in [\theta_{\max}, \pi] \times [-1, 1]\}$$

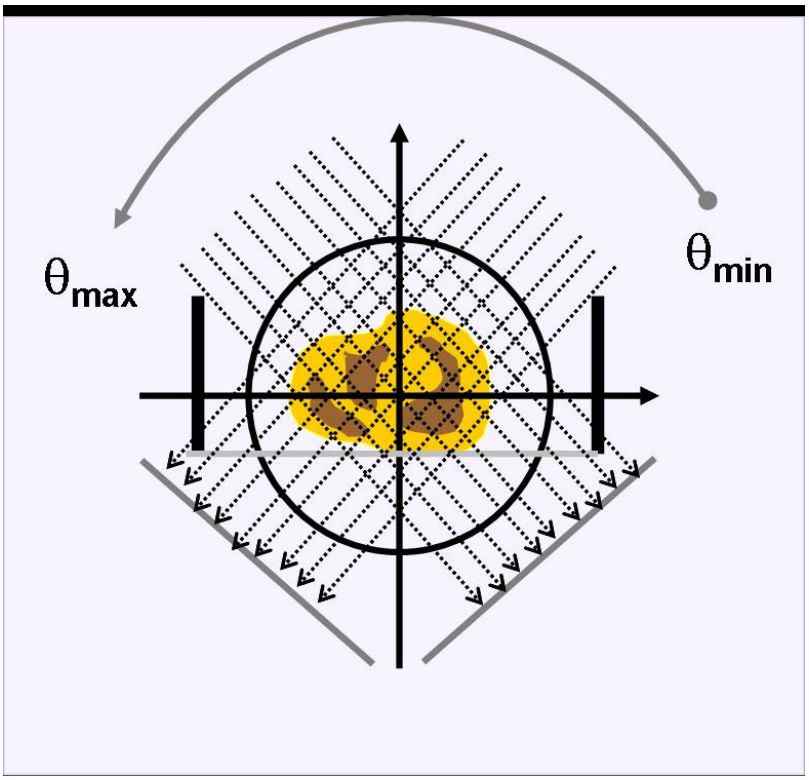


FIG. 2.18 – Le problème à angle limité en géométrie parallèle 2D : on ne mesure la transformée de Radon que pour certaines incidences, comme ici pour les incidences $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$.

2.3.2 Analyse micro-locale et singularités

Nous allons dans cette partie donner quelques résultats issus de l'*analyse micro-locale*, dans le simple but de montrer que, dans le cas des problèmes tronqués qui nous intéressent, il est légitime de chercher à reconstruire des discontinuités.

2.3.2.1 Définitions - Formalisation des singularités

Nous allons d'abord définir deux notions fondamentales en analyse micro-locale (indépendantes du contexte tomographique) : la notion de *support singulier*, et celle de *front d'onde*.

Nous rappelons d'abord la notion de *support* d'une distribution.

Définition 2.3.1 (Support d'une distribution [45])
Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$.

- *On dit que T est* nulle *sur l'ouvert U si pour toute fonction test φ à support inclus dans U on a $T(\varphi) = 0$. On appelle alors* support *de T le complémentaire du plus grand ouvert U sur lequel T est nulle.*
- *On dit que deux distributions* coïncident sur U *si leur différence est nulle sur U.*

La définition suivante peut alors être posée :

Définition 2.3.2 (Support singulier d'une distribution [88, 89])
Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$. On appelle support singulier *de la distribution T le complémentaire du plus grand ouvert U tel que T coïncide sur U avec une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Le support singulier permet de localiser une singularité. On peut ensuite donner une description plus précise de la singularité considérée en précisant dans quelle direction elle est singulière. La direction de singularité est révélée par le comportement de la transformée de Fourier, et l'ensemble des couples *(point de singularité, direction de singularité)* constitue le *front d'onde* (Wavefront set). Plus précisément, on a la définition suivante :

Définition 2.3.3 (Front d'onde d'une distribution [88, 89])
Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$, $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}^2$, $\mathbf{k_0} \in \mathbf{R}^2 - \{0\}$. On dit que $(\mathbf{x_0}, \mathbf{k_0})$ appartient au front d'onde $\mathrm{WF}(f)$ de f si et seulement si pour toute fenêtre $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$, centrée en $\mathbf{x_0}$ et vérifiant $\Phi(\mathbf{x_0}) \neq 0$, la transformée de Fourier de la fonction ΦT n'est à décroissance rapide dans aucun voisinage conique de la forme $\{t\mathbf{k_0}; t > 0\}$.

Remarque : Par exemple, pour une indicatrice de domaine $\mathbf{\Omega}$, où $\mathbf{\Omega}$ a sa frontière $\partial\mathbf{\Omega}$ de classe $\mathcal{C}^1$, le front d'onde de f est exactement l'ensemble des couples $\{(\mathbf{x}, \mathbf{n_x}), \mathbf{x} \in \partial\mathbf{\Omega}\}$, où, pour tout $\mathbf{x} \in \partial\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{n_x}$ désigne la normale à la courbe $\partial\mathbf{\Omega}$ au point $\mathbf{x}$.

A titre d'illustration, nous avons considéré en figure (2.19) un disque du domaine direct (à gauche sur la première ligne) ; le module de sa transformée de Fourier est représenté à sa droite. Nous avons ensuite appliqué une fenêtre lisse à la fonction du domaine direct autour de trois positions distinctes, et pour chaque position, nous avons considéré deux tailles de fenêtre : une première, et une plus resserrée que la première autour de la position étudiée. Dans les deux premières positions, les fenêtres sont centrées en un point du support singulier, et pour la troisième position, les fenêtres sont centrées autour d'un point situé à l'intérieur du disque, et n'appartenant donc pas au support singulier. Les fenêtres successives sont représentées sur la deuxième ligne de la figure (2.19). Les modules des transformées de Fourier des fonctions obtenues après application des différentes fenêtres sont représentés sur la troisième ligne de la figure (2.19). Dans les deux premiers cas, on observe, quand on resserre la fenêtre, une concentration de la transformée de Fourier autour d'une droite, dont la direction est donc la direction selon laquelle la transformée de Fourier n'est pas à décroissance rapide. C'est cette direction qui est consignée dans le front d'onde, où elle est associée au point autour duquel les fenêtres sont centrées. En revanche, dans le troisième cas, autour d'un point où il n'y a pas de singularité, la transformée de Fourier est à décroissance rapide dans toutes les directions.

2.3.2.2 Résultats fondamentaux sur les singularités de la transformée de Radon

L'analyse micro-locale trouve une application en tomographie, où elle permet de relier les éléments singuliers de la fonction du domaine direct (support singulier, front d'onde), à ceux de ses projections.

Théorème 2.3.1 (Conservation des supports singuliers [89])
Soit $\mathbf{\Omega}$ un domaine de $\mathbf{R}^2$ et f telle que $f = \chi_{\mathbf{\Omega}}\Phi$ où $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^2)$, et ne s'annule pas sur $\mathbf{\Omega}$ (soit, sans restriction de généralité, strictement positive sur $\mathbf{\Omega}$). Alors le support singulier de $\mathcal{R}f$ est exactement l'ensemble des couples $(\mathbf{\Theta}, s)$ tels qu'il existe un point $\mathbf{x}$ de la frontière de $\mathbf{\Omega}$ tel $D_{\theta,s}$ est tangent à $\partial\mathbf{\Omega}$ en $\mathbf{x}$.

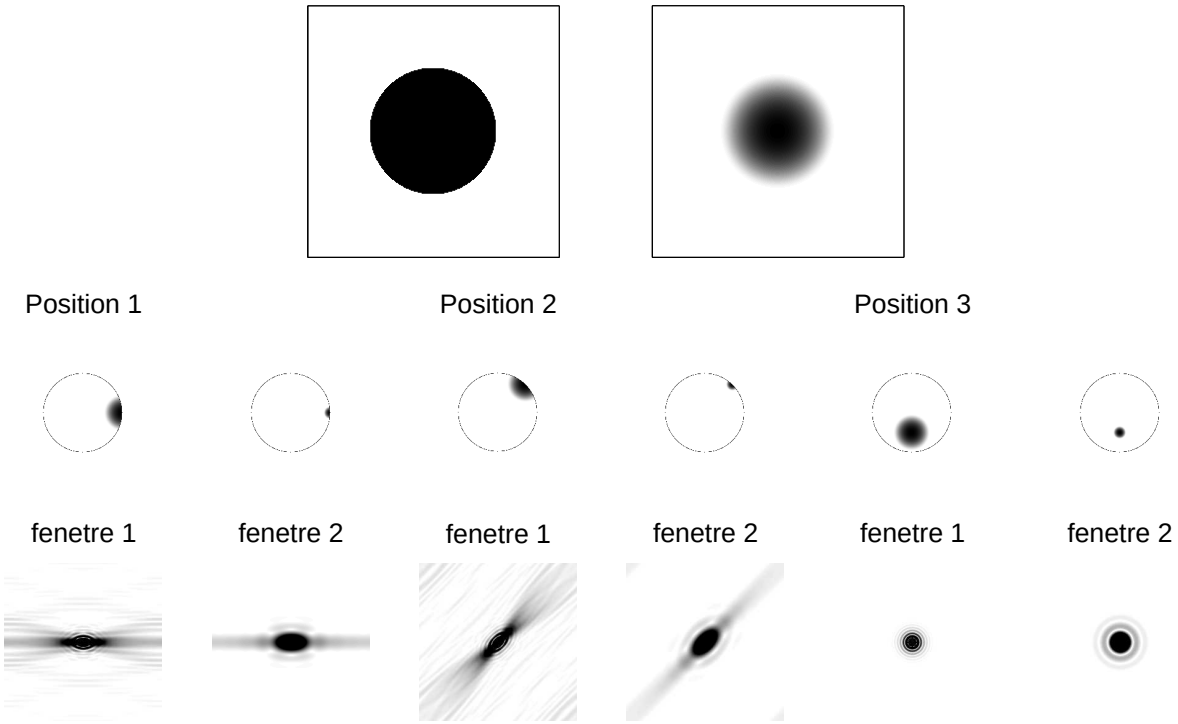


FIG. 2.19 – Illustration de la notion de front d'onde : on considère un disque dans le domaine direct, dont on représente le module de sa transformée de Fourier (1ère ligne) ; on étudie le comportement de sa transformée de Fourier après avoir appliqué une fenêtre dans le domaine direct ; les fenêtres successives, représentées en deuxième ligne, sont centrées au voisinage de trois positions différentes, avec deux tailles de voisinage. Les modules des transformées de Fourier sont représentés en troisième ligne. Dans les deux premiers cas, où l'on s'est placé au voisinage d'un point appartenant au support singulier, on voit apparaître dans le domaine de Fourier la direction de la singularité dans le domaine direct, alors que dans le troisième, pour lequel il n'y a aucune singularité dans le domaine direct, il n'apparaît pas de direction selon laquelle la transformée de Fourier ne décroît pas rapidement.

Le théorème suivant provient de [88, 89], et fait appel entre autres à la transformée de Legendre. Nous l'énonçons sous une forme simplifiée.

Théorème 2.3.2 (Conservation des fronts d'onde)
- *Si* $(\mathbf{x_0}, \mathbf{\Theta_0})$ *appartient à* $\mathrm{WF}f$*, alors* $(\mathbf{\Theta_0}, \mathbf{\Theta_0} \cdot \mathbf{x_0})$ *appartient au support singulier de* $\mathcal{R}f$*, et* $\big((\mathbf{\Theta_0}, \mathbf{\Theta_0} \cdot \mathbf{x_0}), (-\mathbf{x_0} \cdot \mathbf{\Theta_0}^{\perp}, 1)\big)$ *appartient au front d'onde de* $\mathcal{R}f$*.*
- *Réciproquement, si* $(\mathbf{\Theta_0}, s_0)$ *est un point du support singulier de* $\mathcal{R}f$ *en lequel le support singulier de* $\mathcal{R}f$ *admet une tangente dirigée par le vecteur de coordonnées* $(1, p)$ *(où* $p \in \mathbf{R}$*), alors, dans le domaine direct,* $s_0\mathbf{\Theta_0} + p\mathbf{\Theta_0}^{\perp}$ *appartient au support singulier de* f *et* $(s_0\mathbf{\Theta_0} + p\mathbf{\Theta_0}^{\perp}, \mathbf{\Theta_0})$ *appartient au front d'onde de* f*.*

2.3.2.3 Une analyse micro-locale simplifiée

Dans un souci de compréhension des résultats précédents, nous proposons ici une illustration de la théorie de l'analyse micro-locale dans des cas simples. Nous nous intéressons à des indicatrices de domaine dans le domaine direct, pour lesquelles la frontière est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ (de telle sorte qu'en tout point de la frontière, il y ait une tangente à la frontière).
La frontière d'un tel domaine constitue son support singulier. Nous avons choisi de la décrire par une représentation paramétrique, de laquelle nous déduisons une représentation paramétrique du support singulier associé dans le domaine de Radon.

Nous considèrons donc ici des indicatrices de domaine, dont la frontière est connue, sous forme paramétrée :

$$\mathbf{F(t)} = \left| \begin{array}{l} x_1(t), t \in I, I \text{ étant un intervalle réel.} \\ x_2(t) \end{array} \right.$$

On se place au point de la frontière de paramètre t. Il a pour coordonnées $\mathbf{F}(t) = (x_1(t), x_2(t))$.
En ce point, la tangente à la frontière est dirigée par le vecteur

$$\mathbf{F'(t)} = \left| \begin{array}{l} {x'}_1(t) \\ {x'}_2(t) \end{array} \right.$$

La normale unitaire à la frontière est donc le vecteur

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2}} \left| \begin{array}{r} -x_2'(t) \\ x_1'(t) \end{array} \right.$$

La première partie du théorème (2.3.2) permet alors d'écrire que l'image dans le domaine de Radon de la tangente à la frontière au point de paramètre t (dans le domaine direct) est le point du domaine de Radon de coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{\Theta}(t) = \mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2}} \left| \begin{array}{r} -x_2'(t) \\ x_1'(t) \end{array} \right. \\ s(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{n}(t) \end{array} \right. & \text{si } x_1'(t) \geq 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{\Theta}(t) = -\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2}} \left| \begin{array}{r} x_2'(t) \\ -x_1'(t) \end{array} \right. \\ s(t) = -\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{n}(t) \end{array} \right. & \text{si } x_1'(t) < 0 \end{array} \right.$$

(On fait cette discussion sur le signe de $x_1'(t)$ pour pouvoir ensuite écrire $\mathbf{\Theta}(t)$ sous la forme $\mathbf{\Theta}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$, avec pour tout $t \in I$, $\theta(t) \in [0, \pi[$ - c'est-à-dire avec la deuxième coordonnée du vecteur $\mathbf{\Theta}(t)$ positive.)

On cherche alors à donner les coordonnées de ce point dans le plan (θ, s) ; pour cela, on remarque que puisque l'on a assuré que pour tout t, $\theta(t)$ appartient à $[0, \pi[$, alors on est sûr que, pour tout t, $\theta(t) - \dfrac{\pi}{2}$ appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, et donc, si $\theta(t)$ est différent de 0 (c'est-à-dire si $x_1'(t) \neq 0$), on peut écrire que

$$\theta(t) - \frac{\pi}{2} = \arctan\left(\tan\left(\theta(t) - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \arctan\left(-\frac{\cos\theta(t)}{\sin\theta(t)}\right) = \arctan\left(\frac{x_2'(t)}{x_1'(t)}\right)$$

Finalement, on peut donc conclure que, dans le plan (θ, s), l'image de la tangente au point de paramètre t est le point de coordonnées $(\theta(t), s(t))$ avec

$$\boxed{\begin{array}{l} \theta(t) = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x_1'(t) = 0 \\ \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{x_2'(t)}{x_1'(t)}\right) & \text{sinon} \end{array} \right. \\ \\ s(t) = \left| \begin{array}{ll} x_1(t) & \text{si } x_1'(t) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2}}(-x_1(t)\, x_2'(t) + x_2(t)\, x_1'(t)) & \text{si } x_1'(t) > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2}}(x_1(t)\, x_2'(t) - x_2(t)\, x_1'(t)) & \text{si } x_1'(t) < 0 \end{array} \right. \end{array}} \tag{2.30}$$

Au passage, on peut vérifier que si l'on se place au point de paramètre t sur le support singulier dans le domaine de Radon, alors le vecteur tangent au support en ce point a pour coordonnées,

$$\left| \begin{array}{l} \theta'(t) \\ s'(t) = \mathbf{F}'(t) \cdot \mathbf{\Theta}(t) + \mathbf{F}(t) \cdot \left(\theta'(t)\mathbf{\Theta}^{\perp}(t)\right) \end{array} \right. = \theta'(t) \left| \begin{array}{l} 1 \\ \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{\Theta}^{\perp}(t) \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} 0 \\ \mathbf{F}'(t) \cdot \mathbf{\Theta}(t) \end{array} \right.$$

(en effet, $\mathbf{\Theta}(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))$, on a $\mathbf{\Theta}'(t) = (-\theta'(t)\sin(\theta(t)), \theta'(t)\cos(\theta(t)) = \theta'(t)\mathbf{\Theta}^{\perp}(t)$: ceci justifie la première égalité).

Or on sait que $\mathbf{\Theta}(t)$ est orthogonal à $\mathbf{F}'(t)$ dans le domaine direct : le deuxième terme est donc nul, et le vecteur tangent dans le domaine de Radon a donc pour coordonnées

$$\theta'(t) \left| \begin{array}{l} 1 \\ \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{\Theta}^{\perp}(t) \end{array} \right.$$

ou, autrement dit, la tangente au support singulier de la transformée de Radon au point de paramètre t a donc pour pente $\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{\Theta}^{\perp}$; ceci permet de comprendre la relation entre fronts d'onde donnée dans le théorème (2.3.2).

Les exemples qui suivent ont pour but d'illustrer ce qui précède dans le cas d'indicatrices de domaines dont on sait facilement définir la frontière sous forme paramétrée. Ainsi, pour chacun des fantômes proposés ci-dessous, on présente

- d'une part l'image de son sinogramme, calculé avec la fonction `radon` du logiciel `Matlab` ;
- d'autre part les équations paramétrées du support singulier dans le domaine direct ;
- enfin, le tracé de la courbe paramétrée du support singulier dans le domaine de Radon, dont les équations ont été calculées grâce aux formules données plus haut (2.30), en utilisant le logiciel `Maple`.

La correspondance entre les supports singuliers dans les deux domaines est matérialisée par la couleur du tracé.

Exemple 2.3.2 (Ellipse)
La frontière d'une ellipse de centre (x_0, y_0), de demi-axes de longueur a et b alignés selon les axes principaux, a une équation paramétrée de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = a\cos t + x_0 \\ x_2(t) = b\sin t + y_0 \end{array} \right. , t \in [0, 2\pi[$$

En appliquant les formules obtenues en (2.30), on obtient les équations paramétrées du support singulier dans le domaine de Radon :

$$\theta(t) = \left| \begin{array}{ll} 0 & \textit{si } t = 0 \textit{ ou } t = \pi \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{b}{a\tan t}\right) & \textit{sinon} \end{array} \right.$$

$$s(t) = \left| \begin{array}{ll} x_0 + a & \textit{si } t = 0 \\ x_0 - a & \textit{si } t = \pi \\ -\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}(ab + bx_0\cos t + ay_0\sin t) & \textit{si } t \in]\pi, 2\pi[\\ \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}(ab + bx_0\cos t + ay_0\sin t) & \textit{si } t \in]0, \pi[< 0 \end{array} \right.$$

Les représentations graphiques sont présentées en figure (2.20), d'une part pour une ellipse centrée (par rapport au centre de l'image), et d'autre part, pour une ellipse décentrée.

Exemple 2.3.3 (Un carré arrondi)
L'indicatrice de domaine choisie ici - un carré "arrondi"- a une frontière de classe $\mathcal{C}^\infty$, comme dans l'exemple précédent, mais présente en plus des bords rectilignes : par chacun des points appartenant à un même bord passe une seule et même tangente ; par conséquent, l'image d'un tel bord est un point du support singulier du domaine de Radon (points matérialisés ici par des cercles).
On donne les équations paramétriques choisies pour tracer le carré arrondi : de manière à assurer des raccords de classe $\mathcal{C}^1$, le cadran en haut à droite est paramétré par

$$x_1(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} \textit{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ \cos(\frac{\pi}{2}(t-1)) + \frac{1}{2} \textit{ si } 1 \leq t \leq 2 \\ \frac{-t}{2} + \frac{3}{2} \textit{ si } 2 \leq t \leq 3 \end{array} \right.$$

et

$$x_2(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{t}{2} \textit{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ \sin(\frac{\pi}{2}(t-1)) + \frac{1}{2} \textit{ si } 1 \leq t \leq 2 \\ \frac{3}{2} \textit{ si } 2 \leq t \leq 3 \end{array} \right.$$

Le carré complet est ensuite obtenu par symétrie. Les représentations graphiques sont présentées en figure (2.21).

Exemple 2.3.4 (Ovales de Cassini)
Dans cet exemple, une même droite peut être tangente à la frontière du domaine singulier en deux points distincts du domaine direct. Cela crée un point "à deux branches" dans le domaine de Radon, les deux branches pouvant être distinguées par leurs pentes respectives, qui, conformément à ce qui a été dit plus haut, traduisent la position du point de tangence, sur la tangente, dans le domaine direct. C'est le cas ici pour la direction paramétrée par $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Les équations paramétriques des ovales de Cassini sont connues :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = (2 + \cos 2t)\cos t \\ x_2(t) = (2 + \cos 2t)\sin t \end{array} \right. , t \in [0, 2\pi[$$

Les représentations graphiques sont présentées en figure (2.22). Dans le domaine de Radon, on peut visualiser les points d'intersection entre les branches « rouge-noir » d'une part, et les branches « bleu-vert » d'autre part.

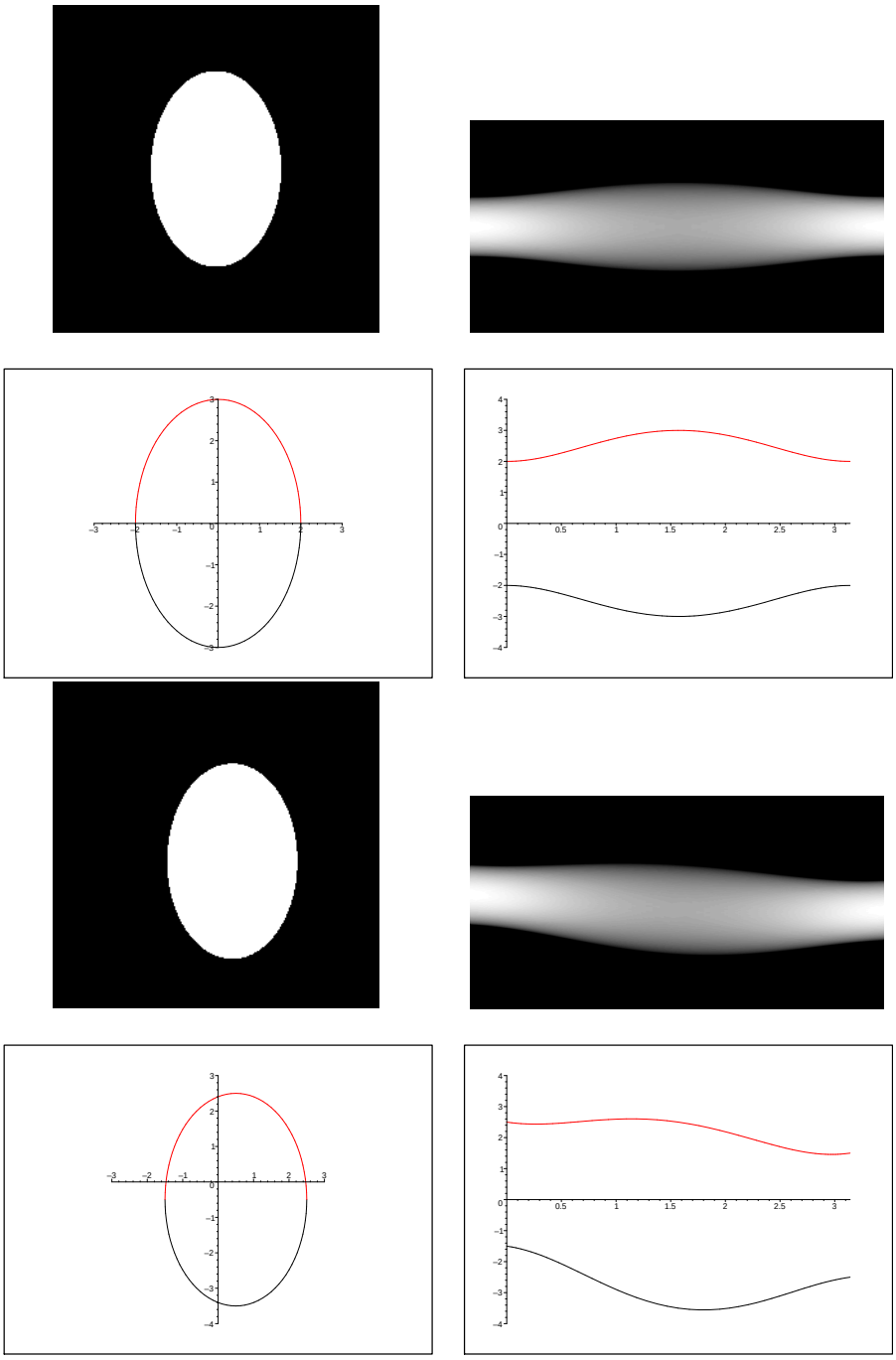


FIG. 2.20 – Correspondance des supports singuliers entre le domaine direct et le domaine de Radon : exemples d'une ellipse centrée et une d'ellipse décentrée. La figure présente pour chacun des deux cas le fantôme, le sinogramme, et les tracés des supports singuliers, dans les domaines direct et de Radon. En chaque point de la courbe rouge du domaine direct, il existe une droite tangente au support singulier. Cette droite peut être représentée par un point du domaine de Radon, qui appartient également au support singulier de la transformée de Radon, sur la courbe rouge (et de même, il y a correspondance entre points des deux courbes noires).

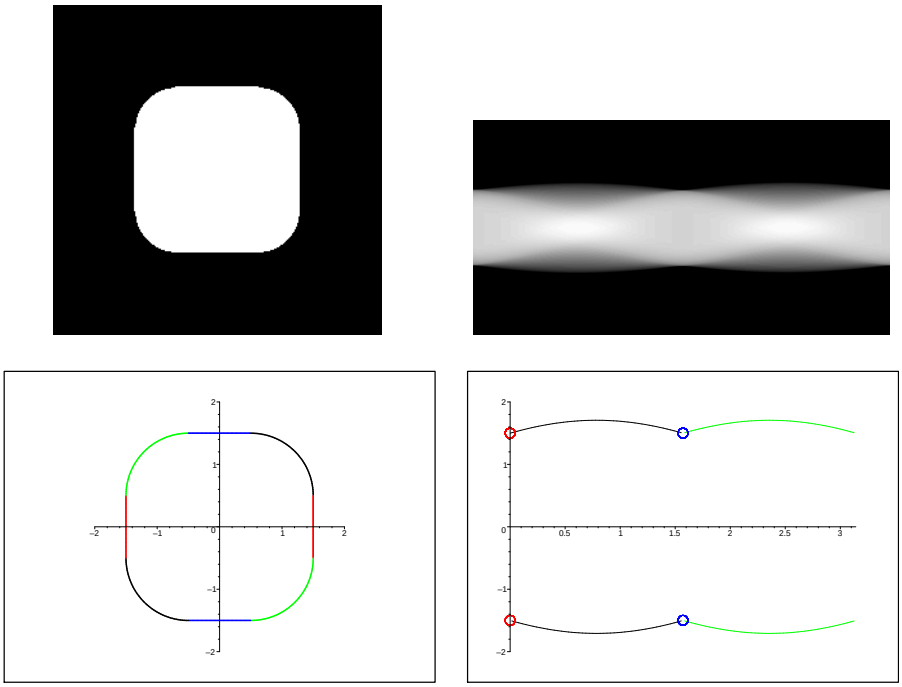


FIG. 2.21 – Correspondance des supports singuliers entre le domaine direct et le domaine de Radon : exemple d'un domaine présentant des bords rectilignes dans le domaine direct. Dans ce cas là, tous les points appartenant à un même bord ont le même point image dans le domaine de Radon.

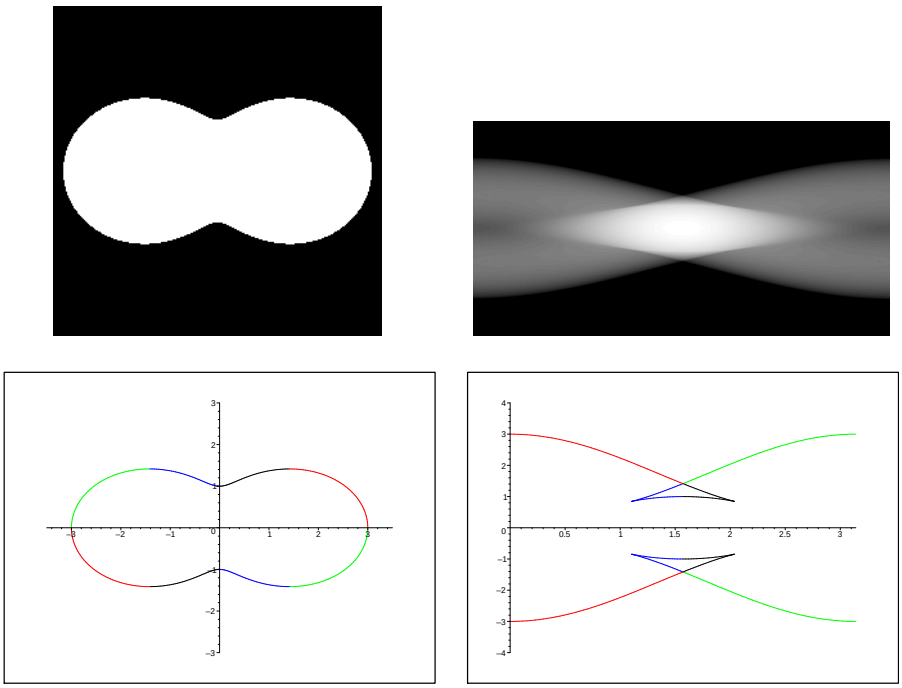


FIG. 2.22 – Correspondance des supports singuliers entre le domaine direct et le domaine de Radon : exemple d'un domaine dans lequel une même droite est tangente à la frontière du domaine en deux points distincts : ceci fait apparaître sur le support singulier de la transformée de Radon un point "à deux branches", les deux branches étant caractérisées par leur pente au point de contact. Cette pente traduit la position du point de tangence dans le domaine direct.

Exemple 2.3.5 (Un exemple plus compliqué)
Ce dernier exemple combine les caractéristiques des deux précédents : la frontière est de classe $\mathcal{C}^1$, elle présente des bords rectilignes, et, de plus, certains bords distincts du domaine direct ont une tangente commune.
Nous ne détaillons pas ici les équations de cet exemple, mais elles sont construites selon le même schéma que le "carré arrondi" vu plus haut (raccords $\mathcal{C}^\infty$ de portions de disques et de segments).
Les représentations graphiques sont présentées en figure (2.23).

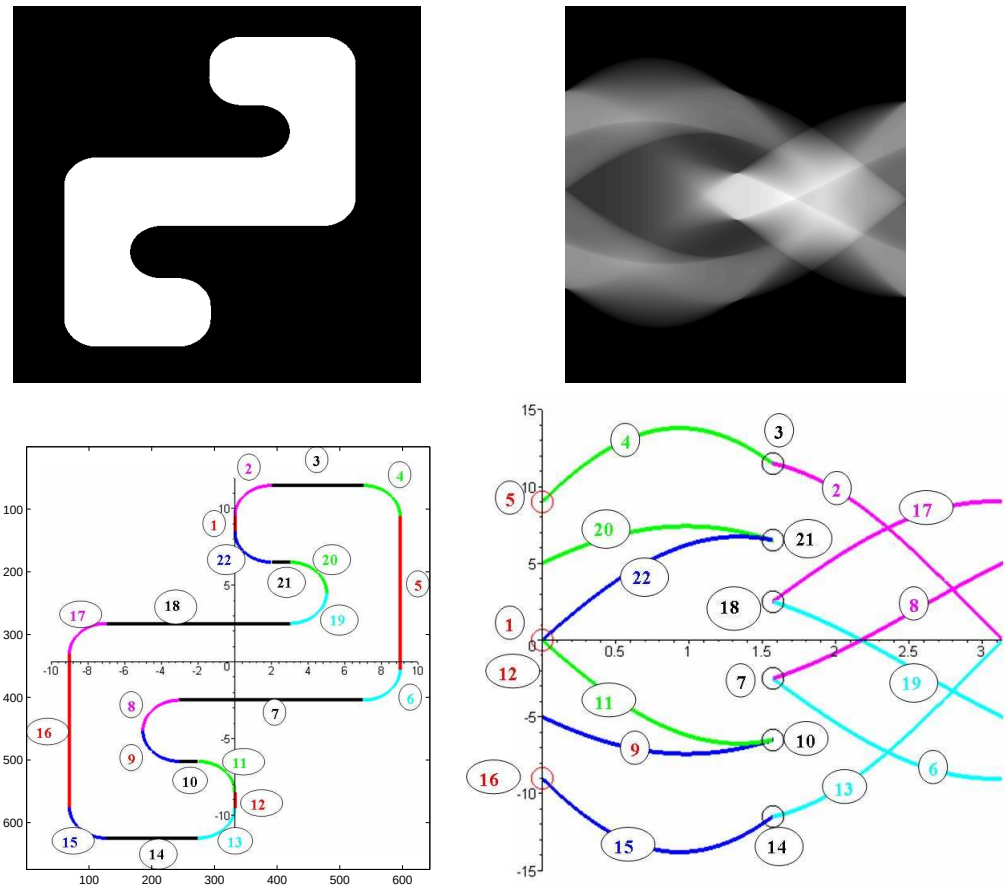


FIG. 2.23 – Correspondance des supports singuliers entre le domaine direct et le domaine de Radon : exemple d'un domaine reprenant les caractéristiques des précédents exemples, pour lequel la frontière présente des bords rectilignes et des bords distincts avec une tangente commune. On a numéroté les supports singuliers correspondants des deux domaines.

2.4 Des méthodes locales existantes en tomographie

2.4.1 Reconstruction par rétroprojection des dérivées des projections

Nous exposons d'abord une méthode récente en tomographie locale, développée, entre autres, dans des travaux de F. Noo, M. Defrise et R. Clackdoyle [80, 28]. Comme nous le dirons à la fin de ce paragraphe, cette méthode ne sera pas applicable au type de données tronquées qui nous intéressent ici ; il nous a semblé cependant intéressant de la mentionner dans ce manuscrit sur les problèmes locaux en tomographie, d'une part car elle fait désormais partie des méthodes incontournables en tomographie locale, et d'autre part pour montrer que pour autant, il subsiste des types de schémas de données - comme le problème intérieur - qui ne peuvent être traités par ce type de méthodes.

Par rapport à la formule de rétroprojection filtrée (2.13), l'idée consiste ici à se contenter de rétroprojeter seulement la dérivée des projections (on n'applique plus la transformée de Hilbert 1D) ; n'entrent alors en jeu que des opérateurs locaux, à partir desquels on reconstruit la fonction :

$$b_0(\mathbf{x}) = \int_0^\pi \partial_s \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}) d\theta$$

Dans la suite, nous allons voir que, même si l'on intègre toujours sur un intervalle de longueur π, le choix des bornes a, ici, de l'importance. On introduit donc aussi, pour ϕ appartenant à $[0,\pi[$:

$$b_\phi(\mathbf{x}) = \int_\phi^{\phi+\pi} \partial_s \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}) d\theta$$

En utilisant la parité de la transformée de Radon vue en (2.1.1), on a $\partial_s \mathcal{R}_{\theta+\pi} f = -\partial_s \mathcal{R}_\theta f$ et donc, ϕ étant fixé, on a

$$\begin{aligned} b_\phi(\mathbf{x}) &= \int_\phi^\pi \partial_s \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}) d\theta + \int_\pi^{\pi+\phi} \partial_s \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}) d\theta \\ &\overset{\theta'=\theta-\pi}{=} \int_\phi^\pi \partial_s \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}) d\theta + \int_0^\phi -\partial_s \mathcal{R}_{\theta'} f(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}') d\theta' \\ &= \int_0^\pi \mathrm{sgn}(\theta-\phi)\partial_s \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}) d\theta \end{aligned}$$

Il s'avère alors que l'on peut relier cette quantité à la transformée de Hilbert 2D : en effet, après avoir remarqué que

$$\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \widehat{\partial \mathcal{R}_\theta f}(\omega) e^{i\omega s} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} i\omega \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) e^{i\omega s} d\omega$$

on peut écrire

$$b_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi \int_{\mathbf{R}} i\omega \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) e^{i\omega \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}} d\omega d\theta$$

puis, grâce au théorème de coupe-projection (2.1.4),

$$b_0(\mathbf{x}) = \int_0^\pi \int_{\mathbf{R}} i\omega \widehat{f}(\omega\mathbf{\Theta}) e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}} d\omega d\theta = \int_0^\pi \int_{\mathbf{R}} i\mathrm{sgn}(\omega) \widehat{f}(\omega\mathbf{\Theta}) e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}} |\omega| d\omega d\theta$$

De même, en remarquant pour la deuxième égalité que $\mathrm{sgn}(\theta-\phi) = \mathrm{sgn}(\mathbf{\Theta}\cdot\mathbf{\Phi}^\perp)$, avec $\mathbf{\Phi} = (\cos\Phi, \sin\Phi)$, on a

$$b_\phi(\mathbf{x}) = \int_0^\pi \int_{\mathbf{R}} \mathrm{sgn}(\theta-\phi) i\omega \widehat{f}(\omega\mathbf{\Theta}) e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}} d\omega d\theta = \int_0^\pi \int_{\mathbf{R}} i\mathrm{sgn}(\omega\mathbf{\Theta}\cdot\mathbf{\Phi}^\perp) \widehat{f}(\omega\mathbf{\Theta}) e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}} |\omega| d\omega d\theta$$

ce qui, en coordonnées cartésiennes, s'écrit

$$b_0(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^2} i\mathrm{sgn}(k_2)\widehat{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}d\mathbf{k} \tag{2.31}$$

et

$$b_\phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^2} i\mathrm{sgn}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Phi}^\perp)\widehat{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}d\mathbf{k} \tag{2.32}$$

Nous allons voir maintenant que l'on peut isoler dans cette dernière expression une transformée de Hilbert. Pour cela, en lien avec la définition de la transformée de Hilbert pour les fonctions 1D vue avec l'expression (2.12), les auteurs de [80] rappellent que l'on définit la transformée de Hilbert dans la direction $\mathbf{e_1}$ d'une fonction bidimensionnelle par

$$\mathcal{H}_{\mathbf{e_1}}f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{u_2\in\mathbf{R};|u_2|>\epsilon}\frac{f(x_1,x_2-u_2)}{u_2}du_2\right)$$

On peut donc écrire

$$\mathcal{H}_{\mathbf{e_1}}f(\mathbf{x}) = \mathcal{H}^{1\mathrm{D}}(f(x_1,.))(x_2)$$

(on a fait apparaître, à x_1 fixé, une transformée de Hilbert 1D en la variable x_2.)

On calcule alors la transformée de Fourier de la fonction $\mathcal{H}_{\mathbf{e_1}}f$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{H}_{\mathbf{e_1}}f}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\mathcal{H}_{\mathbf{e_1}}f(x_1,x_2)e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}dx_1dx_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\left(\int_{\mathbf{R}}\mathcal{H}^{1\mathrm{D}}(f(x_1,.))(x_2)e^{-ik_2x_2}dx_2\right)e^{-ik_1x_1}dx_1\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}\widehat{\mathcal{H}^{1\mathrm{D}}(f(x_1,.))}(k_2)e^{-ik_1x_1}dx_1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}i\mathrm{sgn}(k_2)\widehat{f(x_1,.)}(k_2)e^{-ik_1x_1}dx_1\\
&= -\frac{i\mathrm{sgn}(k_2)}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}f(x_1,x_2)e^{-ik_2x_2}dx_2e^{-ik_1x_1}dx_1 = -i\mathrm{sgn}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{e_1}^\perp)\widehat{f}(\mathbf{k})
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Plus généralement, on définit la transformée de Hilbert dans la direction $\mathbf{\Theta}$ par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathbf{\Theta}}f(\mathbf{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{s\in\mathbf{R};|s|>\epsilon}\frac{f(\mathbf{x}-s\mathbf{\Theta}^\perp)}{s}ds\right) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{s\in\mathbf{R};|s|>\epsilon}\frac{f\left((\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})\mathbf{\Theta}+(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}^\perp-s)\mathbf{\Theta}^\perp\right)}{s}ds\right)\\
&= \mathcal{H}^{1\mathrm{D}}\left(g_{\theta,\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}}\right)\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}^\perp\right)
\end{aligned}$$

où on a noté $g_{\theta,\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}} : u\in\mathbf{R}\mapsto f\left((\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})\mathbf{\Theta}+u\mathbf{\Theta}^\perp\right)$.

On peut alors calculer la transformée de Fourier de $\mathcal{H}_{\mathbf{\Theta}}f$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{H}_{\mathbf{\Theta}}f}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\mathcal{H}_{\mathbf{\Theta}}f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}d\mathbf{x}\stackrel{\mathbf{x}=s\mathbf{\Theta}+t\mathbf{\Theta}^\perp}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\mathcal{H}^{1\mathrm{D}}(g_{\theta,s})(t)e^{-i(s\mathbf{\Theta}+t\mathbf{\Theta}^\perp)\cdot\mathbf{k}}dsdt\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}\widehat{\mathcal{H}^{1\mathrm{D}}g_{\theta,s}}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Theta}^\perp\right)e^{-is\mathbf{\Theta}\cdot\mathbf{k}}ds = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}i\mathrm{sgn}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Theta}^\perp)\widehat{g_{\theta,s}}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Theta}^\perp)e^{-is\mathbf{\Theta}\cdot\mathbf{k}}ds\\
&= -\frac{i\mathrm{sgn}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Theta}^\perp)}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}f(s\mathbf{\Theta}+t\mathbf{\Theta}^\perp)e^{-it\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Theta}^\perp-is\mathbf{\Theta}\cdot\mathbf{k}}dtds = -i\mathrm{sgn}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Theta}^\perp)\hat{f}(\mathbf{k})
\end{aligned} \tag{2.34}$$

On a donc, en reprenant (2.31) et (2.33),

$$b_0(\mathbf{x}) = -\int_{\mathbf{R}^2}\widehat{\mathcal{H}_{\mathbf{e_1}}f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}d\mathbf{k} = -2\pi\mathcal{H}_{\mathbf{e_1}}f(\mathbf{x})$$

et, en reprenant (2.32) et (2.34),

$$b_\phi(\mathbf{x}) = -\int_{\mathbf{R}^2} \widehat{\mathcal{H}_{\mathbf{\Phi}} f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}} d\mathbf{k} = -2\pi \mathcal{H}_{\mathbf{\Phi}} f(\mathbf{x})$$

On peut donc reconstruire la transformée de Hilbert de f dans une direction donnée en rétroprojetant les dérivées des projections de la transformée de Radon. On va voir dans la suite que l'on peut en tirer parti pour reconstruire des informations sur la fonction f à partir de données locales.

Dans [80], les auteurs font référence aux résultats suivants : pour une fonction g 1D dont le support est strictement inclus dans un intervalle $[L, U]$ (c'est-à-dire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que g est nulle à l'extérieur de l'intervalle $[L + \epsilon, U - \epsilon]$, si l'on connaît la transformée de Hilbert de g sur l'intervalle $[L, U]$, alors on peut inverser la transformée de Hilbert de g et retrouver ainsi les valeurs de g sur $[L + \epsilon, U - \epsilon]$:

$$\forall s \in [L+\epsilon, U-\epsilon],\ g(s) = -\frac{1}{\sqrt{(s-L)(U-s)}} \left(\int_L^U \sqrt{(s'-L)(U-s')} \frac{\mathcal{H}g(s')}{\pi(s-s')} ds' + C \right)$$

où C est une constante qui peut être déterminée dès que l'on connaît la valeur de g en un point (ce qui est possible en utilisant des informations de support).
Cette formule d'inversion permet de reconstruire, cette fois-ci en dimension 2, une fonction f le long de certaines droites à partir de données tronquées : plus précisément, le résultat suivant est énoncé dans [80] :

Proposition 2.4.1
La fonction f peut être reconstruite en un point $\mathbf{x_0}$ s'il existe un vecteur unitaire $\mathbf{\Phi_0} = (\cos\phi_0, \sin\phi_0)$ et un segment $S_{\phi_0} f$ inclus dans la droite $D_{\phi_0, \mathbf{x_0}\cdot\mathbf{\Phi_0}}$, dirigée par $\mathbf{\Phi_0^\perp}$ et passant par $\mathbf{x_0}$, tel que :

1. *le segment $S_{\phi_0} f$ contient $\mathbf{x_0}$ et contient le support de f le long de la droite $D_{\phi_0, \mathbf{x_0}\cdot\mathbf{\Phi_0}}$, c'est-à-dire $f(\mathbf{x}) = 0$ pour $\mathbf{x} \in D_{\phi_0, \mathbf{x_0}\cdot\mathbf{\Phi_0}} \backslash S_{\phi_0} f$;*
2. *pour chaque $\mathbf{x} \in S_{\phi_0} f$, et pour chaque angle $\phi \in [\phi_0, \phi_0 + \pi]$, la transformée de Radon de f $\mathcal{R}_\phi f$ est connue au voisinage de $s = \mathbf{x} \cdot \mathbf{\Phi_0}$.*

Pour résumer, dans le cas où l'on mesure la transformée de Radon seulement à travers une région, on peut reconstruire une fonction f (à support borné) le long de la droite D quand l'intersection de la droite D avec le support de f est contenue dans la région d'exposition. C'est le cas sur les deux premiers schémas à gauche en figure (2.24), où l'on peut reconstruire les régions grisées, dans le premier schéma en utilisant une droite horizontale, dans le deuxième en utilisant une droite verticale, à partir des seules mesures de la transformée de Radon effectuées au voisinage de l'intersection de chacune de ces deux droites avec le support de la fonction.

Dans [28], la condition sur le segment $S_{\phi_0} f$ est relachée, et il est montré que des résultats similaires peuvent être obtenus quand le segment $S_{\phi_0} f$ contient $\mathbf{x_0}$ et quand *au moins* l'une de ses extrémités est à l'extérieur du support de f le long de la droite $D_{\phi_0, \mathbf{x_0}\cdot\mathbf{\Phi_0}}$ (autrement dit, on peut reconstruire f le long de la droite D quand l'intersection de la droite D avec le support de f a au moins l'une de ses extrémités à l'intérieur de la région d'exposition) : ceci est illustré sur les deux figures de droite en figure (2.24), où l'on peut ici aussi, à partir de données locales, reconstruire les régions grisées.

Ces résultats ne sont pas applicables dans le cadre que nous nous sommes fixés : dans le cas du problème intérieur, si la région d'intérêt est strictement incluse dans le support de f (c'est-à-dire par exemple lorsque sa frontière n'est jamais tangente à la frontière du support de la fonction), on ne pourra trouver aucune droite satisfaisante ; de même, pour le problème à angle limité, on ne dispose pas -par définition- des mesures de la transformée de Radon selon toutes les directions, et la formule d'inversion ne peut pas être mise en oeuvre. Nous allons maintenant présenter deux autres méthodes, plus anciennes, qui, elles, peuvent s'appliquer au problème intérieur.

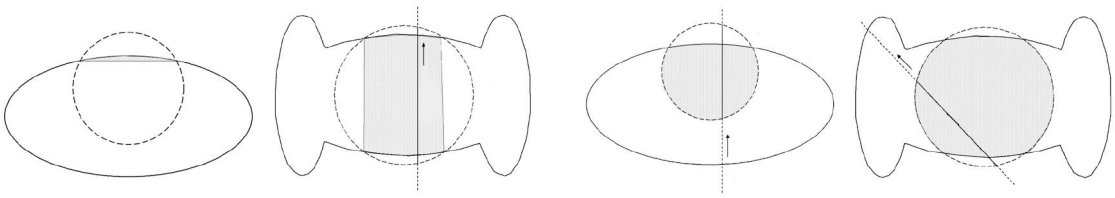


FIG. 2.24 – Reconstruction de régions à partir de données locales à partir de la transformée de Hilbert 2D : avec la méthode développée dans [80, 28], on peut reconstruire les régions grisées à partir de données de Radon mesurées au travers de ces régions. [Image adaptée à partir de [28]]

2.4.2 Λ-tomographie

Cette méthode a été introduite dans les travaux de Faridani, Smith, Ritman [40, 38, 37]. Elle est appelée aussi parfois *tomographie locale*, et est conçue pour le problème intérieur. L'idée consiste à abandonner l'idée d'essayer d'approcher au mieux les valeurs de f dans la région d'intérêt, et à reconstruire plutôt Λf (où Λ est un opérateur que nous présenterons plus loin, qui généralise l'opérateur Λ vu jusqu'à présent pour des fonctions 1D), qui présente les deux spécificités suivantes :

- A la différence de la fonction f, Λf peut être identifiée dans une région d'intérêt à partir des seules mesures de la transformée de Radon à travers cette région (non seulement il n'y a aucun obstacle théorique à cela, mais en plus on connaît des algorithmes qui permettent de le faire) ;
- Les ensembles singuliers de Λf et de f sont identiques.

On peut donc, en reconstruisant Λf à partir de données locales dans la région d'intérêt, avoir accès à l'ensemble singulier de f dans la région d'intérêt.

Nous allons maintenant expliciter l'opérateur Λ et préciser les propriétés que nous venons d'évoquer. Nous serons conduits aussi à introduire l'opérateur Λ^{-1}, qui ici, joue un rôle essentiellement "cosmétique" : comme nous le mentionnerons par la suite, il permet, en reconstruisant une combinaison linéaire de Λf et de $\Lambda^{-1} f$ plutôt que Λf seul, de renvoyer une image plus ressemblante à f que Λf, en conservant l'information relative à f portée par Λf.

2.4.2.1 Définitions et propriétés

On définit d'abord l'opérateur Λ^m, où m est un entier relatif supérieur ou égal à -1, pour des fonctions bidimensionnelles (avec la convention $\Lambda^1 = \Lambda$) : pour $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, l'opérateur Λ^m est défini dans le domaine de Fourier par

$$\widehat{\Lambda^m f}(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^m \widehat{f}(\mathbf{k})$$

On peut alors montrer que la définition de l'opérateur Λ^m peut être étendue à des espaces de fonction moins restrictifs ; par exemple, dans les cas qui nous intéressent ici, à savoir $m = 1$ et $m = -1$, il est montré dans [40], et nous l'admettrons ici, qu'en dimension 2, pour toute fonction f telle que $\mathbf{x} \mapsto \dfrac{f(\mathbf{x})}{(1+|\mathbf{x}|)^3} \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$, on a, pour $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\Lambda f(\mathbf{x}) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|\mathbf{y}|>\epsilon} \frac{y_1 \partial_{y_1} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{y}|^3} d\mathbf{y} + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|\mathbf{y}|>\epsilon} \frac{y_2 \partial_{y_2} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{y}|^3} d\mathbf{y} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{u}|>\epsilon} \frac{(x_1-u_1) \partial_{u_1} f(\mathbf{u})}{|\mathbf{x}-\mathbf{u}|^3} d\mathbf{u} + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{u}|>\epsilon} \frac{(x_2-u_2) \partial_{u_2} f(\mathbf{u})}{|\mathbf{x}-\mathbf{u}|^3} d\mathbf{u} \quad (2.35)
\end{aligned}$$

tandis que

$$\Lambda^{-1}f(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|\mathbf{y}|>\epsilon}\frac{f(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{y}|}d\mathbf{y} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|>\epsilon}\frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}d\mathbf{y}$$

La proposition suivante rassemble les principales propriétés de l'opérateur Λ.

Proposition 2.4.2 (Propriétés de l'opérateur Λ [37])
On suppose que X et Y sont deux sous-ensembles mesurables de $\mathbf{R}^2$, et que f est une fonction telle que $\mathbf{x}\mapsto\dfrac{f(\mathbf{x})}{(1+|\mathbf{x}|)^3}$ soit intégrable.

1. *En notant D_a l'opérateur de dilatation, pour $a>0$, on a $\Lambda \mathrm{D}_a f = \dfrac{1}{a}\mathrm{D}_a(\Lambda f)$. Ceci implique que les objets de petite taille de l'image f sont représentés avec un fort contraste dans l'image de Λf.*

2. *On note X^C le complémentaire de X dans $\mathbf{R}^2$.*
   Pour tout $\mathbf{x}$ appartenant à l'intérieur de X, $\Lambda\chi_X(\mathbf{x})>0$.
   Pour tout $\mathbf{x}$ appartenant à l'intérieur de X^C, $\Lambda\chi_X(\mathbf{x})<0$.
   Ceci implique que le signe des sauts de Λf est le même que celui des sauts de f aux points de discontinuité de f.

3. $\Lambda\chi_X + \Lambda\chi_{X^C} = 0$.

4. *Le Laplacien de $\Lambda\chi_X$ est positif ou nul sur l'intérieur de X (autrement dit $\Lambda\chi_X$ est* sous-harmonique *sur l'intérieur de X).*
   Le Laplacien de $\Lambda\chi_X$ est négatif ou nul sur l'intérieur de X (autrement dit $\Lambda\chi_X$ est super-harmonique *sur l'intérieur de X^C).*
   Ceci implique que $\Lambda\chi_X$ ne peut pas avoir de maximum local sur l'intérieur de X, ni de minimum local sur l'intérieur de X^C, et donc, si f est une somme d'indicatrices, il n'y a pas d'oscillations dans l'image de Λf

5. *Si $\mathbf{x}$ n'appartient pas à la frontière de X, alors*

$$|\Lambda\chi_X(\mathbf{x})| \le \frac{1}{\mathrm{d}(x,\partial X)}$$

En pratique, les formules (2.35) sont difficilement manipulables. La propriété suivante, montrée dans [40], énonce une formule plus simple, que nous admettrons, applicable aux fonctions à support borné, et permettant de calculer explicitement Λf à l'extérieur du support de f ; elle donne également une formule permettant de calculer Λf à l'intérieur du support de f dans le cas où f est l'indicatrice d'un domaine $\mathbf{\Omega}$.

Proposition 2.4.3 (Calcul pratique de Λf [40])
Soit une fonction f intégrable, à support borné, noté ici X.

- *Si $\mathbf{x}$ est à l'extérieur du support de f, alors*

$$\Lambda f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{y}\in X}\frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}d\mathbf{y}$$

- *Si de plus f est l'indicatrice de l'ensemble X, alors à l'extérieur de X,*

$$\Lambda\chi_X(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{y}\in X}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}d\mathbf{y}$$

et à l'intérieur de X,

$$\Lambda\chi_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{y\in X;|\mathbf{x}-\mathbf{y}|>\epsilon}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}d\mathbf{y}$$

Nous allons maintenant illustrer les résultats précédents en calculant explicitement Λf et $\Lambda^{-1}f$ dans le cas où f est l'indicatrice du disque unité. Les valeurs que nous obtiendrons sont données dans [38], mais sans justification.

Exemple 2.4.1 (Calcul de Λf et $\Lambda^{-1}f$ pour l'indicatrice de disque)
Soit $f = \chi_{\mathbf{\Omega}}$.
Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, fixé, de module ρ.
Premier cas : *$\rho > 1$*
Dans ce cas, il n'y a pas de singularité sur le domaine d'intégration, et on peut donc calculer les valeurs de $\Lambda^{-1}f$ et de Λf avec des intégrales au sens classique. Pour $\Lambda^{-1}f$, on a ainsi

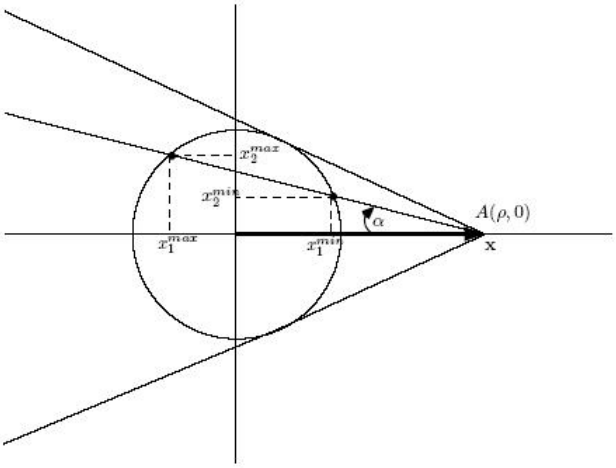
$$\forall \mathbf{x} \notin \mathbf{\Omega},\ \Lambda^{-1}f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{y}\in\mathbf{\Omega}}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}d\mathbf{y} \tag{2.36}$$

Pour calculer cette intégrale, on se place dans le repère $R_{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \mathbf{u_x}, \mathbf{u_x}^{\perp})$, où on a noté $\mathbf{u_x}$ le vecteur $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$. En particulier, dans ce repère, le point $\mathbf{x}$ a pour coordonnées $(0,0)$, et le cercle unité admet pour équation $(x_1+\rho)^2 + x_2^2 = 1$. En faisant un changement de variables avec coordonnées polaires, on obtient

$$\Lambda^{-1}f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\{(r,\alpha);r\mathbf{u}_\alpha\in\mathbf{\Omega}\}}\frac{1}{r}rdrd\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{\{(r,\alpha);r\mathbf{u}_\alpha\in\mathbf{\Omega}\}}drd\alpha$$

où on a noté $\mathbf{u}_\alpha$ le vecteur de coordonnées $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi[$, dans le repère $R_{\mathbf{x}}$. Il reste donc à calculer l'image du disque unité $\mathbf{\Omega}$ par le changement de variables opéré dans la dernière intégrale.
Pour cela, on fixe dans un premier temps la direction $\mathbf{u}_\alpha$, $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on considère la droite dirigée par $\mathbf{u}_\alpha$, passant par $\mathbf{x}$. Comme illustré sur la figure ci-dessous, elle coupe le cercle unité au point de coordonnées (x_1, x_2), dans le repère $R_{\mathbf{x}}$, si et seulement si

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ et } \left\{\begin{array}{rcl}(x_1+\rho)^2 + x_2^2 & = & 1\\ x_2 & = & x_1\tan\alpha\end{array}\right.$$



Les solutions éventuelles de ce système vérifient nécessairement

$$(x_1+\rho)^2+\tan^2\alpha x_1^2=1$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}x_1^2+2\rho x_1+\rho^2-1=0 \tag{2.37}$$

Le discriminant de cette dernière expression est égal à

$$\Delta(\alpha)=4\rho^2-\frac{4}{\cos^2\alpha}(\rho^2-1)=\frac{4}{\cos^2\alpha}(1-\rho^2\sin^2\alpha) \tag{2.38}$$

et donc

- *si* $|\sin\alpha|>\dfrac{1}{\rho}$, *la droite* D_α *ne coupe pas le cercle unité.*
- *si* $|\sin\alpha|=\dfrac{1}{\rho}$, *la droite* D_α *est tangente au cercle unité.*
- *si* $|\sin\alpha|<\dfrac{1}{\rho}$, *la droite* D_α *coupe le cercle unité en deux points distincts de coordonnées respectives* $(x_1^{\min}(\alpha),x_2^{\min}(\alpha))$ *et* $(x_1^{\max}(\alpha),x_2^{\max}(\alpha))$, *où* $x_1^{\min}(\alpha)$ *et* $x_1^{\max}(\alpha)$ *sont les deux solutions de l'équation (2.37) :*

  $$x_1^{\min}(\alpha)=\left(-2\rho-\frac{2}{\cos\alpha}\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}\right)\frac{\cos^2\alpha}{2}=-\rho\cos^2\alpha-\cos\alpha\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}$$

  avec

  $$x_2^{\min}(\alpha)=\sqrt{1-\left(x_1^{\min}(\alpha)\right)^2}$$

  et

  $$x_1^{\max}(\alpha)=\left(-2\rho+\frac{2}{\cos\alpha}\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}\right)\frac{\cos^2\alpha}{2}=-\rho\cos^2\alpha+\cos\alpha\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}$$

  avec

  $$x_2^{\max}(\alpha)=\sqrt{1-\left(x_1^{\max}(\alpha)\right)^2}$$

Quelle que soit la valeur de $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, *ces deux valeurs sont négatives (car* $\rho>1$*). Par conséquent, dans le repère* $R_{\mathbf{x}}$, *ce sont les abscisses des points repérés par les coordonnées polaires :*

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha+\pi\\ r^{\min}(\alpha)=\sqrt{\left(x_1^{\min}(\alpha)\right)^2+\left(x_2^{\min}(\alpha)\right)^2}\end{array}\right.\quad\textit{et}\quad\left\{\begin{array}{l}\alpha+\pi\\ r^{\max}(\alpha)=\sqrt{\left(x_1^{\max}(\alpha)\right)^2+\left(x_2^{\max}(\alpha)\right)^2}\end{array}\right.$$

soit

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\pi & & \\ r^{\min}(\alpha) & = & \sqrt{1+2\rho^2\cos^2\alpha+2\rho\cos\alpha\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}-\rho^2}=\sqrt{(\rho\cos\alpha+\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha})^2}\\ & = & \left|\rho\cos\alpha+\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}\right|=\rho\cos\alpha+\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}\end{array}\right.$$

et de la même manière

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha+\pi\\ r^{\max}(\alpha)=\left|\rho\cos\alpha-\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}\right|=\rho\cos\alpha-\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}\end{array}\right.$$

Reprenant l'expression (2.36), on a alors, en utilisant les coordonnées polaires dans le repère $(\mathbf{x}, \mathbf{u_x}, \mathbf{u_x}^\perp)$

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1}f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\arcsin\frac{1}{\rho}}^{\arcsin\frac{1}{\rho}}\int_{r^{\min}(\alpha)}^{r^{\max}(\alpha)}\frac{rdr}{r}d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\arcsin\frac{1}{\rho}}^{\arcsin\frac{1}{\rho}} r^{\max}(\alpha)-r^{\min}(\alpha)d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\arcsin\frac{1}{\rho}}^{\arcsin\frac{1}{\rho}}\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^{\arcsin\frac{1}{\rho}}\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{\rho}}\frac{\sqrt{1-\rho^2u^2}}{\sqrt{1-u^2}}du = \underline{\frac{2}{\pi}\mathrm{E}\left(\frac{1}{\rho},\rho\right)}\end{aligned}$$

où $\mathrm{E}(\alpha,\beta)$ *désigne ici et dans la suite l'intégrale elliptique de paramètres* α *et* β*, que l'on sait tabuler, et qui est définie par*

$$E(\alpha,\beta)=\int_0^\alpha\frac{\sqrt{1-\beta^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

De la même manière

$$\begin{aligned}\Lambda f(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\arcsin\frac{1}{\rho}}^{\arcsin\frac{1}{\rho}}\int_{r^{\min}(\alpha)}^{r^{\max}(\alpha)}\frac{rdr}{r^3}d\alpha = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\arcsin\frac{1}{\rho}}^{\arcsin\frac{1}{\rho}}\left(\frac{1}{r^{\max}(\alpha)}-\frac{1}{r^{\min}(\alpha)}\right)d\alpha \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\arcsin\frac{1}{\rho}}^{\arcsin\frac{1}{\rho}}\left(\frac{1}{\rho\cos\alpha+\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}}-\frac{1}{\rho\cos\alpha-\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}}\right)d\alpha \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\arcsin\frac{1}{\rho}}^{\arcsin\frac{1}{\rho}}\frac{\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}}{\rho^2-1}d\alpha = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{\rho^2-1}\int_0^{\frac{1}{\rho}}\sqrt{1-\rho^2u^2}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \underline{-\frac{2}{\pi}\frac{1}{\rho^2-1}\mathrm{E}\left(\frac{1}{\rho},\rho\right)}\end{aligned}$$

Deuxième cas : $0<\rho<1$

Dans ce cas il y a une singularité dans le domaine d'intégration dans le calcul de $\Lambda f(\mathbf{x})$ *et* $\Lambda^{-1}f(\mathbf{x})$*. Par rapport au cas précédent, l'équation (2.37) est toujours vérifiée, mais cette fois-ci, comme* $0<\rho<1$*, le discriminant* $\Delta(\alpha)$ *obtenu dans la formule (2.38) est toujours strictement positif ; quelle que soit la valeur de* $\alpha\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$*, la droite* D_α *coupe le cercle unité en deux points distincts, dont les abscisses sont cette fois-ci de signe opposé (car ici* $0<\rho<1$*) :*

$$x_1^{\min}(\alpha)=-\rho\cos^2\alpha-\cos\alpha\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}<0$$

et

$$x_1^{\max}(\alpha)=-\rho\cos^2\alpha+\cos\alpha\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}>0$$

Dans le repère $R_{\mathbf{x}}$*, ce sont les abscisses des points repérés, en coordonnées polaires, par* $(\alpha, r^{\max}(\alpha)>0)$*, et* $(\alpha, r^{\min}(alpha)<0)$*, quand* α *parcourt l'intervalle* $[0,\pi[$*, avec*

$$r^{\min}(\alpha)=\rho\cos\alpha-\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}\ \textit{et}\ r^{\max}(\alpha)=\rho\cos\alpha+\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}$$

Pour $\epsilon>0$*, fixé, on a*

$$\begin{aligned}\Lambda_\epsilon^{-1}f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\left(\int_{r^{\min}(\alpha)}^{-\epsilon}\frac{rdr}{r}+\int_\epsilon^{r^{\max}(\alpha)}\frac{rdr}{r}\right)d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\left(\int_{r^{\min}(\alpha)}^{-\epsilon}dr+\int_\epsilon^{r^{\max}(\alpha)}dr\right)d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\left(-r^{\min}(\alpha)+r^{\max}(\alpha)-2\epsilon\right)d\alpha = -\pi\epsilon+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}d\alpha\end{aligned}$$

Par conséquent, en faisant tendre ϵ vers zéro, on obtient

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1}f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\sqrt{1-\rho^2u^2}}{\sqrt{1-u^2}}du \\ &= \underline{\frac{2}{\pi}\mathrm{E}(1,\rho)}\end{aligned}$$

Pour Λ, on a, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\forall\epsilon>0,\ \Lambda_\epsilon f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_{r^{\min}(\alpha)}^{-\epsilon}\frac{rdr}{r^3}+\int_{\epsilon}^{r^{\max}(\alpha)}\frac{rdr}{r^3}\right)d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_{r^{\min}(\alpha)}^{-\epsilon}\frac{dr}{r^2}\int_{\epsilon}^{r^{\max}(\alpha)}\frac{dr}{r^2}\right)d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\epsilon}-\frac{1}{r^{\min}(\alpha)}-\frac{1}{\epsilon}+\frac{1}{r^{\max}(\alpha)}\right)d\alpha\end{aligned}$$

Ainsi la dépendance en ϵ disparaît, et on a donc

$$\begin{aligned}\Lambda f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{r^{\max}(\alpha)}-\frac{1}{r^{\min}(\alpha)}\right)d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\rho\cos\alpha+\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}}-\frac{1}{\rho\cos\alpha-\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}}\right)d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi(\rho^2-1)}\int_0^{\pi}\left(\frac{-2\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}}{\rho^2-1}\right)d\alpha = \frac{-1}{\pi(\rho^2-1)}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}d\alpha \\ &= \frac{-2}{\pi(\rho^2-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}d\alpha = \frac{-2}{\pi(\rho^2-1)}\int_0^1\sqrt{1-\rho^2u^2}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \underline{-\frac{2}{\pi}\frac{\mathrm{E}(1,\rho)}{\rho^2-1}}\end{aligned}$$

La figure (2.25) présente le tracé de la section centrale des fonctions Λf et $\Lambda^{-1}f$.

2.4.2.2 Traitement des données locales par Λ-tomographie

La pertinence de la méthode de Λ-tomographie repose sur deux propriétés : une fonction f étant donnée,

1. Λf est calculable localement dans la région d'intérêt ;
2. Λf apporte des informations sur les discontinuités de f dans la région d'intérêt.

Le premier point est une généralisation de la formule de rétroprojection filtrée : de la même manière que l'on peut écrire

$$f = \frac{1}{4\pi^2}\mathcal{R}^{\#}\Lambda\mathcal{R}f$$

on peut montrer que l'on a, pour tout entier $m \geq -1$

$$\Lambda^m f = \frac{1}{4\pi^2}\mathcal{R}^{\#}\Lambda^{m+1}\mathcal{R}f$$

Or, dans le cas où m est impair, $m+1$ est pair, et l'application de l'opérateur Λ^{m+1} revient à filtrer chacune des projections par le filtre dont la transformée de Fourier est $\omega \mapsto \omega^{m+1}$, qui, si $m+1$ est pair, est, à une constante près, l'opérateur dérivée $(m+1)$ème dans le domaine direct, dont on sait qu'il est un opérateur local : le filtrage peut donc se calculer localement (en revanche, si $m+1$ est impair, alors

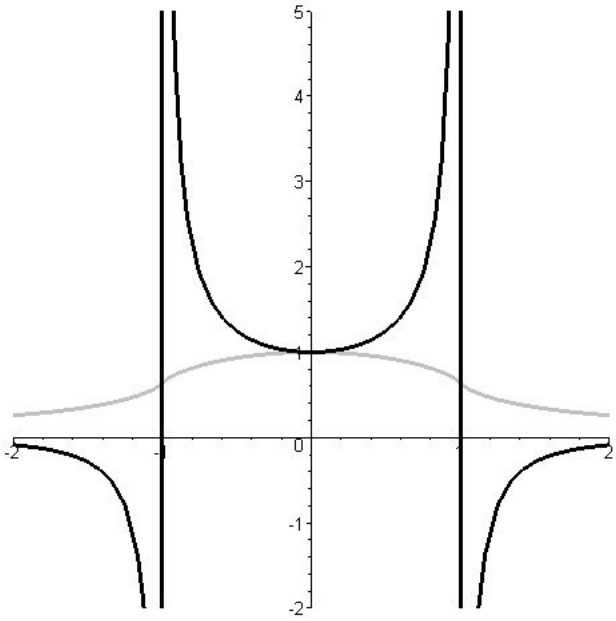


FIG. 2.25 – Sections de Λf et $\Lambda^{-1} f$ appliqués à l'indicatrice du disque (valeurs exactes) ; la représentation de Λf est tracée avec le trait le plus foncé.

le filtre est la convolution de l'opérateur de dérivation $(m+1)$ème par la distribution valeur principale, et n'est pas à support compact). Plus précisément, pour $m = 1$, on a

$$\Lambda f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{R}^{\#}(\Lambda^2 \mathcal{R} f)(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}) d\theta \tag{2.39}$$

et, pour $m = -1$,

$$\Lambda^{-1} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{R}^{\#}(\mathcal{R} f)(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}) d\theta \tag{2.40}$$

En pratique, on peut reconstruire Λf et $\Lambda^{-1} f$ en adaptant directement l'algorithme de rétroprojection filtrée : pour reconstruire $\Lambda^{-1} f$, on se contente de rétroprojeter les projections, sans l'étape de filtrage, tandis que pour reconstruire Λf, on remplace l'étape de filtrage par une estimation de la dérivée seconde des projections (par exemple avec un schéma aux différences finies d'ordre 2), puis on rétroprojette les dérivées secondes ainsi obtenues. Tous les calculs sont donc complètement locaux. A titre d'illustration, nous avons représenté en figures (2.26) et (2.27) les reconstructions obtenues pour Λf et $\Lambda^{-1} f$ en adaptant l'algorithme de rétroprojection filtrée, dans le cas du disque et du fantôme de Shepp et Logan ; les calculs ont été faits à partir de données globales, mais on trouverait des résultats identiques dans les régions d'intérêt si l'on effectuait seulement les reconstructions à partir de données locales.

Le deuxième point fait l'objet de la propriété suivante, citée par exemple dans [40], et que nous admettrons.

Proposition 2.4.4 (Conservation du support singulier par l'opérateur Λ)
L'opérateur Λ est un opérateur pseudo-différentiel elliptique, et à ce titre, les supports singuliers de Λf et de f sont identiques.

Nous renvoyons par exemple au cours de M.S. Joshi, disponible en ligne [54], pour les définitions précises d'opérateur pseudo-différentiel, et d'opérateur pseudo-différentiel elliptique, ainsi que pour la

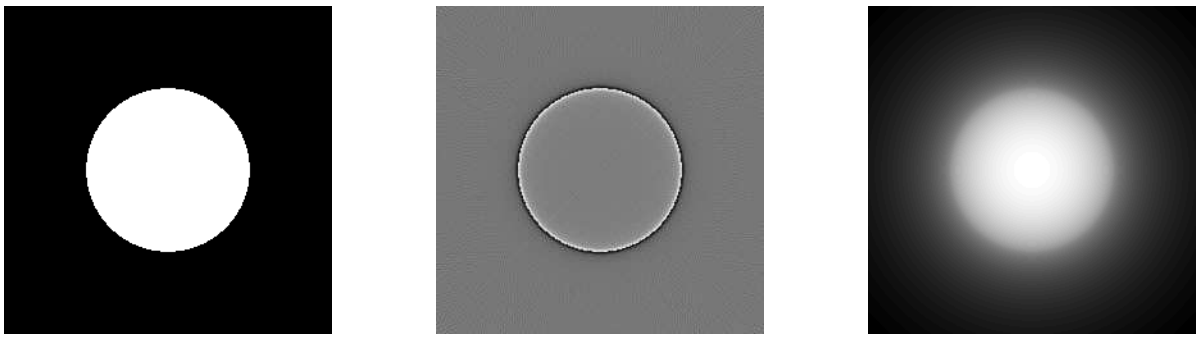


FIG. 2.26 – Reconstruction de Λf (au milieu) et $\Lambda^{-1} f$ (à droite) dans le cas du disque unité en utilisant l'algorithme de rétroprojection filtrée modifié.

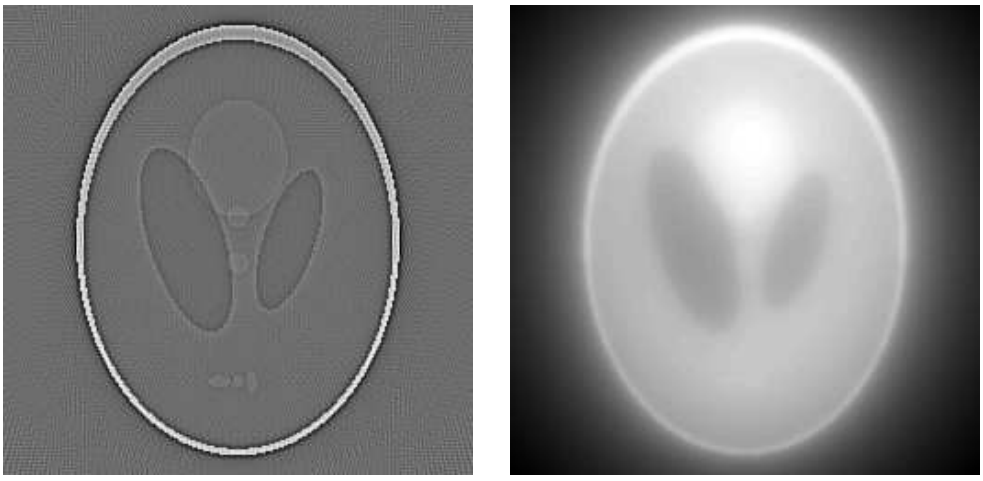


FIG. 2.27 – Reconstruction de Λf (à gauche) et $\Lambda^{-1} f$ (à droite) dans le cas du fantôme de Shepp et Logan en utilisant l'algorithme de rétroprojection filtrée modifié.

preuve de la conservation des supports singuliers (grossièrement, un opérateur *pseudo-différentiel* est un opérateur dont le *symbole* dans le domaine de Fourier, à savoir ici $|\mathbf{k}|^m$ « ressemble » au symbole d'un opérateur différentiel, et on dit qu'il est elliptique si, ailleurs qu'en zéro, il ne s'annule pas) ; il est en particulier prouvé qu'après application d'un opérateur pseudo-différentiel, le support singulier obtenu est inclus dans le support singulier initial, et qu'on a conservation du support singulier dans le cas où l'opérateur est elliptique.

Comme on l'a dit en introduction de cette partie relative à la Λ-tomographie, l'opérateur Λ^{-1} joue un rôle essentiellement cosmétique : il n'apporte aucune information sur les discontinuités de f. En revanche, il a été constaté expérimentalement [38] que si l'on construit une combinaison linéaire $\mathbf{L}(f)$ de Λf et $\Lambda^{-1} f$ avec des poids bien choisis, alors on obtient une image qui, tout en préservant les discontinuités de Λf, donc, celles de f, est plus ressemblante à f que ne l'est Λf ; il est dit dans [38] que cet aspect n'est pas négligeable, car les praticiens à qui sont destinés ces images préfèrent disposer d'images les plus ressemblantes possible aux images qu'ils ont coutume de manipuler. En pratique, les auteurs préconisent de reconstruire $L(f) = \alpha(\Lambda f + \mu \Lambda^{-1} f)$, et fournissent dans [38] des recommandations pour le choix de α et μ qui dépendent de la taille de la région d'intérêt. Sans entrer plus dans les détails ici, nous avons représenté en figure (2.28) la combinaison obtenue dans le cas du disque unité, pour une zone d'intérêt de rayon 1 (dans ce cas $\alpha = 1$, et $\mu = 6$) : avec ces paramètres, on arrive à contre-balancer la forme en "bol" de Λf par la contribution de $\Lambda^{-1} f$, de telle sorte que la fonction $L(f)$ finalement reconstruite est quasiment constante sur le disque unité, les discontinuités de Λf étant préservées.

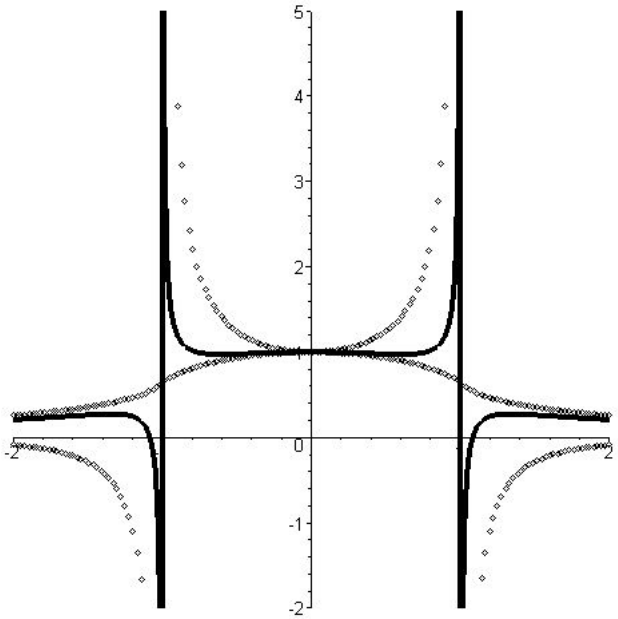


FIG. 2.28 – Reconstruction de $L(f) = \Lambda f + \mu \Lambda^{-1} f$: avec un choix judicieux de μ on arrive à contre-balancer la forme en "bol" de Λf par la contribution de $\Lambda^{-1} f$, de telle sorte que la fonction $L(f)$ est quasiment constante sur le disque unité, les discontinuités de Λf étant préservées ($L(f)$ est représentée en trait plein, et on a laissé les traces de Λf et de $\Lambda^{-1} f$, déjà vues en figure (2.25)).

2.4.2.3 Le problème des sauts

Les résultats que vous venons de présenter montrent que les discontinuités de Λf sont localisées le long des mêmes courbes que celles de f, mais qu'en revanche l'information sur la différence de densité (le *saut* à la traversée des frontières est perdue dans Λf. Dans [38], les auteurs proposent une technique pour

estimer ces sauts à partir de la reconstruction de Λf.

On suppose ici que la fonction f s'écrit comme une combinaison linéaire d'une fonction f_0 de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, et de K indicatrices de domaines, fermés, $(X_k)_{k=1\cdots K}$; on suppose de plus que les intérieurs des domaines $(X_k)_{k=1\cdots K}$ sont deux à deux disjoints, et on note ∂X_k leurs frontières respectives.
On se place ici au voisinage de la frontière entre deux de ces K domaines, X_j et X_i ; on note $W_{i,j}$ la réunion de leurs intérieurs ($W_{i,j} = (X_i \cup X_j)^o$), et on note $\Gamma_{i,j}$ la frontière supposée non vide entre X_i et X_j située dans $W_{i,j}$. Le but de ce qui est exposé ensuite est de présenter une méthode permettant d'évaluer la valeur du saut $c_j - c_i$ au travers de $\Gamma_{i,j}$.

En isolant les termes relatifs à X_i et X_j, on peut écrire :

$$f = f_0 + \sum c_k \chi_{X_k} = (c_j - c_i)\ \chi_{X_j} + f_{i,j} \text{ avec } f_{i,j} = f_0 + c_i\ \chi_{X_i \cup X_j} + \sum_{k \neq i,j} c_k \chi_{X_k} \tag{2.41}$$

Pour tout $\mathbf{x} \in W_{i,j} \backslash \Gamma_{i,j}$, on peut écrire

$$f(\mathbf{x}) = (c_j - c_i)\chi_{X_j}(\mathbf{x}) + f_{i,j}(\mathbf{x})$$

et donc

$$\forall \mathbf{x} \in W_{i,j} \backslash \Gamma_{i,j},\ \Lambda f(\mathbf{x}) = (c_j - c_i)\Lambda\chi_{X_j}(\mathbf{x}) + \Lambda f_{i,j}(\mathbf{x})$$

soit, comme on sait que l'opérateur Λ appliqué à une indicatrice de domaine ne s'annule pas,

$$\forall \mathbf{x} \in W_{i,j} \backslash \Gamma_{i,j},\ c_j - c_i = \frac{\Lambda f(\mathbf{x})}{\Lambda\chi_{X_j}(\mathbf{x})} - \frac{\Lambda f_{i,j}(\mathbf{x})}{\Lambda\chi_{X_j}(\mathbf{x})}$$

On dispose alors du résultat suivant, établi dans [38], et que nous admettrons :

Proposition 2.4.5 (Estimation des sauts en Λ-tomographie)
Avec les notations ci-dessus, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall \mathbf{x} \in W_{i,j} \backslash \Gamma_{i,j},\ c_j - c_i &= \frac{\Lambda f(\mathbf{x})}{\Lambda\chi_{X_j}(\mathbf{x})} + \mathrm{O}(d(\mathbf{x},\Gamma)) \text{ quand } d(\mathbf{x},\Gamma) \to 0 \\
\forall \mathbf{x} \in W_{i,j} \backslash \Gamma_{i,j},\ |c_j - c_i| &= \frac{|\nabla\Lambda f(\mathbf{x})|}{\left|\nabla\Lambda\chi_{X_j}(\mathbf{x})\right|} + \mathrm{O}(d(\mathbf{x},\Gamma)^2) \text{ quand } d(\mathbf{x},\Gamma) \to 0
\end{aligned}$$

Ces deux relations montrent que l'on peut estimer la valeur du saut $c_j - c_i$ en évaluant $\dfrac{\Lambda f(\mathbf{x})}{\Lambda\chi_{X_j}(\mathbf{x})}$ ou $\dfrac{|\nabla\Lambda f(\mathbf{x})|}{\left|\nabla\Lambda\chi_{X_j}(\mathbf{x})\right|}$ pour $\mathbf{x}$ au voisinage de la frontière Γ, l'estimation étant plus fine dans le deuxième cas.

En pratique, dans [38], pour estimer un saut inclus dans la région d'intérêt à partir de données locales, les auteurs proposent de procéder de la manière suivante (on supposera ici que le domaine noté X_j est inclus dans la région d'intérêt)

1. reconstruire Λf dans la région d'intérêt à partir des données locales (en appliquant la formule vue en (2.39)) ;
2. déterminer la frontière ∂X_j en appliquant un algorithme de détection de contours à l'image de Λf, et ainsi isoler X_j (dans [38], cette étape est en partie manuelle) ;
3. reconstruire $\Lambda\chi_{X_j}$, en simulant d'abord sur l'image de X_j la même géométrie d'acquisition de mesures que celle qui a permis de mesurer $\mathcal{R}f$, pour obtenir $\mathcal{R}X_j$, sur laquelle on applique alors le même algorithme de reconstruction qu'en étape 1 ;

4. évaluer numériquement $\Lambda f(\mathbf{x})$ et $\Lambda\chi_{X_j}(\mathbf{x})$ en plusieurs points du voisinage de Γ, puis, en faisant une moyenne des différents quotients obtenus, obtenir une estimation de la valeur du saut.

Les auteurs de [38] estiment parvenir ainsi à une erreur entre densité estimée et densité réelle de l'ordre de 5% de la densité réelle. Il nous semble cependant que la méthode n'est pas très pratique à mettre en oeuvre (les étapes de détection de contours et de simulation des projections d'indicatrices sont contraignantes) ; une alternative lui a été proposée : *la tomographie pseudo-locale*.

2.4.3 Tomographie pseudo-locale

Cette méthode a été conçue et proposée par A. Katsevitch et A.Ramm, dans [58] ; on en trouvera également des présentations par A. Faridani, par exemple dans [37, 36].
La motivation des auteurs était la suivante : construire une méthode qui serait strictement locale, comme la Λ-tomographie, qui conserverait, également comme la Λ-tomographie, la localisation des discontinuités, mais qui, en plus pourrait fournir directement l'amplitude des discontinuités dans la région d'intérêt. Pour cela, les auteurs s'appuient sur la formule d'inversion globale de la transformée de Radon, exprimée dans le domaine direct (que nous avons rappelée plus haut 2.11) :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s|>\epsilon}\frac{\partial_s\mathcal{R}_\theta f(s)}{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s}dsd\theta$$

Pour rendre le filtrage local, ils proposent de tronquer le filtre rampe non plus dans le domaine de Fourier, comme c'était le cas dans la mise en oeuvre de la méthode de rétroprojection filtrée, mais dans le domaine direct, en ne conservant que la restriction du filtre rampe à un intervalle fermé, symétrique autour de zéro ; ainsi, pour $d>0$, au lieu de reconstruire f, on reconstruit la fonction f_d, définie par

$$f_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{0}^{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon<|\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s|<d}\frac{\partial_s\mathcal{R}_\theta f(s)}{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s}dsd\theta$$

Le calcul de f_d peut être fait quasi-localement : on a seulement besoin de mesurer la transformée de Radon au travers du disque de centre $\mathbf{x}$ et de rayon $2d$ pour reconstruire exactement la valeur de f_d au point $\mathbf{x}$.
Pour préciser l'information portée par la fonction f_d, on introduit la fonction suivante, différence entre la fonction f_d et la fonction de référence f, définie par :

$$f_d^C(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f_d(\mathbf{x})$$

On a alors une première propriété, essentielle :

Proposition 2.4.6 (Discontinuités et tomographie pseudo-locale [58])
Pour tout $d>0$, la fonction f_d^C est continue dans le domaine direct.

L'interprétation de cette propriété est immédiate : quel que soit $d>0$, la fonction f_d porte les discontinuités de la fonction f, autrement dit les discontinuités de f_d sont exactement les mêmes que celles de f, que ce soit au niveau de la localisation ou de l'amplitude.

Preuve . Par définition de f_d^C,

$$f_d^C(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{0}^{2\pi}\int_{s\in\mathbf{R};|\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s|>d}\frac{\partial_s\mathcal{R}_\theta f(s)}{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s}dsd\theta$$

(il n'y a plus de singularité dans le domaine d'intégration, les intégrales en valeur principale n'apparaissent donc plus.)

On peut alors écrire,

$$
\begin{aligned}
f_d^C(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-d}\frac{\partial_s\mathcal{R}_\theta f(s)}{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s}ds+\int_{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}+d}^{\infty}\frac{\partial_s\mathcal{R}_\theta f(s)}{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s}ds\right)d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\left[\frac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s}\right]_{-\infty}^{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-d}+\int_{-\infty}^{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-d}\frac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s)^2}ds+\left[\frac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s}\right]_{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}+d}^{+\infty}+\int_{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}+d}^{\infty}\frac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s)^2}ds\right) \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-d)+\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}+d)}{d}d\theta \\
&\quad+\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-d}\frac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s)^2}ds+\int_{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}+d}^{\infty}\frac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s)^2}ds\right)d\theta
\end{aligned}
$$

La continuité de f_d^C découle alors du théorème des intégrales à paramètres [45], que l'on peut appliquer ici car, pour la première intégrale,

- presque pour tout $\theta\in[0,2\pi]$, $\mathbf{x}\mapsto\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-d)+\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}+d)$ est continue sur $\mathbf{R}^2$, comme composée de fonctions continues ; en effet, les seules incidences pour lesquelles $\theta\mapsto\mathcal{R}_\theta f$ n'est pas une fonction continue sont les directions pour lesquelles la fonction du domaine direct à un bord confondu avec une tangente à ce bord sur un intervalle de longueur strictement positive ; or (nous l'admettrons), il peut y avoir au plus un nombre fini de directions pour lesquelles ceci se produit (par exemple, pour un carré, il y a quatre telles directions) ; par conséquent, on peut affirmer que presque pour toute incidence θ, $\mathcal{R}_\theta f$ est continue.

- pour tout $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2$, il existe une constante M telle que, pour tout couple (θ,s),

  $$|\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-d)+\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}+d)|\leq M$$

  (car la transformée de Radon est bornée)

et, pour la deuxième intégrale,

- pour tout couple $(\theta,s)\in\{(s,\theta);|\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s|>d\}$, $\mathbf{x}\mapsto\dfrac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s)^2}$ est continue sur $\mathbf{R}^2$.
- pour tout $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2$, on a, pour tout couple $(\theta,s)\in\{(s,\theta);|\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s|>d\}$

  $$\left|\frac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s)^2}\right|\leq\frac{|\mathcal{R}_\theta f(s)|}{d^2}$$

  qui est une fonction intégrable en (θ,s) :

  $$\int_0^{2\pi}\int_{s\in\mathbf{R};|\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\Theta}-s|>d}\frac{|\mathcal{R}_\theta f(s)|}{d^2}dsd\theta\leq\frac{1}{d^2}\|\mathcal{R}f\|_{\mathbf{L}^1}<\infty$$

■

Ainsi, quelle que soit la marge d, la fonction f_d porte les discontinuités de f, en localisation, mais aussi en valeur du saut aux points de discontinuité.
On dispose aussi d'une propriété de convergence, que nous admettrons.

Proposition 2.4.7 (Convergence de f_d vers f [58])

- *Si U est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ sur lequel la restriction de f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors*

  $$\left|f_d^C(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})\right|=\mathrm{O}(d)\ \textit{quand}\ d\to0$$

  et de plus la convergence de f_d^C vers f est uniforme sur tous les sous-ensembles compacts de U.

– *Si* (Γ) *est une courbe de discontinuité de* f*, si* x_0 *est un point de* Γ*, et s'il existe un voisinage ouvert* V *de* x_0 *tel que* Γ *est régulière sur* V *et* f *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *par morceaux sur* V*, alors*

$$\left| f_d^C(\mathbf{x_0}) - \left(\frac{f_+(\mathbf{x_0}) - f_-(\mathbf{x_0})}{2} \right) \right| = \mathrm{O}(d|\ln d|) \text{ quand } d \to 0$$

où on a noté $f_+(\mathbf{x_0})$ *et* $f_-(\mathbf{x_0})$ *les limites de* f *quand* $\mathbf{x}$ *tend vers* $\mathbf{x_0}$ *de part et d'autre de la courbe* Γ *le long de n'importe quelles courbes n'intersectant pas* Γ*.*

Néanmoins, si cette méthode est théoriquement attractive, il est expliqué dans [37] que la conservation des sauts ne résiste pas à l'implémentation numérique, et qu'il faut alors avoir recours à des méthodes complémentaires du même type que celle que nous avons présentée pour la Λ-tomographie pour pouvoir estimer les sauts. Une autre méthode complémentaire, nécessitant des développements théoriques ardus (de notre point de vue ...), est d'ailleurs proposée dans [58] ; nous ne l'exposerons pas ici.

Nous terminons cette partie en illustrant les résultats qui viennent d'être énoncés par l'exemple du disque unité. A notre connaissance, les calculs qui suivent ne figurent pas dans la littérature.

Exemple 2.4.2 (Tomographie pseudo-locale pour le disque unité disque)
Dans cet exemple f *désigne l'indicatrice du disque unité. Pour tout* θ*,* $\mathcal{R}_\theta f$ *a donc son support inclus dans* $[-1,1]$ *(d'après la propriété 2.1.2). Nous supposons que* $0 < d < 1$*, et nous allons calculer les projections obtenues après filtrage, et avant rétroprojection, lors du calcul de* f_d^C*, dont l'expression est, rappelons-le :*

$$f_d^C(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-d} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s} ds + \int_{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}+d}^{\infty} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s} ds \right) d\theta$$

Soit $\rho \in \mathbf{R}$*. On note*

$$\begin{aligned} g_{d,\theta}^C(\rho) &\equiv g_d^C(\rho) = \int_{-\infty}^{\rho-d} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{\rho - s} ds + \int_{\rho+d}^{\infty} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{\rho - s} ds \\ &\overset{\text{ici}}{=} \int_{]-\infty,\rho-d]\cap]-1,1[} \frac{-2s}{\sqrt{1-s^2}(\rho - s)} ds + \int_{[\rho+d,\infty[\cap]-1,1[} \frac{-2s}{\sqrt{1-s^2}(\rho - s)} ds \end{aligned} \quad (2.42)$$

On utilise alors la primitive suivante :

$$\int \frac{-2s}{\sqrt{1-s^2}(\rho - s)} ds \overset{\texttt{Maple}}{=} \begin{cases} 2\arcsin(s) - \frac{2\rho}{\sqrt{\rho^2-1}} \arctan\left(\frac{\rho s - 1}{\sqrt{\rho^2-1}\sqrt{1-s^2}} \right) & \text{si } |\rho| > 1 \\ 2\arcsin(s) - \frac{2\rho \ln 2}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \ln\left(\frac{1 - s\rho + \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-s^2}}{s-\rho} \right) & \text{si } |\rho| < 1 \end{cases} \quad (2.43)$$

On distingue alors plusieurs cas dans le calcul de $g_d^C(\rho)$*, selon la valeur prise par* ρ *:*

- $\rho < -1-d$*, seule la deuxième intégrale dans (2.42) est non nulle ; on utilise la première expression dans (2.43), avec comme bornes dans l'intégrale* $(-1,1)$*.*
- $-1-d < \rho < -1$ *; seule la deuxième intégrale est non nulle ; on utilise on utilise la première expression dans (2.43), avec comme bornes dans l'intégrale* $(\rho+d,1)$*.*
- $-1 < \rho < d-1$ *; seule la deuxième intégrale est non nulle ; on utilise la deuxième expression dans (2.43), avec comme bornes dans l'intégrale* $(\rho+d,1)$*.*
- $d-1 < \rho < 1-d$ *: les deux intégrales participent ; on utilise pour chacune la deuxième expression dans (2.43), avec comme bornes respectives dans* $(-1,\rho-d)$ *et* $(\rho+d,1)$*.*

- $1 - d < \rho < 1$; *seule la première intégrale est non nulle ; on utilise la deuxième expression dans (2.43), avec comme bornes dans l'intégrale* $(-1, \rho - d)$.
- $1 < \rho < 1 + d$; *seule la première intégrale est non nulle ; on utilise la première expression dans (2.43), avec comme bornes dans l'intégrale* $(-1, \rho - d)$.
- $\rho > 1 + d$; *seule la première intégrale est non nulle ; on utilise on utilise la première expression dans (2.43), avec comme bornes dans l'intégrale* $(-1, 1)$.

Les courbes représentatives des fonctions g_d^C, pour différentes valeurs de d sont présentées en figure (2.4.2), où on les a comparées avec ce que l'on rétroprojette dans la méthode de rétroprojection filtrée avec données complètes (en pointillés).

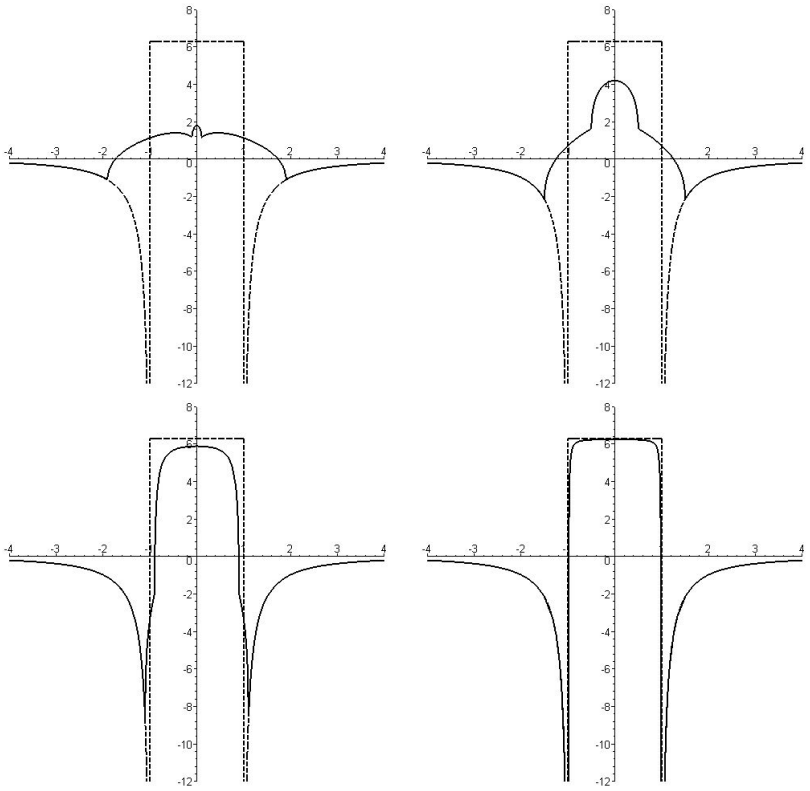


FIG. 2.29 – Représentation des fonctions g_d^C, pour différentes valeurs de d, dans la méthode pseudo-locale : on a appliqué un filtre rampe tronqué dans le domaine direct ; de gauche à droite, puis de haut en bas, le rayon du filtre est $d = 0.9$, $d = 0.5$, $d = 0.1$, $d = 0.01$; à titre de comparaison, on a indiqué en pointillés les projections après filtrage par le filtre rampe complet. Dans la méthode pseudo-locale appliquées à des données intérieures, on rétroprojette la différence entre les deux courbes tracées.

Les deux dernières méthodes que nous venons de présenter sont connues, et régulièrement citées dans la littérature. Nous allons dans la suite expliquer qu'à notre sens une autre méthode, beaucoup plus simple, mériterait de faire partie de cette famille de méthodes "de référence" en tomographie locale.

2.4.4 Reconstruction locale par rétroprojection filtrée

On a vu que dans le cas du problème intérieur l'information sur les discontinuités est théoriquement disponible dans les données tronquées : l'enjeu des méthodes locales est d'arriver à extraire au mieux ces informations pour reconstituer le plus d'information possible sur les discontinuités de f dans la région

d'intérêt. On vient de présenter deux méthodes de reconstruction locale, connues, et très souvent mentionnées dans la littérature. *A contrario*, la méthode de rétroprojection filtrée n'est, à notre connaissance, jamais reconnue comme une méthode locale dans ce contexte où seules des données intérieures sont disponibles, souvent sous prétexte que le filtre rampe n'est pas de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans le domaine de Fourier, donc ne peut pas être à support compact dans le domaine direct, *donc* ne se prête pas à des données tronquées. A notre connaissance, il en est seulement fait mention dans les travaux suivants :

- Natterer, dans [78], à la suite de l'étude des variations dans la région d'intérêt des fonctions du noyau de la transformée de Radon intérieure (qui aboutissent à la majoration (2.29)), explique que c'est une méthode qui peut être utilisée si l'on recherche seulement les "changements de valeurs" dans la fonction f, et à condition de prolonger les projections de manière *consistante* sur la partie du sinogramme non mesurée (voir [78] pour l'explication de ce prolongement ;
- Bonnet, dans [10], constate qu'elle a un comportement satisfaisant sur plusieurs images, et l'explique par la décroissance rapide du filtre rampe tel qu'il est implémenté et l'homogénéité des images-tests utilisées.

Nous avons de notre côté essayé d'appliquer, *naïvement*, la méthode de rétroprojection filtrée à des données tronquées, sans appliquer la procédure de prolongement des données par consistance, contraignante à mettre en oeuvre, c'est-à-dire en prenant comme données la fonction g définie par :

$$\forall(\Theta, s) \in \mathbf{S}^1 \times [-1, 1],\ g(\theta, s) = \begin{cases} \mathcal{R}f(\Theta, s) \text{ si } |s| \leq a \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{2.44}$$

où a désigne le rayon de la région d'exposition.
Les résultats que nous avons obtenus sur le fantôme de Shepp et Logan sont présentés en figure (2.30) : ils sont troublants, car très satisfaisants ! Nous avons reconstruit la région d'intérêt (en première ligne de la figure (2.30) à partir des seules données mesurées au travers de cette région : la reconstuction obtenue figure sur la ligne suivante, à gauche ; il y a certes un biais "lisse" sur toute la région d'intérêt, des artefacts au bord de la région d'intérêt, mais les discontinuités sont visibles. Pour réduire les artefacts au bord de la région d'intérêt, nous avons appliqué une méthode connue dans le traitement des données locales [10, 90], qui consiste à prolonger le sinogramme *par continuité*, c'est-à-dire qui consiste à construire la fonction g cette fois-ci définie par :

$$\forall(\Theta, s) \in \mathbf{S}^1 \times [-1, 1],\ g(\theta, s) = \begin{cases} \mathcal{R}f(\Theta, s) \text{ si } |s| \leq a \\ \mathcal{R}f(\Theta, a) \text{ si } s > a \\ \mathcal{R}f(\Theta, a) \text{ si } s < -a \end{cases} \tag{2.45}$$

où a désigne le rayon de la région d'exposition.
On constate alors (deuxième ligne, à droite en figure (2.30)) que les discontinuités du fantôme initial sont nettement visibles dans la reconstruction obtenue, et que la ressemblance avec l'image initiale est forte (et l'amplitude des sauts n'est pas loin d'être conservée, comme on peut le voir sur la dernière ligne, où on a tracé la section centrale horizontale du fantôme -en pointillés- et celle de la reconstruction obtenue).

Se posent alors des questions : la méthode *naïve* de reconstruction par rétroprojection filtrée est-elle pour toutes les images une méthode locale satisfaisante ? Si oui, comment le prouver ? Si non, comment construire des contre-exemples ? ... Il s'avère, après moult tentatives, que la construction de fantômes mettant clairement en défaut la méthode de réroprojection filtrée n'est pas une tâche aisée. Nous proposons finalement le fantôme suivant, dans lequel nous avons placé d'une part une structure extérieure à la région d'intérêt, modifiant notablement les projections intérieures quand on calcule la transformée de Radon, et d'autre part deux structures identiques et peu contrastées dans la région d'intérêt ; ce fantôme est présenté en figure (2.31) (même disposition que dans la figure (2.30)). On peut alors constater que les deux structures ne sont pas reconstruites de la même manière dans la région d'intérêt : la méthode de rétroprojection filtrée ne fournit donc pas en toute circonstance des résultats aussi satisfaisants que sur le fantôme de Shepp et Logan, mais néanmoins, dans la plupart des cas que nous avons testés, elle

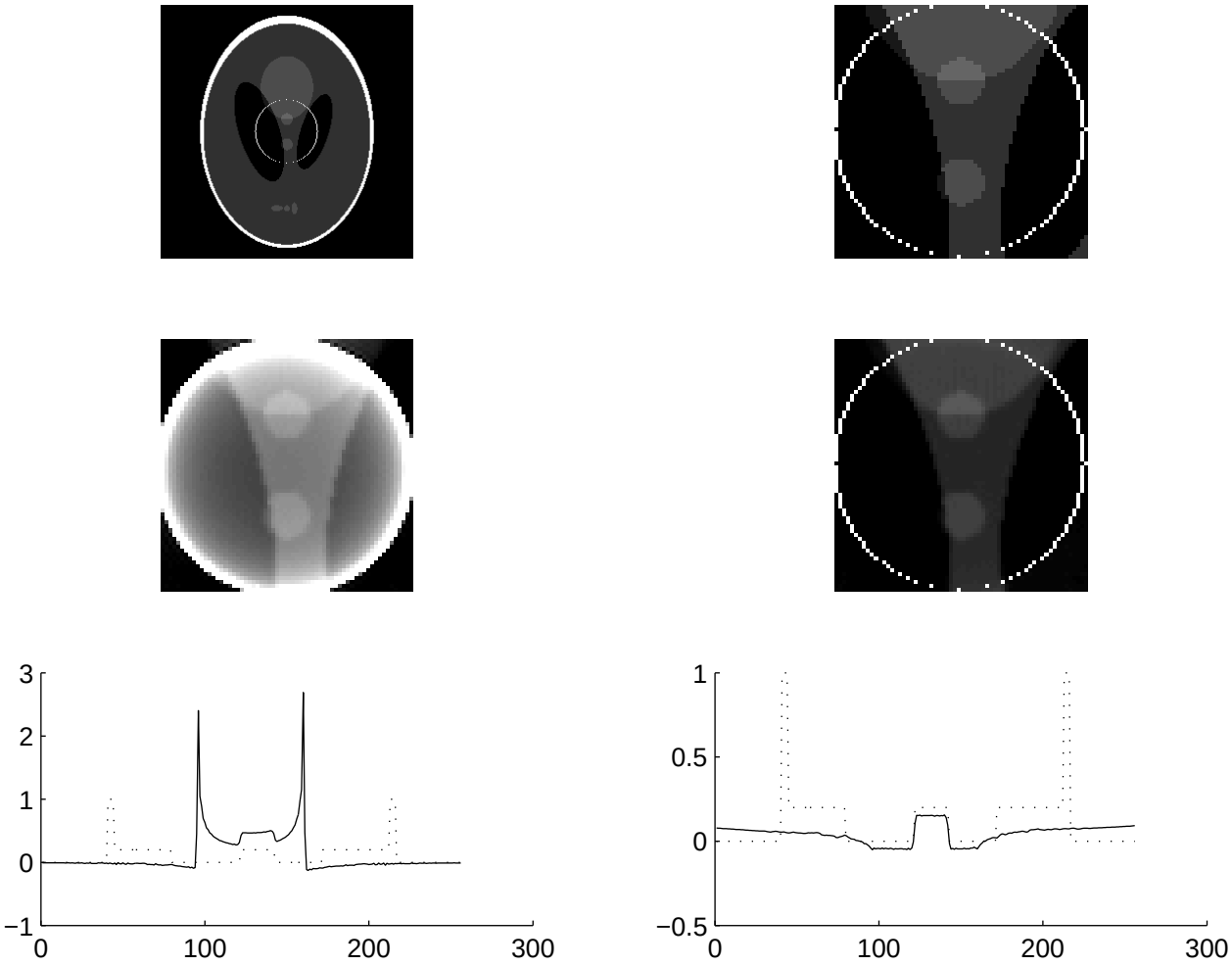


FIG. 2.30 – Résultats de l'algorithme de rétroprojection filtrée appliqué à des données locales : en haut le fantôme de Shepp et Logan, avec un zoom sur la région d'intérêt. Sur la deuxième ligne, à gauche, la reconstruction obtenue en appliquant l'algorithme de rétroprojection filtrée sur le sinogramme tronqué (projections manquantes maintenues à zéro), et à droite, sur le sinogramme prolongé par continuité. Sur la dernière ligne, la section horizontale des deux reconstructions (la section du fantôme est tracée en pointillés). Dans les deux cas, les discontinuités sont bien visibles, et dans le deuxième, la reconstruction « ressemble même beaucoup » au fantôme initial.

renvoie des résultats très satifaisants : **dans la suite de ce manuscrit, ce sera notre méthode locale de référence**.

Nous ne sommes pas parvenus à définir rigoureusement des conditions dans lesquelles la méthode de rétroprojection filtrée appliquée à des données locales est satisfaisante. Cependant, nous proposons d'amorcer cette étude de la manière suivante : dans la méthode de rétroprojection filtrée appliquée naïvement à des données réduites à la région intérieure de rayon a, on reconstruit en fait la fonction f^a_{naive} définie par

$$f^a_{\text{naive}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} \Lambda^{-a,a}\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})d\theta$$

où on a noté

$$\Lambda^{-\mathrm{a},\mathrm{a}} g_\theta(s) = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-a}^{s-\epsilon}\frac{\partial_u\mathcal{R}_\theta f(u)}{s-u}du + \int_{s+\epsilon}^{a}\frac{\partial_u\mathcal{R}_\theta f(u)}{s-u}du\right]$$

Par rapport à la méthode pseudo-locale, on ne tronque donc pas le filtre rampe de manière uniforme : selon la position s dans $[-a,a]$, en laquelle on calcule $\Lambda^{-a,a}g_\theta(s)$, on utilise à gauche de s une portion de filtre de longueur $s-(-a) = s+a$ et à droite de s une portion de filtre de longueur $a-s$. On n'applique donc plus un *filtre*, au sens premier du terme, aux projections (l'opérateur n'étant pas invariant par translation).

Cependant, comme dans la méthode pseudo-locale, on peut calculer la différence entre la fonction f et la fonction reconstruite naïvement :

$$\left(f^a_{\text{naive}}\right)^C(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left[\int_{-1}^{-a}\frac{\partial_s\mathcal{R}_\theta f(s)}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-s}ds + \int_a^1\frac{\partial_s\mathcal{R}_\theta f(s)}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-s}ds\right]d\theta$$

On peut alors énoncer le résultat suivant, analogue au résultat-clé de la tomographie pseudo-locale (vu en propriété 2.4.6), et qui, à notre connaissance, ne figure pas dans la littérature.

Proposition 2.4.8 (Discontinuités et rétroprojection filtrée appliquée à des données intérieures) *Pour tout $a>0$, la fonction $\left(f^a_{\text{naive}}\right)^C$ est continue sur tout disque de la forme $\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2; |\mathbf{x}|\leq r\}$, où $r<a$.*

Par conséquent, on peut en déduire que les discontinuités de f dans l'intérieur (ouvert) de la région d'exposition sont les mêmes que les discontinuités de f^a_{naive}.

Preuve . Nous appliquons le même raisonnement que celui que nous avons mentionné en tomographie pseudo-locale (dans la preuve de la propriété (2.4.6) ; nous écrivons d'abord, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\begin{aligned}
\left(f^a_{\text{naive}}\right)^C &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\left[\frac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-s}\right]_{-1}^{-a} + \int_{-1}^{-a}\frac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-s)^2}ds + \left[\frac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-s}\right]_a^1 + \int_a^1\frac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-s)^2}ds\right)d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathcal{R}_\theta f(-a)}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}+a} - \frac{\mathcal{R}_\theta f(a)}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-a}d\theta \\
&\quad + \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-1}^{-a}\frac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-s)^2}ds + \int_a^1\frac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-s)^2}ds\right)d\theta
\end{aligned}$$

On définit alors un disque fermé D_r, de rayon r, strictement inclus dans la région d'exposition (c'est-à-dire tel que $r<a$), et on choisit un point $\mathbf{x}$ à l'intérieur de D_r. Nous allons alors vérifier les hypothèses qui permettent d'appliquer le théorème des intégrales à paramètre pour montrer que $\left(f^a_{\text{naive}}\right)^C$ est continue au point $\mathbf{x}$.

Pour la première intégrale de (2.46), on peut dire que :

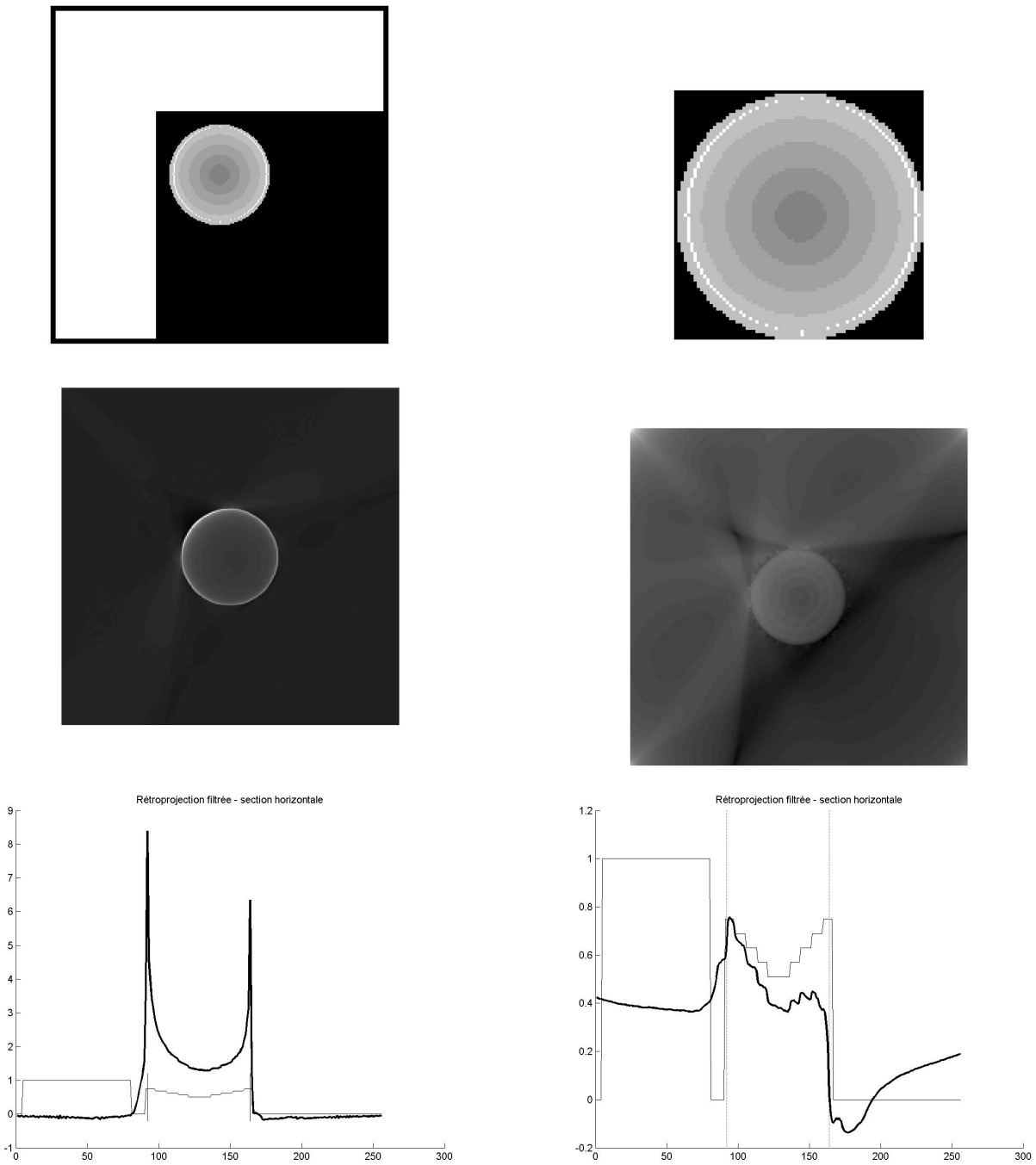


FIG. 2.31 – Résultats de l'algorithme de rétroprojection filtrée appliqué à des données locales, sur un fantôme pour lequel les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants (même disposition que dans la figure précédente : à gauche les données manquantes sont laissées à zéro, et à droite elles sont prolongées par continuité) : des structures identiques dans le fantôme initial ne sont pas reconstruites de manière similaire (en particulier les symétries par rapport aux médianes de l'image carrée sont perdues, même dans le cas où les projections sont prolongées par continuité). De plus les discontinuités de l'image initiale sont difficilement détectables sur la reconstruction.

– pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, les fonctions $\mathbf{x} \mapsto \dfrac{\mathcal{R}_\theta f(-a)}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}+a}$ et $\mathbf{x} \mapsto \dfrac{\mathcal{R}_\theta f(a)}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-a}$ sont continues sur D_r (car quelle que soit la valeur de θ, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-a$ ne s'annule alors jamais, puisque $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}| \leq |\mathbf{x}| <\leq r < a$).

– pour tout $\mathbf{x} \in D_r$, $-r < \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} < r$, donc $0 < a - r < \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} + a < a + r$, donc

$$\left|\frac{\mathcal{R}_\theta f(-a)}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}+a}\right| \leq \frac{|\mathcal{R}_\theta f(a)|}{a-r}$$

qui est une fonction (de θ), intégrable sur $[0, 2\pi]$.
On pourrait faire le même raisonnement pour $\mathbf{x} \mapsto \dfrac{\mathcal{R}_\theta f(a)}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-a}$; on en déduit que la première intégrale de (2.46) est une fonction, de $\mathbf{x}$, continue sur D_r.

Pour la deuxième intégrale de (2.46), on peut dire que :

– pour tout couple $(\theta, s) \in [0, 2\pi[\times[-1, -a]$ (resp. tout couple $(\theta, s) \in [0, 2\pi[\times[a, 1]$, la fonction $\mathbf{x} \mapsto \dfrac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-s)^2}$ est continue sur D_r (car quelles que soient les valeurs de s et θ, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s$ ne s'annule alors jamais.

– pour tout $\mathbf{x} \in D_r$, pour tout couple $(\theta, s) \in [0, 2\pi[\times[-1, -a]$, on a l'encadrement

$$0 < -r + a \leq -r - s \leq \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s \leq r - s \leq r + 1$$

et donc

$$\left|\frac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-s)^2}\right| \leq \left|\frac{\mathcal{R}_\theta f(s)}{(a-r)^2}\right|$$

qui est une fonction, de (θ, s), intégrable sur $[0, 2\pi[\times[-1, -a]$.

On pourrait faire le même raisonnement pour la troisième intégrale de (2.46). On en conclut que la somme de la deuxième et de la troisième intégrale est une fonction de $\mathbf{x}$ continue sur D_r.

■

Nous terminons ce paragraphe par un dernier calcul : le calcul explicite de $\Lambda^{-a,a}\mathcal{R}_\theta f$ dans le cas où f est une indicatrice de disque.

Exemple 2.4.3 (Calcul de $\Lambda^{-a,a}\mathcal{R}_\theta f$ dans le cas où f est une indicatrice de disque)

$$\Lambda^{-a,a} g_\theta(u) = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\mathrm{a}}^{u-\epsilon} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds + \int_{u+\epsilon}^{\mathrm{a}} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds\right]$$

Premier cas : $|u| > 1$ *Dans ce cas, il n'y a pas de singularité dans le domaine d'intégration.*

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{-a,a}\mathcal{R}_\theta f(u) &= \int_{-a}^{a} \frac{-2s}{\sqrt{1-s^2}(u-s)} ds \overset{s=\sin\theta}{=} \int_{\arcsin(-a)}^{\arcsin(a)} \frac{-2\sin\theta}{u-\sin\theta} d\theta \\
&\overset{t=\tan\frac{\theta}{2}}{=} -2\int_{-\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)} \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{u-\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int_{-\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)} \frac{-8t}{(1+t^2)(ut^2-2t+u)} dt \\
&= \int_{-\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)} \frac{4dt}{1+t^2} dt - \int_{-\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)} \frac{4u}{ut^2-2t+u} dt \\
&\qquad \textit{(le polynôme } ut^2-2t+u \textit{ est irréductible car } |u|>1\textit{)} \\
&= 4\frac{\arcsin(a)}{2} + 4\frac{\arcsin(a)}{2} - 4\int_{-\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)} \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{u}\right)^2 + \frac{u^2-1}{u^2}} \\
&\overset{v=t-\frac{1}{u}}{=} 4\arcsin(a) - 4\int_{-\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)-\frac{1}{u}}^{\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)-\frac{1}{u}} \frac{dv}{v^2+\gamma^2} \quad \left(\textit{où on a posé } \gamma = \sqrt{\frac{u^2-1}{u^2}} = \frac{\sqrt{u^2-1}}{|u|} \right) \\
&= 4\arcsin(a) - \frac{4}{\gamma}\left(\arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)-\frac{1}{u}}{\gamma} \right) - \arctan\left(-\frac{\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)-\frac{1}{u}}{\gamma} \right) \right) \\
&= 4\arcsin(a) - \frac{4}{\gamma}\arctan\left(\frac{\tan(\frac{\arcsin(a)}{2}) + \tan(\frac{\arcsin(a)}{2})}{\gamma\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\left(\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)-\frac{1}{u}\right)\left(-\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)-\frac{1}{u}\right)\right)} \right) \\
&\qquad \textit{car } \arctan x - \arctan y = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Lambda^{-a,a}\mathcal{R}_\theta f(u) \\
&= 4\arcsin(a) - \frac{4|u|}{\sqrt{u^2-1}}\arctan\left(\frac{2\tan(\frac{\arcsin(a)}{2})}{\frac{\sqrt{u^2-1}}{|u|}\left(1+\frac{u^2}{u^2-1}\left(\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)-\frac{1}{u}\right)\left(-\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)-\frac{1}{u}\right)\right)} \right) \\
&= 4\arcsin(a) - \frac{4|u|}{\sqrt{u^2-1}}\arctan\left(\frac{2\tan(\frac{\arcsin(a)}{2})}{\frac{\sqrt{u^2-1}}{|u|}\left(1+\frac{u^2}{u^2-1}\left(\frac{1}{u^2}-\tan^2\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)\right)\right)} \right) \\
&= 4\arcsin(a) - \frac{4|u|}{\sqrt{u^2-1}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{u^2-1}\tan(\frac{\arcsin(a)}{2})}{|u|\left(1-\tan^2\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)\right)} \right) \\
&= 4\arcsin(a) - \frac{4|u|}{\sqrt{u^2-1}}\arctan\left(\frac{\sqrt{u^2-1}\tan(\arcsin(a))}{|u|} \right) \ (\textit{car } \tan(2X) = \frac{2\tan X}{1-\tan^2(X)}) \\
&= 4\arcsin(a) - \frac{4|u|}{\sqrt{u^2-1}}\arctan\left(\frac{a\sqrt{u^2-1}}{|u|\sqrt{1-a^2}} \right) \longrightarrow 2\pi - \frac{2\pi|u|}{\sqrt{u^2-1}} \textit{ quand } a \to 1
\end{aligned}
$$

Deuxième cas : $u \in]-1,1[$

$$
\Lambda^{-a,a}\mathcal{R}_\theta f(u) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-a}^{u-\epsilon} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds + \int_{u+\epsilon}^{a} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds
$$

Les calculs sont alors similaires à ceux que l'on avait effectués lors du calcul du résultat de l'application du fitre rampe aux projections du disque unité (vu dans l'exemple 2.2.2). Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$ (choisi suffisamment petit pour que $]u-\epsilon, u+\epsilon[\subset]-1,1[$), on a

$$\begin{aligned}
&\int_{-a}^{u-\epsilon} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds + \int_{u+\epsilon}^{a} \frac{\partial_s \mathcal{R}_\theta f(s)}{u-s} ds \\
= \; & -2 \int_{\tan\left(\frac{\arcsin(-a)}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{\arcsin(u-\epsilon)}{2}\right)} \frac{4t}{(1+t^2)(ut^2-2t+u)} dt - 2 \int_{\tan\left(\frac{\arcsin(u+\epsilon)}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right)} \frac{4t}{(1+t^2)(ut^2-2t+u)} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \; & 4\arcsin a \\
& -\frac{2u}{\sqrt{1-u^2}} \left(\ln \left| \frac{\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right) - r_1(u)}{\tan\left(\frac{\arcsin(-a)}{2}\right) - r_1(u)} \right| - \ln \left| \frac{\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right) - r_2(u)}{\tan\left(\frac{\arcsin(a')}{2}\right) - r_2(u)} \right| - \ln \left| \frac{\beta(u,\epsilon) - r_2(u)}{\alpha(u,\epsilon) - r_2(u)} \right| \right)
\end{aligned}$$

où on a adopté les mêmes notations que dans l'exemple (2.2.2).

D'après l'expression (2.14), quand ϵ tend vers zéro,

$$\frac{\beta(u,\epsilon) - r_2(u)}{r_2(u) - \alpha(u,\epsilon)} = 1 + \mathrm{o}(1) \text{ et donc } \ln \left| \frac{\beta(u,\epsilon) - r_2(u)}{\alpha(u,\epsilon) - r_2(u)} \right| \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

et donc, suivant les mêmes étapes que dans l'exemple (2.2.2), on a

$$\begin{aligned}
& \Lambda^{-a,a} \mathcal{R}_\theta f(u) = 4\arcsin a - \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}} \left(\ln \left| \frac{\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right) - r_1(u)}{\tan\left(\frac{\arcsin(-a)}{2}\right) - r_1(u)} \right| - \ln \left| \frac{\tan\left(\frac{\arcsin(a)}{2}\right) - r_2(u)}{\tan\left(\frac{\arcsin(-a)}{2}\right) - r_2(u)} \right| \right) \\
= \; & \left(4\arcsin a - \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}} \left(\ln \left| \frac{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a} - \frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}}{\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a} - \frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}} \right| - \ln \left| \frac{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a} - \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u}}{\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a} - \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u}} \right| \right) \right) \\
= \; & (4\arcsin a \\
& -\frac{2u}{\sqrt{1-u^2}} \left(\ln \left| \frac{(u - u\sqrt{1-a^2} - a - a\sqrt{1-u^2})(u - u\sqrt{1-a^2} + a - a\sqrt{1-u^2})}{(u - u\sqrt{1-a^2} + a + a\sqrt{1-u^2})(u - u\sqrt{1-a^2} - a + a\sqrt{1-u^2})} \right| \right) \Bigg) \\
= \; & 4\arcsin a - \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}} \ln \left(\left| \frac{2ua\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-a^2} - 2a^2u^2 + a^2 + u^2}{u^2 - a^2} \right| \right) \\
& \longrightarrow 2\pi \text{ quand } a \to 1
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall a \in]0,1[, \; \Lambda^{-a,a} \mathcal{R}_\theta f(u) = \begin{cases} 4\arcsin a - \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}} \ln \left(\left| \frac{2ua\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-a^2} - 2a^2u^2 + a^2 + u^2}{u^2 - a^2} \right| \right) & \text{si} \quad |u| < 1 \\ 4\arcsin(a) - \frac{4|u|}{\sqrt{u^2-1}} \arctan\left(\frac{a\sqrt{u^2-1}}{|u|\sqrt{1-a^2}} \right) & \text{si} \quad |u| > 1 \end{cases} \tag{2.46}$$

Les courbes représentatives des fonctions $\Lambda^{-a,a} \mathcal{R}_\theta f$, pour différentes valeurs de a (rayon de la région d'exposition) sont présentées en figure (2.4.3).

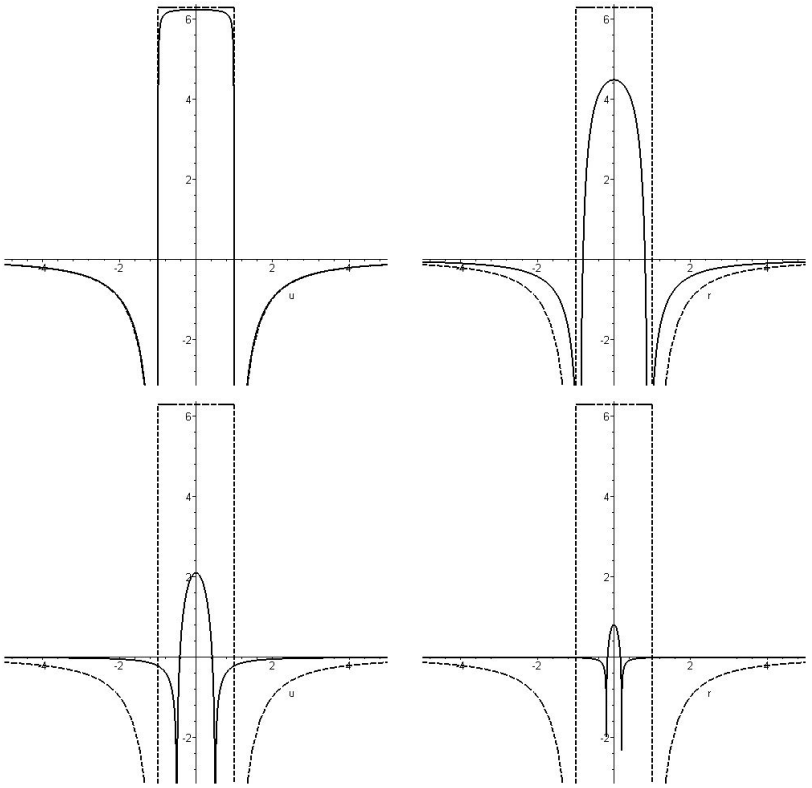


FIG. 2.32 – Le résultat de l'action de l'opérateur $\Lambda^{-a,a}$ sur les projections du disque unité, dans la rétroprojection filtrée appliquée naïvement à des données tronquées ; de gauche à droite, puis de haut en bas, le rayon de la région d'exposition est $a = 0.9999$ (on prend en compte "presque" toutes les données), $a = 0.9$, $a = 0.5$, et $a = 0.2$ à titre de comparaison, on a indiqué en pointillés les projections après filtrage par le filtre rampe complet.

Chapitre 3

Représentations multiéchelles de la transformée de Radon

Le but de ce chapitre est de recenser les travaux existants dans la littérature dans lesquels des liens sont établis entre les décompositions multiéchelles des fonctions définies sur $\mathbf{R}^2$ et leur transformée de Radon. Nous expliquons qu'à notre sens, on peut distinguer *a priori* deux approches : une approche dans laquelle la formule de base est explicitement la formule de rétroprojection filtrée et où l'on s'appuie sur des décompositions 1D de chacune des projections, et une deuxième qui repose principalement sur la transformée en ondelettes-vaguelettes, et dans laquelle on met en évidence des décompositions 2D de la transformée de Radon (c'est-à-dire prenant en compte simultanément les variables θ et s).
Avant d'exposer ces deux approches et les liens que l'on peut faire apparaître entre elles (en dernière partie de ce chapitre), nous commençons par rappeler les principales définitions et propriétés des décompositions en ondelettes qui interviendront dans la suite.

3.1 La transformée en ondelettes

3.1.1 Transformée en ondelettes continue

On s'appuie ici sur les ouvrages de J.P. Antoine *et al.* [2], B. Torrésani [102], et S. Mallat [68].

3.1.1.1 En dimension 1

On appelle *ondelette* une fonction ψ appartenant à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}) \cap \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$,vérifiant la condition dite *d'admissibilité*

$$0 < C_\psi = 2\pi \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty \tag{3.1}$$

A partir d'une ondelette ψ fixée, appelée alors *ondelette mère*, on peut, par dilatations et translations, engendrer la famille de fonctions $(\psi_{a,b})_{a\in\mathbf{R}_+^*,b\in\mathbf{R}}$ définies par

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Pour $a > 0$ et $b \in \mathbf{R}$ fixés, la fonction $\psi_{a,b}$ est aussi une ondelette, normalisée de telle sorte que $\|\psi_{a,b}\| = \|\psi\|$, et dont on dira qu'elle est localisée autour du point b, sur un domaine de taille proportionnelle au paramètre a, appelé *échelle*.

Ainsi construite, une famille d'ondelettes $(\psi_{a,b})$ permet de décomposer un signal $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ sous la forme d'une famille de produits scalaires appelés *coefficients d'ondelettes* :

$$\forall (a,b) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R},\ \mathrm{W}^\psi f(a,b) = <\psi_{a,b}, f> = \int_{t\in\mathbf{R}} f(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{t\in\mathbf{R}} f(t)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}dt = f * \overline{(\psi_a)_\sigma}(b)$$

où on a noté ψ_a la fonction dilatée de ψ, définie par

$$\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t}{a}\right)$$

et où, pour toute fonction f, la notation f_σ désigne la fonction définie par $f_\sigma(t) = f(-t)$. Remarquons que comme f appartient à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ et ψ appartient à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}) \cap \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, la convolution $f * \psi_a$ est bien définie, et est une fonction appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ [45].

Pour $a > 0$ et $b \in \mathbf{R}$ fixés, le coefficient $< f, \psi_{a,b} >$ caractérise le comportement du signal f au voisinage du point b, à l'échelle a. On dit que le calcul de la famille de coefficients d'ondelettes $\left(\mathrm{W}^\psi f(a,b)\right)_{a,b}$ d'un signal est une *analyse* du signal.

En outre, sous la condition (3.1), les coefficients d'ondelettes d'un signal fournissent une *représentation stable* de la fonction f, au sens où l'*énergie* du signal est égale à l'énergie de l'ensemble des coefficients, et où l'on dispose de la formule d'inversion énoncée dans la proposition suivante, permettant de reconstruire un signal à partir de ses coefficients.

Proposition 3.1.1 (Stabilité et inversion de la transformée en ondelettes continue 1D [68, 2])
Soit $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, à valeurs dans $\mathbf{R}$.

- **Formule de conservation d'énergie :**
  Soit ψ une ondelette vérifiant la condition d'admissibilité

$$0 < C_\psi = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{\left|\hat{\psi}(\lambda)\right|^2}{\lambda} d\lambda < +\infty$$

  alors :
  - *si ψ est une ondelette à valeurs dans $\mathbf{R}$ (ondelette* réelle*),*

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{C_\psi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{W}^\psi f(a,b)\right|^2 db\frac{da}{a^2}$$

  - *si ψ est une ondelette analytique (à valeurs complexes, telle que $\hat{\psi}(\omega) = 0$ pour $\omega < 0$),*

$$\|f\|_2^2 = \frac{2}{C_\psi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{W}^\psi f(a,b)\right|^2 db\frac{da}{a^2}$$

- **Formule de reconstruction :**
  Si ψ et ϕ sont deux ondelettes vérifiant la condition d'admissibilité croisée

$$C_{\psi,\phi} = 2\pi \int_0^{+\infty} \overline{\widehat{\psi}(\lambda)}\widehat{\phi}(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} \neq 0,\ < \infty$$

  alors,
  - *si ϕ et ψ sont toutes les deux réelles,*

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi,\phi}}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{W}^\psi f(a,b)\phi_{a,b}(t)db\frac{da}{a^2}$$

– *si au moins l'une des deux ondelettes ϕ ou ψ est analytique, alors*

$$f(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{2}{C_{\psi,\phi}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{W}^{\psi} f(a,b) \phi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2}\right)$$

Preuve . On s'appuie dans cette preuve sur l'égalité mentionnée plus haut :

$$\mathrm{W}^{\psi} f(a,b) =< \psi_{a,b}, f >= f * \overline{(\psi_a)_\sigma}(b)$$

Conservation de l'énergie :
La formule de conservation de l'énergie peut s'obtenir dans le cas réel de la manière suivante (on est conduit à appliquer le théorème de Fubini pour modifier l'ordre des intégrales ; c'est légitime car les fonctions que l'on manipule dans les calculs ci-dessous sont positives) :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathrm{W}^{\psi} f(a,b)\right|^2 db \frac{da}{a^2} = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f * \overline{(\psi_a)_\sigma}(b)\right|^2 db \frac{da}{a^2} \\
= &\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathcal{F}\left(f * \overline{(\psi_a)_\sigma}\right)(\omega)\right|^2 d\omega \frac{da}{a^2} \text{ (d'après la propriété (A.0.5))} \\
= &\ 2\pi \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \left|\widehat{\overline{(\psi_a)_\sigma}}(\omega)\right|^2 d\omega \frac{da}{a^2} \text{ (d'après la propriété (A.0.4))} \\
= &\ 2\pi \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \left|\overline{\widehat{\psi_a}(\omega)}\right|^2 d\omega \frac{da}{a^2} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \left(\int_0^{+\infty} \left|\widehat{\psi_a}(\omega)\right|^2 \frac{da}{a^2}\right) d\omega \\
= &\ 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \left(\int_0^{+\infty} a \left|\hat{\psi}(a\omega)\right|^2 \frac{da}{a^2}\right) d\omega \text{ (d'après la propriété (A.0.2))}
\end{aligned}$$

Si ω est strictement positif, alors

$$\int_0^{+\infty} \left|\hat{\psi}(a\omega)\right|^2 \frac{da}{a} = \int_0^{+\infty} \left|\hat{\psi}(\lambda)\right|^2 \frac{\omega d\lambda}{\omega\lambda} = \int_0^{+\infty} \left|\hat{\psi}(\lambda)\right|^2 \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{3.2}$$

Si ω est strictement négatif,

$$\int_0^{+\infty} \left|\hat{\psi}(a\omega)\right|^2 \frac{da}{a} = -\int_{-\infty}^{0} \left|\hat{\psi}(\lambda)\right|^2 \frac{d\lambda}{\lambda} = \int_0^{+\infty} \left|\hat{\psi}(-\mu)\right|^2 \frac{d\mu}{\mu} \tag{3.3}$$

On distingue alors deux cas, selon la nature de ψ :

Si ψ est une ondelette réelle :
Dans ce cas, le module de sa transformée de Fourier est une fonction paire, et on obtient alors la même valeur pour $\int_0^{+\infty} \left|\hat{\psi}(a\omega)\right|^2 \frac{da}{a}$ quel que soit le signe de ω :

$$\int_0^{+\infty} \left|\hat{\psi}(a\omega)\right|^2 \frac{da}{a} = \int_0^{+\infty} \left|\hat{\psi}(\lambda)\right|^2 \frac{d\lambda}{\lambda}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathrm{W}^{\psi} f(a,b)\right|^2 db \frac{da}{a^2} &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \left(\int_0^{+\infty} \left|\hat{\psi}(\lambda)\right|^2 \frac{d\lambda}{\lambda}\right) d\omega \\
&= 2\pi \left(\int_0^{+\infty} \left|\hat{\psi}(\lambda)\right|^2 \frac{d\lambda}{\lambda}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = C_\psi \|f\|_2^2
\end{aligned}$$

où on a posé

$$C_\psi = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{\left|\hat{\psi}(\lambda)\right|^2}{\lambda} d\lambda$$

La formule de conservation de l'énergie dans le cas réel est ainsi formellement établie.

Si ψ est une ondelette complexe :

Les valeurs obtenues en (3.2) et (3.3) n'ont aucune raison d'être égales. On peut cependant établir facilement une formule de conservation de l'énergie, dans un cas particulier (qui s'applique par exemple aux ondelettes de Morlet que nous présenterons plus loin) : le cas où ψ est une ondelette analytique, c'est-à-dire telle que $\hat{\psi}(\omega) = 0$ pour $\omega < 0$.

Dans ce cas, on réécrit les calculs précédents en les appliquant non plus à f, mais à sa partie analytique f_{anal}, définie dans le domaine de Fourier par :

$$\widehat{f_{\text{anal}}}(\omega) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2\hat{f}(\omega) & \text{si} & \omega > 0 \\ 0 & \text{si} & \omega < 0 \end{array} \right.$$

de telle sorte que $f = \text{Re}\,(f_{\text{anal}})$; en effet

$$\begin{aligned} \text{Re}\,(f_{\text{anal}}) &= \frac{\mathcal{F}\left(\{_{\text{anal}} + \overline{\{_{\text{anal}}}\right)(\omega)}{2} = \frac{\widehat{f_{\text{anal}}}(\omega) + \widehat{\overline{f_{\text{anal}}}}(\omega)}{2} = \frac{\widehat{f_{\text{anal}}}(\omega) + \overline{\widehat{f_{\text{anal}}}(-\omega)}}{2} \\ &= \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{2\hat{f}(\omega) + 0}{2} & \text{si} & \omega > 0 \\ \dfrac{0 + 2\hat{f}(-\omega)}{2} & \text{si} & \omega < 0 \end{array} \right\} = \hat{f}(\omega), \text{ quel que soit le signe de } \omega, \text{ car } f \text{ est réelle.} \end{aligned}$$

et donc $f = \text{Re}\,(f_{\text{anal}})$.

On obtient donc successivement :

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\text{W}^\psi f_{\text{anal}}(a,b)\right|^2 db \frac{da}{a^2} = 2\pi \int_0^{+\infty} |\widehat{f_{\text{anal}}}(\omega)|^2 \left(\int_0^{+\infty} a \left|\hat{\psi}(a\omega)\right|^2 \frac{da}{a^2} \right) d\omega \quad (3.4)$$

(on peut réduire le domaine d'intégration, f_{anal} ayant été construite dans ce but)

avec, pour $\omega > 0$,

$$2\pi \int_0^{+\infty} a \left|\hat{\psi}(a\omega)\right|^2 \frac{da}{a^2} = 2\pi \int_0^{+\infty} \left|\hat{\psi}(\lambda)\right|^2 \frac{d\lambda}{\lambda} = C_\psi$$

Comme par ailleurs

$$\begin{aligned} \forall \omega,\ \widehat{\text{W}^\psi f(a,.)}(\omega) &= \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\overline{\widehat{\psi_a}(\omega)} = \left\{ \begin{array}{cc} \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\overline{\widehat{\psi_a}(\omega)} & \text{si } \omega > 0 \\ 0 & \text{sinon, car } \psi \text{ est analytique} \end{array} \right. \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\hat{f}_{\text{anal}}(\omega)\overline{\widehat{\psi_a}(\omega)} = \frac{1}{2}\widehat{\text{W}^\psi f_{\text{anal}}(a,.)}(\omega) \end{aligned}$$

on a

$$\text{W}^\psi f(a,b) = \frac{1}{2}\text{W}^\psi f_{\text{anal}}(a,b)$$

et donc, reprenant (3.4), et la relation $\widehat{f_{\text{anal}}}(\omega) = 2\hat{f}(\omega)$ pour $\omega > 0$, on a

$$4 \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\text{W}^\psi f(a,b)\right|^2 db \frac{da}{a^2} = 4C_\psi \int_0^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

soit, comme $|\hat{f}|$ est paire (car f est réelle),

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{W}^{\psi}f(a,b)\right|^2 db\frac{da}{a^2} = 2C_{\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2C_{\psi}\|\hat{f}\|_2^2$$

Formule de reconstruction :
On introduit la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par

$$h(t) = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{W}^{\psi}f(a,b)\phi_{a,b}(t)db\frac{da}{a^2}$$

En remarquant que

$$h(t) = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f * \overline{(\psi_a)_\sigma(b)}\right)\phi_a(t-b)db\frac{da}{a^2} = \int_0^{+\infty}\left(f * \overline{(\psi_a)_\sigma} * \phi_a\right)(t)\frac{da}{a^2}$$

on peut exprimer la transformée de Fourier de h selon

$$\begin{aligned}\hat{h}(\omega) &= \int_0^{+\infty}\left(f * \widehat{\overline{(\psi_a)_\sigma}} * \phi_a\right)(\omega)\frac{da}{a^2} = \sqrt{2\pi}^2\int_0^{+\infty}\hat{f}(\omega)\widehat{\overline{(\psi_a)_\sigma}}(\omega)\widehat{\phi_a}(\omega)\frac{da}{a^2}\\ &= 2\pi\int_0^{+\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\widehat{\psi_a}(\omega)}\widehat{\phi_a}(\omega)\frac{da}{a^2} = 2\pi\hat{f}(\omega)\int_0^{+\infty}a\overline{\widehat{\psi}(a\omega)}\widehat{\phi}(a\omega)\frac{da}{a^2} \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Dans le cas où ψ et ϕ sont réelles : on a, quel que soit le signe de ω,

$$\int_0^{+\infty}a\overline{\widehat{\psi}(a\omega)}\widehat{\phi}(a\omega)\frac{da}{a^2} = \int_0^{+\infty}\overline{\widehat{\psi}(\lambda)}\widehat{\phi}(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2\pi}C_{\psi,\phi}$$

et on en déduit que

$$\forall\omega,\ \hat{h}(\omega) = C_{\psi,\phi}\hat{f}(\omega)$$

Par transformée de Fourier inverse, on obtient donc

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}}h(t) = \frac{1}{C_{\psi}}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{R}^2}\mathrm{W}^{\psi}f(a,b)\phi_{a,b}(t)db\frac{da}{a^2}$$

Dans le cas où au moins ϕ ou ψ est analytique : reprenant (3.5), on a

$$\begin{aligned}\forall\omega,\hat{h}(\omega) &= 2\pi\hat{f}(\omega)\int_0^{+\infty}a\overline{\widehat{\psi}(a\omega)}\widehat{\phi}(a\omega)\frac{da}{a^2} = \begin{cases}\pi\widehat{f_{\mathrm{anal}}}(\omega)\displaystyle\int_0^{+\infty}a\overline{\widehat{\psi}(a\omega)}\widehat{\phi}(a\omega)\frac{da}{a^2} & \text{si } \omega > 0\\ 0 \ \text{ si } \omega < 0, \text{ car } \phi \text{ ou } \psi \text{ est analytique}\end{cases}\\ &= \begin{cases}\widehat{f_{\mathrm{anal}}}(\omega)\frac{C_{\psi,\phi}}{2} & \text{si } \omega > 0\\ 0 & \text{si } \omega < 0\end{cases}\\ &= \frac{C_{\psi,\phi}}{2}\widehat{f_{\mathrm{anal}}}(\omega), \quad \text{quel que soit le signe de } \omega, \text{ puisque si } \omega < 0 \text{ alors } \widehat{f_{\mathrm{anal}}}(\omega) = 0\end{aligned}$$

et donc

$$h(t) = \frac{C_{\psi,\phi}}{2}f_{\mathrm{anal}}(t)$$

soit

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathrm{Re}\left(f_{\mathrm{anal}}(t)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2}{C_{\psi,\phi}}h(t)\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{2}{C_{\psi,\phi}}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{W}^{\psi}f(a,b)\phi_{a,b}(t)db\frac{da}{a^2}\right)\end{aligned}$$

Les calculs qui viennent d'être présentés sont valides quand les fonctions f, $\hat{f}$, ψ, $\hat{\psi}$, ϕ et $\hat{\phi}$ qui, par hypothèse appartiennent à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, appartiennent également à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R})$. On peut dans un second temps prolonger la validité de la formule de reconstruction à l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, en utilisant la densité de $\mathbf{L}^1 \cap \text{Ł}^2(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$.

■

3.1.1.2 En dimension 2 : transformée en ondelettes directionnelle

On appelle ondelette admissible sur $\mathbf{R}^2$ une fonction Ψ vérifiant la condition d'admissibilité

$$0 < C_\Psi = 4\pi^2 \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\left|\widehat{\Psi}(\mathbf{k})\right|^2}{|\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k} < +\infty \tag{3.6}$$

Comme en dimension 1, mais en ajoutant un paramètre supplémentaire de rotation, on peut engendrer la famille d'ondelettes $(\Psi_{a,\mathbf{b},\theta})_{a\in\mathbf{R}_+^*,\mathbf{b}\in\mathbf{R}^2,\theta\in[0,2\pi[}$définies par

$$\Psi_{a,\theta,\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{a}\Psi\left(\frac{\mathrm{r}_{-\theta}\left(\mathbf{x}-\mathbf{b}\right)}{a}\right)$$

où, pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, $\mathrm{r}_{-\theta}$ désigne la rotation d'angle $-\theta$ sur $\mathbf{R}^2$:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2,\ \mathrm{r}_{-\theta}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

On définit alors, comme en dimension 1, les coefficients d'ondelettes d'un signal $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ par rapport à la famille $(\Psi_{a,\mathbf{b},\theta})_{a,\mathbf{b},\theta}$ par

$$\begin{aligned} \forall (a,\mathbf{b},\theta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^2 \times [0,2\pi[,\ \mathrm{W}^\Psi f(a,\mathbf{b},\theta) &= <\Psi_{a,\mathbf{b},\theta}, f> = \int_{\mathbf{R}^2} f(\mathbf{x})\overline{\Psi_{a,\mathbf{b},\theta}(\mathbf{x})}d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{a}\int_{\mathbf{R}^2} f(\mathbf{x})\overline{\Psi\left(\frac{r_{-\theta}\left(\mathbf{x}-\mathbf{b}\right)}{a}\right)}d\mathbf{x} = f * \overline{(\Psi_{a,\theta})_\sigma}(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

où on a noté $\Psi_{a,\theta}$ la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$

$$\Psi_{a,\theta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{a}\Psi\left(\frac{\mathrm{r}_{-\theta}\left(\mathbf{x}-\mathbf{b}\right)}{a}\right)$$

Comme en dimension 1, la transformée en ondelettes directionnelle d'un signal fournit une représentation stable de ce signal. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 3.1.2 (Stabilité et inversion de la T. en ondelettes continue directionnelle 2D[2])
Soit $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$, à valeurs dans $\mathbf{R}^2$.

- **Formule de conservation d'énergie :**
  Si Ψ vérifie la condition d'admissibilité

$$0 < C_\Psi = 4\pi^2 \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\left|\widehat{\Psi}(\mathbf{k})\right|^2}{|\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k} < +\infty$$

  alors

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{C_\Psi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} \left|\mathrm{W}^\Psi f(a,b,\theta)\right|^2 d\mathbf{b}d\theta\frac{da}{a^3}$$

– **Formule de reconstruction :**
Si Ψ et Φ vérifient la condition d'admissibilité croisée

$$C_{\Psi,\Phi} = 4\pi^2 \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\overline{\hat{\Psi}(\mathbf{u})}\hat{\Phi}(\mathbf{u})}{|\mathbf{u}|^2} d\mathbf{u}$$

alors

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{C_{\Psi,\Phi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \mathrm{W}^{\Psi} f(a,b,\theta) \Phi_{a,\theta,\mathbf{b}}(\mathbf{x}) d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3}$$

Preuve . Formule de conservation de l'énergie : en suivant les mêmes étapes de calcul que dans le cas unidimensionnel (en appliquant ici aussi le théorème de Fubini, puisque les fonctions sont positives), on a successivement

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} |< \Psi_{a,\theta,\mathbf{b}}, f >|^2 \, d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3} = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \left| f * \overline{(\Psi_{a,\theta})_\sigma}(\mathbf{b}) \right|^2 d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3} \\
= \;& 4\pi^2 \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 \left| \widehat{\overline{\Psi_{a,\theta}(\mathbf{k})}} \right|^2 d\mathbf{k} d\theta \frac{da}{a^3} = 4\pi^2 \int_{\mathbf{R}^2} |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 \left(\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left| \widehat{\Psi_{a,\theta}}(\mathbf{k}) \right|^2 d\theta \frac{da}{a^3} \right) d\mathbf{k} \\
= \;& 4\pi^2 \int_{\mathbf{R}^2} |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 \left(\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left| \hat{\Psi}\left(a \mathrm{r}_{-\theta} \mathbf{k}\right) \right|^2 d\theta \frac{da}{a} \right) d\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Or, pour $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^2$ fixé,

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left| \hat{\Psi}(a \mathrm{r}_{-\theta} \mathbf{k}) \right|^2 d\theta \frac{da}{a} = \int_{\mathbf{R}^2} \left| \hat{\Psi}(\mathbf{u}) \right|^2 \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{u}|} \frac{d\mathbf{u}}{\mathrm{J}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u})}$$

où on a noté $\mathrm{J}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u})$ le jacobien du changement de variables

$$\mathbf{u} = a \mathrm{r}_{-\theta} \mathbf{k} = \left| \begin{array}{l} a(\cos\theta k_1 + \sin\theta k_2) \\ a(-\sin\theta k_1 + \cos\theta k_2) \end{array} \right.$$

que l'on calcule ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) &= \left| \begin{pmatrix} \cos\theta k_1 + \sin\theta k_2 & a(-\sin\theta k_1 + \cos\theta k_2) \\ -\sin\theta k_1 + \cos\theta k_2 & a(-\cos\theta k_1 - \sin\theta k_2) \end{pmatrix} \right| && (3.7) \\
&= \left| a(-\cos^2\theta k_1^2 - \sin^2\theta k_2^2 - \sin^2\theta k_1^2 - \cos^2\theta k_2^2) \right| && (3.8) \\
&= a|\mathbf{k}|^2 = \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{k}|} |\mathbf{k}|^2 = |\mathbf{u}||\mathbf{k}| && (3.9)
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient donc

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} |< \Psi_{a,\theta,\mathbf{b}}, f >|^2 \, d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3} = 4\pi^2 \int_{\mathbf{R}^2} |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 \left(\int_{\mathbf{R}^2} \left| \hat{\Psi}(\mathbf{u}) \right|^2 \frac{d\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \right) d\mathbf{k} = C_\Psi \|f\|_2^2$$

où on a posé

$$C_\Psi = 4\pi^2 \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\left| \hat{\Psi}(\mathbf{u}) \right|^2}{|\mathbf{u}|^2} d\mathbf{u}$$

Formule de reconstruction : on introduit la fonction h définie par

$$h(\mathbf{x}) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} < f, \Psi_{a,\theta,\mathbf{b}} > \Phi_{a,\theta,\mathbf{b}}(\mathbf{x}) d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3}$$

En suivant ici aussi les mêmes étapes de calcul que dans le cas unidimensionnel, on aboutit dans un premier temps à

$$h(\mathbf{x}) = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(f * \overline{(\Psi_{a,\theta})_\sigma} * \Phi_{a,\theta}\right)(\mathbf{x})d\theta\frac{da}{a^3}$$

puis on calcule la transformée de Fourier de la fonction h :

$$\begin{aligned}\hat{h}(\mathbf{k}) &= (2\pi)^2\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\hat{f}(\mathbf{k})\widehat{\overline{(\Psi_{a,\theta})_\sigma}}(\mathbf{k})\widehat{\Phi_{a,\theta}}(\mathbf{k})\frac{da}{a^3} = 4\pi^2\hat{f}(\mathbf{k})\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\overline{\widehat{\Psi_{a,\theta}}(\mathbf{k})}\widehat{\Phi_{a,\theta}}(\mathbf{k})d\theta\frac{da}{a^3}\\ &= 4\pi^2\hat{f}(\mathbf{k})\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\overline{\hat{\Psi}(ar_{-\theta}\mathbf{k})}\hat{\Phi}(ar_{-\theta}\mathbf{k})d\theta\frac{da}{a} = 4\pi^2\hat{f}(\mathbf{k})\int_{\mathbf{R}^2}\frac{\overline{\hat{\Psi}(\mathbf{u})}\hat{\Phi}(\mathbf{u})}{|\mathbf{u}|^2}d\mathbf{u}\\ &= C_{\Psi,\Phi}\hat{f}(\mathbf{k})\end{aligned}$$

où on a posé

$$C_{\Psi,\Phi} = 4\pi^2\int_{\mathbf{R}^2}\frac{\overline{\hat{\Psi}(\mathbf{u})}\hat{\Phi}(\mathbf{u})}{|\mathbf{u}|^2}d\mathbf{u}$$

et donc

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{C_{\Psi,\Phi}}h(\mathbf{x}) = \frac{1}{C_{\psi,\phi}}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} < f, \Psi_{a,\theta,\mathbf{b}} > \Phi_{a,\theta,\mathbf{b}}(\mathbf{x})d\mathbf{b}d\theta\frac{da}{a^3}$$

Comme en dimension 1, cette formule, obtenue par des calculs valables sur $\mathbf{L}^1\cap\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ (avec les transformées de Fourier appartenant également à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$), peut ensuite être prolongée à l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$. ■

Cas particuliers pour la transformée directionnelle :

Si on choisit la même ondelette Ψ pour l'analyse et la synthèse : alors, sous la condition d'admissibité sur Ψ garantissant la conservation de l'énergie,

$$0 < C_\Psi = \int_{\mathbf{R}^2}\frac{\left|\widehat{\Psi}(\mathbf{k})\right|^2}{|\mathbf{k}|^2}d\mathbf{k} < +\infty$$

on a la formule de reconstruction

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2 C_\Psi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\mathrm{W}^\Psi f(a,b,\theta)\Psi_{a,\theta,\mathbf{b}}(\mathbf{x})d\mathbf{b}d\theta\frac{da}{a^3}$$

Si de plus l'ondelette Ψ choisie pour l'analyse et la synthèse est radiale :, c'est-à-dire s'il existe une fonction ψ_0, définie sur $\mathbf{R}$, telle que pour toute direction $\mathbf{\Theta}$ et pour tout $r\in\mathbf{R}$: $\Psi(r\mathbf{\Theta}) = \psi_0(r)$, alors la transformée en ondelettes directionnelle d'un signal $f\in\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ se réduit à une famille de coefficients à deux paramètres, un paramètre de translation et un paramètre de dilatation :

$$\{\mathrm{W}^\Psi f(a,\mathbf{b}) =< f, \Psi_{a,\mathbf{b}} >\}_{a>0,\mathbf{b}\in\mathbf{R}^2}$$

avec

$$\mathrm{W}^\Psi f(a,\mathbf{b}) =< f, \Psi_{a,\mathbf{b}} >= \frac{1}{a}\int_{\mathbf{R}^2} f(\mathbf{x})\overline{\Psi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{b}}{a}\right)}d\mathbf{x}$$

Les formules d'inversion et de conservation de l'énergie sont alors simplifiées : en premier lieu, la constante d'admissibilité devient

$$\begin{aligned} C_\Psi &= 4\pi^2 \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\left|\widehat{\Psi(\mathbf{k})}\right|^2}{|\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k} = 4\pi^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\left|\widehat{\Psi(\omega\mathbf{\Theta})}\right|^2}{|\omega|^2} |\omega| d\omega d\theta \\ &= 4\pi^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\left|\widehat{\psi_0(\omega)}\right|^2}{\omega} d\omega d\theta = 4\pi^2 \times 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{\left|\widehat{\psi_0(\omega)}\right|^2}{\omega} d\omega = 4\pi^2 C_{\psi_0} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la condition d'admissibilité de l'ondelette 2D Ψ est remplie si et seulement si la fonction ψ_0 est elle-même une ondelette 1D admissible.

La formule de conservation de l'énergie peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi C_{\psi_0}} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbf{R}^2} \left|\mathrm{W}^\Psi f(a,b)\right|^2 d\mathbf{b} \frac{da}{a^3}$$

tandis que la formule de reconstruction prend la forme :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi C_{\psi_0}} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbf{R}^2} \mathrm{W}^\Psi f(a,b) \Psi_{a,\mathbf{b}}(\mathbf{x}) d\mathbf{b} \frac{da}{a^3}$$

Nous venons de présenter les transformées en ondelettes continues, en dimension 1 et 2. Comme nous l'avons vu, elles consistent à analyser une fonction avec une famille de fonctions indexée par un ensemble continu de paramètres. Ces représentations sont redondantes. Dans la suite, nous allons nous intéresser à la réduction de cette redondance, et exposer comment on peut construire des représentations à l'aide d'un ensemble "moins vaste" de fonctions de base.

La première, que nous appelerons ici *transformée en ondelettes presque continue*, consiste à échantillonner la transformée en ondelettes continue en discrétisant le paramètre d'échelle.

3.1.2 Transformée en ondelettes presque continue

3.1.2.1 Transformée en ondelettes presque continue en dimension 1

On construit un sous-ensemble de la transformée en ondelettes continue, dans lequel on discrétise le paramètre d'échelle pour ne conserver que les échelles de la forme a_0^j, $j \in \mathbf{Z}$ pour $a_0 > 0$ fixé (dans le cas particulier où $a_0 = 2$, la transformée *presque continue* s'appelle *transformée dyadique* ; elle est présentée dans [68]). Les coefficients d'ondelettes sont donc égaux à

$$W^\psi f(u, a_0^j) = a_0^{-\frac{j}{2}} \int_{t\in\mathbf{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-u}{a_0^j}\right)} dt = f * \overline{\left(\psi_{a_0^j}\right)_\sigma}(u)$$

Comme on va le voir ensuite, on peut montrer que sous certaines conditions, la stabilité et l'inversion dont on disposait avec la transformée continue sont préservées avec la transformée presque continue, qui constitue donc, au même titre que la transformée continue, une *représentation* des signaux de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$.

Proposition 3.1.1 (Stabilité et inversion de la transformée presque continue en dimension 1[68])
S'il existe deux constantes $A_\psi, B_\psi > 0$ telles que

$$\forall \omega \in \mathbf{R}^*, A_\psi \leq 2\pi \sum_{j\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(a_0^j \omega)|^2 \leq B_\psi \tag{3.10}$$

alors

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}),\ A_\psi \|f\|^2 \leq \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^j} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathrm{W}^\psi f(a_0^j, b)\right|^2 db \leq B_\psi \|f\|^2$$

S'il existe une constante $C_{\psi,\phi} > 0$ telle que l'ondelette ϕ vérifie

$$\forall \omega \in \mathbf{R}^*, 2\pi \sum_{j\in\mathbf{Z}} \overline{\widehat{\psi}(a_0^j\omega)}\widehat{\phi}(a_0^j\omega) = C_{\psi,\phi} \tag{3.11}$$

alors

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi,\phi}} \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^j} \mathrm{W}^\psi f(., a_0^j) * \phi_{a_0^j}(t)$$

Preuve . Pour la formule relative à la stabilité, avec les mêmes calculs que pour la transformée en ondelettes continue, on a l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathrm{W}^\psi f(a_0^j, b)\right|^2 db = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \left|a_0^{\frac{j}{2}} \hat{\psi}(a_0^j\omega)\right|^2 d\omega = 2\pi a_0^j \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \left|\hat{\psi}(a_0^j\omega)\right|^2 d\omega$$

d'où l'on déduit que

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^j} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathrm{W}^\psi f(a_0^j, b)\right|^2 db = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \left(\sum_{j\in\mathbf{Z}} \left|\hat{\psi}(a_0^j\omega)\right|^2\right) d\omega$$

Par conséquent, s'il existe deux constantes $A_\psi > 0$ et $B_\psi > 0$ telles que

$$\forall \omega \in \mathbf{R}^*, A_\psi \leq 2\pi \sum_{j\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(a_0^j\omega)|^2 \leq B_\psi$$

alors la stabilité de la représentation est prouvée :

$$A_\psi \|f\|_2^2 = A_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a_0^j} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathrm{W}^\psi f(a_0^j, b)\right|^2 db \leq B_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = B_\psi \|f\|^2$$

Pour la formule de reconstruction, on introduit la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par

$$h(u) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^j} \mathrm{W}^\psi f(., a_0^j) * \phi_{a_0^j}(u) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^j} \left(f * \overline{\left(\psi_{a_0^j}\right)_\sigma} * \phi_{a_0^j}\right)(u)$$

Sa transformée de Fourier est égale, comme dans le cas continu, à

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{2\pi}{a_0^j} \hat{f}(\omega) \overline{\widehat{\psi_{a_0^j}}(\omega)} \widehat{\phi_{a_0^j}}(\omega) = 2\pi \hat{f}(\omega) \sum_{j\in\mathbf{Z}} \overline{\widehat{\psi}(a_0^j\omega)}\widehat{\phi}(a_0^j\omega)$$

Par conséquent s'il existe une constante $C_{\psi,\phi}$ telle que

$$\forall \omega \in \mathbf{R}^*, 2\pi \sum_{j\in\mathbf{Z}} \overline{\widehat{\psi}(a_0^j\omega)}\widehat{\phi}(a_0^j\omega) = C_{\psi,\phi}$$

alors

$$\hat{h}(\omega) = C_{\psi,\rho}\hat{f}(\omega) \quad \text{ et donc } \ f = \frac{1}{C_{\psi,\rho}} h$$

■

3.1.2.2 Transformée en ondelettes directionnelle presque continue en dimension 2

Comme en dimension 1, on ne conserve qu'un sous-ensemble des coefficients de la transformée en ondelettes continue, en discrétisant le paramètre d'échelle. On dispose alors du résultat suivant :

Proposition 3.1.2 (Stabilité et inversion de la transformée presque continue en dimension 2)
S'il existe deux constantes strictement positives $(A_{\mathbf{\Psi}}, B_{\mathbf{\Psi}})$ *telles que*

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbf{R}^2, A_{\mathbf{\Psi}} \leq 4\pi^2 \sum_{j\in\mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} \left|\widehat{\Psi}\left(a_0^j \mathrm{r}_{-\theta}\mathbf{k}\right)\right|^2 d\theta \leq B_{\mathbf{\Psi}} \tag{3.12}$$

alors

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2),\ A_{\mathbf{\Psi}}\|f\|_2^2 \leq \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^{2j}} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \left|\mathrm{W}^{\Psi} f(a_0^j, \mathbf{b}, \theta)\right|^2 d\mathbf{b}d\theta \leq B_{\mathbf{\Psi}}\|f\|_2^2$$

S'il existe une constante $C_{\Psi,\Phi} > 0$ *telle que*

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbf{R}^2, 4\pi^2 \sum_{j\in\mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} \overline{\widehat{\Psi}\left(a_0^j \mathrm{r}_{-\theta}\mathbf{k}\right)} \widehat{\Phi}\left(a_0^j \mathrm{r}_{-\theta}\mathbf{k}\right) d\theta = C_{\Psi,\Phi} \tag{3.13}$$

alors

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2),\ f(\mathbf{x}) = \frac{1}{C_{\Psi,\Phi}} \sum_{j\in\mathbf{Z}} \left(\frac{1}{a_0^{2j}} \int_0^{2\pi} \mathrm{W}^{\Psi} f(., a_0^j, \theta) * \Phi_{a_0^j,\theta}(\mathbf{x}) d\theta \right)$$

Preuve . Pour la formule de conservation de l'énergie, en reprenant les calculs effectués dans le cas continu, on a

$$\int_{\mathbf{R}^2} \left|\mathrm{W}^{\Psi} f(a_0^j, \mathbf{b}, \theta)\right|^2 d\mathbf{b} = 4\pi^2 a_0^{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 \left|\hat{\Psi}\left(a_0^j \mathrm{r}_{-\theta}\mathbf{k}\right)\right|^2 d\mathbf{k}$$

et donc s'il existe deux constantes strictement positives (A_Ψ, B_Ψ) telles que

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbf{R}^2, A_{\mathbf{\Psi}} \leq 4\pi^2 \sum_{j\in\mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} \left|\widehat{\Psi}\left(a_0^j \mathrm{r}_{-\theta}\mathbf{k}\right)\right|^2 d\theta \leq B_{\mathbf{\Psi}}$$

alors on obtient l'encadrement (3.12).
De la même manière, par des calculs similaires à ceux que l'on a effectués en dimension 1, on obtient la formule de reconstruction. ■

3.1.3 Repères (ou frames) d'ondelettes

Nous présentons ici très brièvement ce mode de représentation, dans lequel la famille de fonctions de base est indexé par un ensemble discret ; on pourra se référer à [102, 2, 68, 105] pour des développements. On considère une famille $(\phi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de fonctions appartenant à un espace de Hilbert H ; étant donné un élément $f \in H$, on calcule la famille de produits scalaires $(< f, \phi_\lambda >)_{\lambda\in\Lambda}$. La question est alors de savoir si l'on sait reconstruire f, de manière stable, à partir de ces valeurs.

Une réponse a été apportée avec la notion de *repères* (terminologie française, adoptée par exemple par Torrésani dans [102] ; Meyer parle de *structures obliques* dans [77], Mallat de *frames* dans [68]).

Définition 3.1.1
La famille $(\phi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est un repère (ou un frame) de H s'il existe deux constantes $A > 0$ et $B > 0$ telles que pour tout $f \in H$,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} | < f, \phi_\lambda > |^2 \leq B\|f\|^2$$

On peut montrer que l'encadrement mentionné dans la définition précédente est une condition nécessaire et suffisante pour que $U : f \in H \mapsto (< f, \phi_\lambda >)_{\lambda\in\Lambda}$ soit inversible sur son image, avec un inverse borné : le pseudo-inverse de U [68] ; pour exprimer cet inverse, on exprime l'opérateur adjoint de U, en écrivant que :

$$< U^*\mathbf{x}, f >=< \mathbf{x}, Uf >= \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{x}[\lambda]Uf[\lambda] = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{x}[\lambda] < f, \phi_\lambda > =< f, \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{x}[\lambda]\phi_\lambda >$$

d'où l'on déduit que

$$U^*\mathbf{x} = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{x}[\lambda]\phi_\lambda$$

A l'aide du pseudo-inverse de U, on peut alors trouver une formule permettant de reconstruire f à partir des coefficients $(< f, \phi_\lambda >)_{\lambda\in\Lambda}$:

$$\begin{aligned} f &= (U^*U)^{-1}(U^*U)f = (U^*U)^{-1}U^*(Uf) = (U^*U)^{-1}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} < f, \psi_\lambda > \phi_\lambda\right) \\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda} < f, \psi_\lambda > (U^*U)^{-1}\phi_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} < f, \psi_\lambda > \widetilde{\phi_\lambda} \end{aligned}$$

où on a posé pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\widetilde{\phi_\lambda} = (U^*U)^{-1}\phi_\lambda$. On peut alors montrer que la famille $(\widetilde{\phi_\lambda})_\lambda$ est également un *repère* de H, appelé *repère dual* du *repère* $(\phi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. On dispose ainsi d'une représentation stable des éléments de H. Dans les décompositions en ondelettes utilisées en tomographie que nous évoquerons plus loin, nous verrons que ce type de décomposition est par exemple celui avec lequel on construit des représentations en ridgelets ou en curvelets (avec $H = \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$).

Parmi les différentes familles de décomposition de type *repère* (ou *frame*), on distingue plusieurs cas particuliers :

- quand $A = B$ on dit que le repère est étroit : dans ce cas le repère dual est égal au repère initial ;
- quand les éléments de la famille $(\phi_\lambda)_\lambda$ sont linéairement indépendants, la famille $(\phi_\lambda)_\lambda$ est une base de Riesz ; le repère dual est alors aussi une base de Riesz, et les deux familles sont biorthogonales, c'est-à-dire que pour tout couple $(\lambda, \lambda') \in \Lambda^2$, on a $< \phi_\lambda, \widetilde{\phi_{\lambda'}} >= \delta_{\lambda,\lambda'}$;
- quand $A = B = 1$, le repère est une base orthonormée.

Dans la partie qui suit, nous allons nous arrêter sur ce dernier type de décomposition : les décompositions dans des bases orthonormées, qui sont les moins redondantes. Plus précisément nous allons rappeler comment on peut construire des bases orthonormées de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ ou $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ avec des ondelettes.

3.1.4 Analyse multirésolution et bases orthonormées d'ondelettes

3.1.4.1 Analyse multirésolution et bases orthonormées d'ondelettes en dimension 1

Une *analyse multirésolution* de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ est une suite d'espaces d'approximations de plus en plus fines des fonctions de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$. Plus précisément, on a la définition suivante, énoncée par exemple par S. Mallat ou I. Daubechies [68, 26] :

Définition 3.1.2 (Analyse multirésolution de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$)
On appelle analyse multirésolution de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ une suite $(V_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ de sous-espaces fermés de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall j \in \mathbf{Z}, V_j \subset V_{j+1}$ *(les espaces $(V_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ sont emboîtés) ;*
2. $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$;
3. $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$;
4. $\forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}), \forall j \in \mathbf{Z}, f \in V_j \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j+1}$ *(l'espace V_{j+1} a une résolution deux fois plus fine que l'espace V_j, autrement dit peut représenter des détails deux fois plus fins que ceux que l'on peut représenter dans V_j) ;*
5. $\exists \theta \in V_0 | (\theta(\cdot - n))_{n\in\mathbf{Z}}$ *est une base de Riesz de V_0 ;*

Dans ce contexte, pour j fixé, on définit *l'approximation de la fonction f à l'échelle j* comme la projection orthogonale $P_{V_j} f$ de f sur V_j, que l'on sait expliciter dans n'importe quelle base orthonormée de l'espace V_j.
Pour construire une base orthonormée de V_j à partir de la base de Riesz $(\theta(\cdot - n))_{n\in\mathbf{Z}}$ de V_0, Mallat, dans [68], explique qu'il suffit d'avoir recours à la fonction ϕ définie dans le domaine de Fourier à partir de la fonction θ par

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hat{\theta}(\omega)}{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

puis

$$\forall j, n \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \phi_{j,n}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - n)$$

Ainsi définie et normalisée, la famille $(\phi_{j,n})_n$ constitue, quel que soit j, une base orthonormée de V_j et l'approximation de f dans V_j est égale à

$$P_{V_j} f = \sum_n a_j[n] \phi_{j,n} \text{ où, pour tout } n,\ a_j[n] = < f, \phi_{j,n} >$$

La fonction ϕ, qui, à elle seule, permet donc d'engendrer l'analyse multirésolution, est appelée *fonction d'échelle* de l'analyse multirésolution.

Propriétés de la fonction d'échelle ϕ : la fonction d'échelle ϕ est une fonction de l'espace V_0 ; elle appartient donc aussi à l'espace permettant de représenter des détails plus fins V_1, et admet donc une décomposition unique dans la base orthonormée $(\phi_{1,n})_n$ de V_1 :

$$\exists! (h_n)_{n\in\mathbf{Z}} | \forall t \in \mathbf{R},\ \phi(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n \phi_{1,n}(t) = \sqrt{2} \sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n \phi(2t - n) \tag{3.14}$$

où l'on voit apparaître le filtre discret $\mathbf{h}$, défini, pour tout n, par

$$\mathbf{h}[n] = h_n = < \phi, \phi_{1,n} >$$

La relation (3.14) est appelée *équation d'échelle*. Exprimée dans le domaine de Fourier, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall \omega, \hat{\phi}(\omega) &= \sqrt{2} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \left(\frac{h_n}{\sqrt{2\pi}} \int \phi(2t - n) e^{-i\omega t} dt \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n e^{-\frac{i\omega n}{2}} \left(\int \phi(u) e^{-\frac{i\omega u}{2}} \frac{du}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int \phi(u) e^{-\frac{i\omega u}{2}} du \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n e^{-\frac{i\omega n}{2}} \right) = \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.15}$$

où on a introduit la fonction 2π-périodique m_0, appelée *fonction de transfert du filtre discret* (h_n) ; celle-ci n'est autre, à une constante près, que la *transformée de Fourier à temps discret* du filtre discret, définie par

$$\mathrm{TFTD}(\mathbf{h})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n e^{-in\omega}$$

et on a

$$\forall \omega,\ m_0(\omega) = \sqrt{\pi}\mathrm{TFTD}(\mathbf{h})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n e^{-in\omega} dt$$

La suite des coefficients $(h_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ apparus dans la décomposition suffit à caractériser, via m_0, la fonction d'échelle ϕ, puisque l'on a, en itérant (3.15),

$$\hat{\phi}(\omega) = \sqrt{2\pi} \prod_{k=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \tag{3.16}$$

(en ayant imposé la normalisation $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt = 1$, soit $\hat{\phi}(0) = \sqrt{2\pi}$).

Une autre propriété de la fonction ϕ, utile dans la suite, est la suivante : la famille $(\phi_{0,n})$ est orthonormée, et donc $\forall n \in \mathbf{Z},\ < \phi, \phi_{0,n} >= \phi * \overline{\phi_\sigma}(n) = \delta_{0,n}$. Si l'on injecte ceci dans la formule de Poisson, qui établit que, pour toute fonction f,

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} \hat{f}(\omega + 2\pi l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(k) e^{-i\omega k}$$

on obtient, pour $f = \phi * \overline{\phi_\sigma}$,

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi} \tag{3.17}$$

Cette condition peut se réécrire en une relation vérifiée par le filtre h, ou plus précisément par sa fonction de transfert : en injectant (3.15) dans (3.17), en séparant dans la relation obtenue les termes d'indices l pairs des termes d'indices l impairs, et en exploitant la périodicité de m_0, on peut montrer que l'on a alors la relation

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$$

Construction d'une base orthonormée de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$

On note W_j le supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} : $V_{j+1} = V_j \overset{\perp}{\oplus} W_j$.
Par recollement, on a

$$\overset{\perp}{\oplus} W_j = \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$$

et il suffit donc de savoir construire une base orthonormée de chacun des espaces W_j pour pouvoir disposer d'une base orthonormée de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$.
Pour construire une base orthonormée de W_j on s'appuie sur la caractérisation suivante :

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}),\ f \in W_0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \perp V_0 \\ f \in V_1 \end{array} \right.$$

Comme précédemment, la condition d'appartenance d'une fonction f à l'espace V_1 peut être traduite par l'existence d'une famille $\mathbf{f} = (f_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ telle que

$$f(x) = \sqrt{2} \sum_n f_n \phi(2x - n)$$

ou, de manière équivalente, dans le domaine de Fourier, par l'existence d'une fonction m_1 2π-périodique telle que

$$\hat{f}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.18}$$

où

$$\forall \omega,\ m_1(\omega) = \sqrt{\pi}\mathrm{TFTD}(\mathbf{f})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} f_n e^{-in\omega}dt$$

Par ailleurs, la condition d'orthogonalité à l'espace V_0 se traduit par

$$\forall n, < f, \phi_{0,n} >= f * \overline{\tilde{\phi}}(n) = 0$$

On injecte alors, comme plus haut, cette condition dans la formule de Poisson ; ceci permet d'écrire

$$\forall \omega,\ \sqrt{2\pi}\sum_{l\in\mathbf{Z}} \hat{f}(\omega + 2\pi l)\hat{\phi}(\omega + 2\pi l) = 0$$

En écrivant alors $\hat{f}$ sous la forme donnée par (3.18), en exploitant la 2π-périodicité des fonctions m_0 et m_1, et en utilisant la propriété sur ϕ établie en (3.17), on obtient finalement la condition suivante sur m_1, relative à l'appartenance de la fonction f à l'espace W_0 :

$$\forall \omega, m_1(\omega)\overline{m_0(\omega)} + m_1(\omega+\pi)\overline{m_0(\omega+\pi)} = 0$$

à laquelle on ajoute la condition suivante, similaire à celle que l'on a établie plus haut pour m_0 :

$$|m_1(\omega)|^2 + |m_1(\omega+\pi)|^2 = 1$$

Pour que ces conditions soient satisfaites, il suffit de définir m_1 de la manière suivante :

$$m_1(\omega) = e^{-i\omega}\overline{m_0(\omega+\pi)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n (-1)^n \overline{h_n} e^{i(n-1)\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_p (-1)^{1-p}\overline{h_{1-p}} e^{-ip\omega}$$

ou, autrement dit, il suffit de définir le filtre $\mathbf{f}$ associé à m_1 de la manière suivante :

$$\forall n, f_n = (-1)^{1-n}\overline{h_{1-n}}$$

On aboutit finalement au résultat suivant :

Proposition 3.1.3 (Construction d'une base orthonormée de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ à partir d'une analyse multirésolution) *A partir d'une analyse multirésolution, construite à partir d'une fonction d'échelle ϕ, ou, de manière équivalente, à partir d'un filtre discret $(h_n)_n$, dont la fonction de transfert est notée m_0, on peut construire une base orthonormée d'ondelettes de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ sous la forme $(\psi_{j,k})_{(j,k)\in\mathbf{Z}^2}$, où ψ est une ondelette définie par*

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}} g_n \phi(2x - n)$$

avec

$$\forall n \in \mathbf{Z},\ g_n = (-1)^{1-n}\overline{h_{1-n}}$$

ou, de manière équivalente, dans le domaine de Fourier, par

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

et où l'on a posé

$$\forall (j,k) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z},\ \psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t - k)$$

Les bases d'ondelettes construites à l'aide d'analyses multirésolution orthonormées présentent l'avantage d'offrir des algorithmes d'analyse et de synthèse commodes à utiliser. Nous allons rappeler comment dans ce qui suit.

Calcul des coefficients d'échelle et d'ondelettes dans une analyse multirésolution orthonormée On munit $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ d'une analyse multirésolution $(V_j)_{j\in\mathbf{Z}}$.
On considère une fonction $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, et on fixe une échelle $J \in \mathbf{Z}$, qui correspond ici à l'échelle la plus fine que l'on utilise. Pour toute échelle plus grossière $L < J$, la projection orthogonale $\mathrm{P}_{V_J} f$ de f sur V_J peut être décomposée entre son approximation dans l'espace V_L et les espaces de détail intermédiaires $(W_j)_{j=J-1..L}$, conformément à la décomposition $V_J = V_L \overset{\perp}{\oplus}_{j=L}^{J-1} W_j$:

$$f_J = \mathrm{P}_{V_J} f = \mathrm{P}_{V_L} f + \sum_{j=L}^{J-1} \mathrm{P}_{W_j} f$$

ce qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned} f_J &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} < \phi_{J,k}, f_J > \phi_{J,k} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_{J,k}\phi_{J,k} \text{ (dans } V_J) \\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} < \phi_{L,k}, f_J > \phi_{L,k} + \sum_{j=L}^{J-1}\sum_{k} < \psi_{j,k}, f_J > \psi_{j,k} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_{L,k}\phi_{L,k} + \sum_{j=L}^{J-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}} d_{j,k}\psi_{j,k} \text{ (dans } V_L \oplus_{j=L}^{J-1} W_j) \end{aligned}$$

où l'on a introduit les notations $a_{j,k}$ et $d_{j,k}$ pour désigner respectivement, pour $j \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{Z}$, le coefficient d'approximation et le coefficient de détail de f_J à l'échelle j, autour du point k.

La décomposition en ondelettes à l'échelle L du signal f_J appartenant à l'espace V_J peut donc être consignée dans le vecteur de coefficients $[\mathbf{a_L}; \mathbf{d_L}; \mathbf{d_{L+1}}; \cdots \mathbf{d_{J-1}}]$ où $\mathbf{a_L} = [a_{L,0} \cdots a_{L,2^L-1}]$, et où, pour tout $j \in \{L \cdots J-1\}$, $\mathbf{d_j} = [d_{j,0} \cdots d_{j,2^j-1}]$.

On peut passer d'une décomposition à une échelle donnée à une décomposition à une autre échelle par les relations récursives données par la proposition suivante :

Proposition 3.1.4 (Transformée en ondelettes rapide [68])
$\mathbf{x}$ étant un vecteur, on note $\tilde{\mathbf{x}}$ le vecteur défini pour tout indice n par $\tilde{\mathbf{x}}[n] = \mathbf{x}[-n]$ et $\check{\mathbf{x}}$ le vecteur défini pour tout entier p par $\check{\mathbf{x}}[2p] = \mathbf{x}[p]$ et $\check{\mathbf{x}}[2p+1] = 0$.

Analyse : *les coefficients d'approximation et de détails à l'échelle j se déduisent des coefficients d'approximation à l'échelle $j+1$ selon*

$$\mathbf{a_j}[k] = a_{j,k} = \sum_l h_{l-2k} a_{j+1,l} = \mathbf{a_{j+1}} * \tilde{\mathbf{h}}[2k] \text{ et } \mathbf{d_j}[k] = d_{j,k} = \sum_l g_{l-2k} a_{j+1,l} = \mathbf{a_{j+1}} * \tilde{\mathbf{g}}[2k]$$

Synthèse : *les coefficients d'approximation à l'échelle $j+1$ se déduisent des coefficients d'approximation et de détail à l'échelle j selon*

$$\mathbf{a_{j+1}}[k] = a_{j+1,k} = \sum_l h_{k-2l} a_{j,l} + \sum_l g_{k-2l} d_{j,l} = \check{\mathbf{a}}_\mathbf{j} * \mathbf{h}[k] + \check{\mathbf{d}}_\mathbf{j} * \mathbf{g}[k]$$

Preuve . On réécrit les décompositions des fonctions ϕ et ψ dans l'espace V_1

$$\phi(t) = \sum h_n \phi_{1,n}(t) = \sqrt{2}\sum h_n \phi(2t-n) \text{ et } \psi(t) = \sum g_n \phi_{1,n}(t) = \sqrt{2}\sum g_n \phi(2t-n)$$

Les translatées de ϕ et ψ se décomposent alors selon :

$$\begin{aligned} \phi_{0,k}(t) &= \phi(t-k) = \sqrt{2}\sum_n h_n \phi(2t-2k-n) = \sum_n h_n \phi_{1,n+2k}(t) = \sum_m h_{m-2k}\phi_{1,m} \\ \psi_{0,k}(t) &= \psi(t-k) = \sqrt{2}\sum_n g_n \phi(2t-2k-n) = \sum_n g_n \phi_{1,n+2k}(t) = \sum_m g_{m-2k}\phi_{1,m} \end{aligned}$$

ce qui permet ensuite de montrer que

$$< \phi_{0,k}, \phi_{1,l} >= h_{l-2k} \text{ et } < \psi_{0,k}, \phi_{1,l} >= g_{l-2k}$$

et donc, pour une échelle j quelconque,

$$\begin{aligned} < \phi_{j,k}, \phi_{j+1,l} > &= 2^{\frac{j}{2}} 2^{\frac{j+1}{2}} \int \phi(2^j s - k)\phi(2^{j+1}s - l)ds = 2^{j+\frac{1}{2}} 2^{-j} \int \phi(u-k)\phi(2u-l)du \\ &= \sqrt{2} \int \phi(u-k)\phi(2u-l)du =< \phi_{0,k}, \phi_{1,l} >= h_{l-2k} \end{aligned}$$

et de même

$$< \psi_{j,k}, \phi_{j+1,l} >=< \psi_{0,k}, \phi_{1,l} >= g_{l-2k}$$

On peut alors s'intéresser à l'étape d'analyse pour passer d'une approximation dans V_{j+1} à une approximation plus grossière et des détails dans V_j, pour laquelle on peut écrire :

$$\begin{aligned} a_{j,k} &= < \phi_{j,k}, f_J >=< \sum_l < \phi_{j,k}, \phi_{j+1,l} > \phi_{j+1,l}, f_J > \\ &= \sum_l < \phi_{j,k}, \phi_{j+1,l} >< \phi_{j+1,l}, f_J > = \sum_l h_{l-2k} a_{j+1,l} \\ d_{j,k} &= < \psi_{j,k}, f_J >=< \sum_l < \psi_{j,k}, \phi_{j+1,l} > \phi_{j+1,l}, f_J >= \sum_l < \psi_{j,k}, \phi_{j+1,l} >< \phi_{j+1,l}, f_J > \\ &= \sum_l g_{l-2k} a_{j+1,l} \end{aligned}$$

tandis que pour l'étape de synthèse permettant de reconstituer l'approximation dans V_{j+1} à partir de coefficients calculés dans V_j, on a

$$\phi_{j+1,k} = \sum_l < \phi_{j+1,k}, \phi_{j,l} > \phi_{j,l} + \sum_l < \phi_{j+1,k}, \psi_{j,l} > \psi_{j,l} = \sum_l h_{k-2l}\phi_{j,l} + \sum_l g_{k-2l}\psi_{j,l}$$

puis

$$a_{j+1,k} =< \phi_{j+1,k}, f_J >= \sum_l h_{k-2l} < \phi_{j,l}, f_J > + \sum_l g_{k-2l} < \psi_{j,l}, f_J > = \sum_l h_{k-2l} a_{j,l} + \sum_l g_{k-2l} d_{j,l}$$

■

Mentionnons enfin que les formules d'analyse ci-dessus ont été calculées à partir de coefficients à une échelle J décrétée arbitrairement comme étant la plus fine. En pratique, si l'on fait l'hypothèse que le signal f que l'on veut analyser est mesuré, ou connu, sur une grille de pas $\frac{1}{2^{J_0}}$, alors on considère que l'échelle la plus fine est l'échelle J_0, et on obtient une estimation des coefficients d'approximation à l'échelle J_0 de la manière suivante : en faisant une approximation de Taylor à l'ordre 0 de la fonction f analysée, on peut écrire

$$\begin{aligned} a_{J_0,k} &= < \phi_{J_0,k}, f >= 2^{\frac{J_0}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(2^{J_0}(t - 2^{-J_0}k)dt = 2^{\frac{J_0}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(2^{-J_0}k + u)\phi(2^{J_0}u)du \\ &\simeq 2^{\frac{J_0}{2}} f(2^{-J_0}k) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2^{J_0}u)du = 2^{-\frac{J_0}{2}} f(2^{-J_0}k) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(v)dv \end{aligned}$$

et, en imposant la condition (classique) $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(v)dv = 1$, on obtient finalement l'approximation suivante :

$$\boxed{a_{J_0,k} \simeq 2^{-\frac{J_0}{2}} f\left(\frac{k}{2^{J_0}}\right)}$$

Les formules qui viennent d'être rappelées permettent de calculer les coefficients d'échelle en échelle ; on parle parfois d'algorithme *pyramidal*. Comme nous le verrons par la suite, ces formules interviennent dans certains algorithmes d'inversion de la transformée de Radon par ondelettes, mais nous verrons que dans certains travaux, comme par exemple dans ceux de A. Delaney et Y. Bresler, ou ceux de S. Bonnet et F. Peyrin [29, 10], il est fait appel à d'autres algorithmes, dits *non pyramidaux*. Nous les présentons maintenant.

Proposition 3.1.5 (Algorithme non pyramidal)
Avec les mêmes notations que ci-dessus, on se place dans le cadre d'une analyse multirésolution de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$*, engendrée par un filtre d'échelle* $\mathbf{h}$*. On note* J *l'échelle d'approximation la plus fine choisie. Alors pour tout* $j = 1..J$*, on peut calculer les coefficients d'approximation à l'échelle* $J - j$ *avec*

$$\mathbf{a}_{J-j}[k] = \mathbf{a}_J * \widetilde{\mathbf{H_j}}[2^j k]$$

où la famille de filtres $(\mathbf{H_k})_k$ *est définie récursivement dans le domaine direct par :*

$$\mathbf{H_k}[m] = \begin{cases} \mathbf{h}[m] & \text{si } k = 1 \\ \displaystyle\sum_{l \in \mathbf{Z}} \mathbf{h}[l]\mathbf{H_{K-1}}[m - 2^{k-1}l] & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

ou dans le domaine de Fourier selon :

$$\mathrm{TFTD}(\mathbf{H_k})(\omega) \;=\; \sqrt{2\pi}^{k-1} \prod_{m=0}^{k-1} \mathrm{TFTD}(\mathbf{h})(2^m\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{m=0}^{k-1} m_0(2^m\omega)$$

Preuve . On procède par récurrence sur j, limitée à J.

Initialisation : pour $j = 1$ puis $j = 2$ on peut écrire

$$\mathbf{a_{J-1}}[k] = \sum_l \mathbf{h}[l - 2k]\mathbf{a_J}[l] \text{ et } \mathbf{a_{J-2}}[k] = \sum_l \mathbf{h}[l - 2k]\mathbf{a_{J-1}}[l]$$

d'où l'on déduit l'expression de $\mathbf{a_{J-2}}[k]$ en fonction de $\mathbf{a_J}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a_{J-2}}[k] \quad &= \quad \sum_l \left(\mathbf{h}[l - 2k] \sum_m \mathbf{h}[m - 2l]\mathbf{a_J}[m] \right) = \sum_m \left(\mathbf{a_J}[m] \sum_l \mathbf{h}[l - 2k]\mathbf{h}[m - 2l] \right) \\ &\overset{q=l-2k}{=} \quad \sum_m \mathbf{a_J}[m] \sum_q \mathbf{h}[q]\mathbf{h}[m - 4k - 2q] = \sum_m \mathbf{a_J}[m]\mathbf{H_2}[m - 4k] \end{aligned}$$

où, conformément à sa définition,

$$\mathbf{H_2}[k] = \sum_q \mathbf{h}[q]\mathbf{h}[k - 2q]$$

Par suite

$$\mathbf{a_{J-2}}[k] = \sum_m \mathbf{a_J}[m]\widetilde{\mathbf{H_2}}[4k - m] = \mathbf{a_J} * \widetilde{\mathbf{H_2}}[4k]$$

De plus, pour le calcul de la transformée Fourier à temps discret de $\mathbf{H_2}$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{TFTD}(\mathbf{H_2})(\omega) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \mathbf{H_2}[k]e^{-ik\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \sum_q \mathbf{h}[q]\mathbf{h}[k - 2q]e^{-ik\omega} \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_q \mathbf{h}[q] \sum_k \mathbf{h}[k - 2q]e^{-ik\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_q \mathbf{h}[q] \sum_{k'} \mathbf{h}[k']e^{-ik'\omega}e^{-2iq\omega} \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_q \mathbf{h}[q]e^{-2iq\omega} \sum_{k'} \mathbf{h}[k']e^{-ik'\omega} = \sqrt{2\pi}\mathrm{TFTD}(\mathbf{h})(\omega)\mathrm{TFTD}(\mathbf{h})(2\omega) \end{aligned}$$

On suppose ensuite que pour j fixé on a

$$\mathbf{a_{J-j}}[k] = \mathbf{a_J} * \widetilde{\mathbf{H_j}}[2^j k]$$

et que l'on a la relation $\mathrm{TFTD}(\mathbf{H_j})(\omega) = \sqrt{2\pi}^{j-1} \prod_{m=0}^{j-1} \mathrm{TFTD}(\mathbf{h})(2^m\omega)$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{a_{J-j-1}}[k] &= \sum_l \mathbf{h}[l-2k]\mathbf{a_{J-j}}[l] = \sum_l \mathbf{h}[l-2k]\left(\mathbf{a_J} * \widetilde{\mathbf{H_j}}\right)[2^j l] \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_l \mathbf{h}[l-2k]\left(\sum_m \mathbf{a_J}[m]\mathbf{H_j}[m-2^j l]\right) = \sum_m \mathbf{a_J}[m]\left(\sum_l \mathbf{h}[l-2k]\mathbf{H_j}[m-2^j l]\right) \\
&= \sum_m \mathbf{a_J}[m]\left(\sum_q \mathbf{h}[q]\mathbf{H_j}[m-2^j(2k+q)]\right) = \sum_m \mathbf{a_J}[m]\left(\sum_q \mathbf{h}[q]\mathbf{H_j}[m-2^{j+1}k-2^j q]\right) \\
&= \sum_m \mathbf{a_J}[m]\mathbf{H_{j+1}}[m-2^{j+1}k] = \mathbf{a_J} * \widetilde{\mathbf{H_{j+1}}}[2^{j+1}k]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{TFTD}(\mathbf{H_{j+1}}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_k \mathbf{H_{j+1}}[k]e^{-ik\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_k \left(\sum_l \mathbf{h}[l]\widetilde{\mathbf{H_j}}[k-2^j l]\right)e^{-ik\omega} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_l \mathbf{h}[l]\left(\sum_k \widetilde{\mathbf{H_j}}[k-2^j l]e^{-ik\omega}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_l \mathbf{h}[l]\left(\sum_{k'} \widetilde{\mathbf{H_j}}[k']e^{-ik'\omega}e^{-i2^j l\omega}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sum_{k'} \widetilde{\mathbf{H_j}}[k']e^{-ik'\omega}\right)\left(\sum_l \mathbf{h}[l]e^{-i2^j l\omega}\right) = \sqrt{2\pi}\mathrm{TFTD}(\widetilde{\mathbf{H_j}})(\omega)\mathrm{TFTD}(\mathbf{h})(2^j\omega) \\
&= \sqrt{2\pi}^j \prod_{m=0}^{j-1} \mathrm{TFTD}(\mathbf{h})(2^m\omega)\mathrm{TFTD}(\mathbf{h})(2^j\omega) \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \sqrt{2\pi}^j \prod_{m=0}^{j} \mathrm{TFTD}(\mathbf{h})(2^m\omega)
\end{aligned}$$

■

Comme nous le verrons plus tard avec l'utilisation de ces formules pour inverser la transformée de Radon, on peut, en utilisant l'inverse de la transformée de Fourier à temps discret, avoir recours à l'expression suivante pour le calcul non pyramidal des coefficients :

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{J-j}[k] &= \mathbf{a}_J * \widetilde{\mathbf{H}}[2^j k] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{TFTD}\left(\mathbf{a}_J * \tilde{\mathbf{h}}_\mathbf{j}\right)(\omega)e^{i2^j k\omega}d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{TFTD}\left(\mathbf{a}_J\right)(\omega)\mathrm{TFTD}\left(\tilde{\mathbf{h}}_\mathbf{j}\right)(\omega)e^{i2^j k\omega}d\omega
\end{aligned}$$

Généralisation à des analyses biorthogonales

Dans certains cas, on peut souhaiter s'affranchir du caractère orthonormé des analyses multirésolutions que nous venons de présenter, car celui-ci implique que les ondelettes utilisées sont les mêmes lors de l'analyse et la synthèse ; pour pouvoir utiliser des ondelettes différentes pour chacune de ces deux phases (par exemple pour pouvoir disposer d'une ondelette avec un grand nombre de moments nuls lors de l'analyse, et une ondelette avec un support étroit lors de la reconstruction), Mallat, dans [68] explique que l'on peut travailler dans la base de Riesz à l'origine de l'analyse multirésolution (cf. dernier item

de la définition (3.1.2)) pour calculer les coefficients d'échelle et d'ondelettes par rapport à un couple (ϕ, ψ), la reconstruction se faisant par rapport à un autre couple, dit dual, comprenant aussi une fonction d'échelle et une ondelette, notées $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$.

Nous ne rentrerons pas dans les détails de la construction des ondelettes biorthogonales ici. Nous nous contenterons de mentionner qu'une fois que cette construction est accomplie,

- on dispose de deux analyses multirésolution de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, $(V_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ et $\left(\widetilde{V_j}\right)_{j\in\mathbf{Z}}$;
- pour tout j, $(\phi_{j,n})_n$ et $(\widetilde{\phi_{j,n}})_n$ forment respectivement une base de Riesz de V_j, et $\widetilde{V_j}$;
- il existe deux familles d'espaces de détails emboîtés $(W_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ et $\left(\widetilde{W_j}\right)_{j\in\mathbf{Z}}$, pour chacun desquels on dispose, pour chaque échelle j, d'une base de Riesz d'ondelettes, respectivement $(\psi_{j,n})_n$ et $(\widetilde{\psi_{j,n}})_n$;
- les espaces $(V_j)_{j\in\mathbf{Z}}$, $\left(\widetilde{V_j}\right)_{j\in\mathbf{Z}}$, $(W_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ et $\left(\widetilde{W_j}\right)_{j\in\mathbf{Z}}$ sont liés par les relations suivantes

$$\forall j \in \mathbf{Z},\ V_{j+1} = V_j \oplus W_j \ \text{ et } \ \widetilde{V_{j+1}} = \widetilde{V_j} \oplus \widetilde{W_j}$$

avec les relations de biorthogonalité

$$V_j \perp \widetilde{W_j} \ \text{ et } \ \widetilde{V_j} \perp W_j$$

ou, autrement dit

$$\forall (j, j', n, n') \in \mathbf{Z}^4,\ < \psi_{j,n}, \widetilde{\psi_{j',n'}} >= \delta_{j,j'}\delta_{n,n'}$$

Chaque fonction $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ peut alors être décomposée selon

$$f = \sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} < f, \psi_{j,n} > \widetilde{\psi_{j,n}} = \sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} < f, \widetilde{\psi_{j,n}} > \psi_{j,n}$$

et il existe deux constantes A et B strictement positives telles que

$$A\|f\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq \sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} |< f, \psi_{j,n} >|^2 \leq B\|f\|^2_{\mathbf{L}^2} \ \text{ et } \ \frac{1}{B}\|f\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq \sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \left|< f, \widetilde{\psi_{j,n}} >\right|^2 \leq \frac{1}{A}\|f\|^2_{\mathbf{L}^2}$$

De plus, des filtres discrets obtenus, comme dans le cas orthonormé, à partir d'équations d'échelle, permettent d'obtenir des algorithmes de calculs itératifs des coefficients.

3.1.4.2 Analyse multirésolution et bases orthonormées d'ondelettes en dimension 2

L'approche classique pour construire une base orthonormée de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ consiste à s'appuyer sur une analyse multirésolution orthonormée de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, engendrée par une fonction d'échelle ϕ, avec une ondelette associée ψ. On construit ainsi quatre fonctions définies par produit tensoriel, de la manière suivante : une fonction Φ, qui constitue la fonction d'échelle de l'analyse multirésolution 2D, telle que

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x_1, x_2) = (\phi \otimes \phi)(x_1, x_2) = \phi(x_1)\phi(x_2)$$

et trois fonctions $\Psi^{[1]}$, $\Psi^{[2]}$, $\Psi^{[3]}$, qui sont trois ondelettes bidimensionnelles, telles que

$$\begin{aligned}
\Psi^{[1]}(\mathbf{x}) &= (\phi \otimes \psi)(x_1, x_2) = \phi(x_1)\psi(x_2) \\
\Psi^{[2]}(\mathbf{x}) &= (\psi \otimes \phi)(x_1, x_2) = \psi(x_1)\phi(x_2) \\
\Psi^{[3]}(\mathbf{x}) &= (\psi \otimes \psi)(x_1, x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2)
\end{aligned}$$

On dit ainsi qu'on construit une analyse multirésolution séparable. Avec cette construction, la décomposition d'une fonction f d'une échelle à l'échelle grossière supérieure se fait en quatre *sous-bandes* : une approximation, obtenue par analyse par rapport à la fonction Φ, et trois familles de coefficients de détail, obtenues respectivement par rapport aux ondelettes $\Psi^{[1]}$, $\Psi^{[2]}$, $\Psi^{[3]}$, chacune de ces ondelettes mettant en évidence des détails dans une direction spécifique : $\Psi^{[1]}$ met en évidence les détails selon la variable x_2, donc les détails *horizontaux*, tandis que $\Psi^{[2]}$ réhausse les détails *verticaux* et $\Psi^{[3]}$ réhausse les détails *diagonaux*.
Les calculs rapides de transformée en ondelettes disponibles en dimension 1 se transposent facilement, grâce à deux filtrages successifs, l'un sur les lignes, l'autre sur les colonnes. Ainsi, pour l'analyse, on a les formules suivantes (les formules de synthèse se déduisent du cas unidimensionnel de manière similaire) :

$$\begin{aligned} a_{j,\mathbf{k}} &= \sum_{\mathbf{l}\in\mathbf{Z}^2} h_{l_1-2k_1} h_{l_2-2k_2} a_{j+1,\mathbf{l}} = \mathbf{a_{j+1}} * (\mathbf{hh})_\sigma [\mathbf{2k}] \\ d^{[1]}_{j,\mathbf{k}} &= = \sum_{\mathbf{l}\in\mathbf{Z}^2} h_{l_1-2k_1} g_{l_2-2k_2} a_{j+1,\mathbf{l}} = \mathbf{a_{j+1}} * (\mathbf{hg})_\sigma [\mathbf{2k}] \\ d^{[2]}_{j,\mathbf{k}} &= \mathbf{a_{j+1}} * (\mathbf{gh})_\sigma [\mathbf{2k}] \text{ et } d^{[3]}_{j,\mathbf{k}} = \mathbf{a_{j+1}} * (\mathbf{gg})_\sigma [\mathbf{2k}] \end{aligned}$$

Cette approche séparable est un cas particulier d'une approche plus générale des analyses multirésolution de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$. Les travaux de S. Bonnet et F. Peyrin que nous mentionnerons par la suite comme exemple de couplage en ondelettes et tomographie [10, 11] se placent par exemple dans un cadre plus général que le schéma séparable ; cette généralisation est traitée par exemple dans le dernier chapitre du livre d'I. Daubechies [26], ou aussi dans celui de F. Truchetet [103]. Voici brièvement en quoi elle consiste.

On fixe une analyse multirésolution de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$, $(V_j)_j$. Dans l'approche séparable, on passe d'une échelle à la suivante en appliquant un facteur de dilatation égal à 2 dans les deux directions du repère canonique ; dans le cas général, on n'applique pas nécessairement une dilatation isotrope. La dilatation d'une échelle à l'autre est contrôlée par une matrice de dilatation $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, dont les valeurs propres sont strictement supérieures à 1. Deux cas particuliers de matrice de dilatation sont classiques : la matrice D_S utilisée dans le cas séparable, qui est diagonale, et la matrice D_Q utilisée pour un schéma dit "quinconce"

$$D_S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D_Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, à partir d'une fonction d'échelle Φ, on crée par dilatations et translations la famille de fonctions

$$\Phi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = |\mathrm{det}\mathbf{D}|^{\frac{j}{2}} \Phi(\mathbf{D}^j\mathbf{x} - \mathbf{k}),\ j \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}^2$$

de telle sorte que

$$\forall j, \mathbf{k},\ \|\Phi_{j,\mathbf{k}}\|^2 = \|\Phi\|^2$$

Pour tout j, la famille $(\Phi_{j,\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^2}$ est une base orthonormée de V_j.
On montre alors qu'on peut construire une base orthonormée de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ à partir de $N_D = \mathrm{det}(D) - 1$ ondelettes, conduisant à la décomposition de tout signal f_J appartenant à V_J sous la forme

$$\begin{aligned} f_J &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^2} < \Phi_{J,\mathbf{k}}, f_J > \Phi_{J,\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^2} a_{J,\mathbf{k}} \Phi_{J,\mathbf{k}} \text{ (dans } V_J) \\ &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^2} < \Phi_{L,\mathbf{k}}, f_J > \Phi_{L,\mathbf{k}} + \sum_{i=1}^{N_D} \sum_{j=L}^{J-1} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^2} < \Psi^i_{j,\mathbf{k}}, f_J > \Psi^i_{j,\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Les calculs récursifs de coefficients d'approximation vus dans le cas séparable se généralisent de la manière suivante : pour deux échelles consécutives, les coefficients d'approximation sont liés par la relation :

$$a_{j,\mathbf{k}} =< \Phi_{J-1,\mathbf{k}}, f_J >= \mathbf{a_{j+1}} * \mathbf{h}_\sigma[\mathbf{Dk}]$$

tandis que plus généralement

$$\mathbf{a}_{J-j}[\mathbf{k}] = \mathbf{a}_J * (\mathbf{H_j})_\sigma[\mathbf{D}^j\mathbf{k}]$$

avec

$$\mathbf{H_j}[\mathbf{m}] = \begin{cases} \mathbf{h}[\mathbf{m}] & \text{si } j = 1 \\ \sum_l \mathbf{h}[l]\mathbf{H_{j-1}}[m + \mathbf{D}^{j-1}l] & \text{si } j > 1 \end{cases}$$

Des formules analogues existent pour le calcul des coefficients d'ondelettes.

Notons enfin qu'on peut développer des analyses multirésolution en quinconce en s'écartant du cadre orthonormé et en utilisant des bases de Riesz duales, biorthogonales, du même type que celles que nous avons présentées en dimension 1. C'est ce qui est utilisé par exemple dans les travaux de Bonnet *et al.* dans [10, 11].

Nous terminons cette partie, dans laquelle nous avons rassemblé les principaux résultats de la théorie des ondelettes que nous utiliserons dans la suite, par quelques exemples d'ondelettes classiques, auxquelles nous aurons recours plus loin. Ce sont des ondelettes 1D, définies par quelque-uns des procédés évoqués plus haut.

Exemples d'ondelettes 1D

Exemple 3.1.1 (Ondelette chapeau mexicain)
C'est une ondelette que l'on connaît sous forme analytique, comme dérivée seconde d'une gaussienne, normalisée pour $\|\Psi\|_{\mathbf{L}^2} = 1$, *et donc définie par*

$$\Psi(s) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{\frac{1}{4}}}(s^2 - 1)e^{-s^2/2}$$

Sa transformée de Fourier est donnée par :

$$\widehat{\Psi}(\omega) = -\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{\frac{1}{4}}}\omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

Ψ *et* $\hat{\Psi}$ *sont représentées en figure (3.1).*

Exemple 3.1.2 (Ondelette et fonction d'échelle de Meyer et Lemarié[68])
Une ondelette de Meyer est définie dans le domaine de Fourier, où elle est à support compact tout en étant régulière. Elle se construit à partir d'un filtre h *pour lequel on impose que la fonction de transfert* m_0 *vérifie*

$$m_0(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \\ 0 & si\ \omega \in \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \end{cases}$$

On fait ensuite en sorte que la condition vue sur la fonction de transfert liée à une fonction d'échelle soit vérifiée :

$$\forall \omega \in [-\pi, \pi],\ |m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$$

Meyer a montré qu'un choix possible consiste à poser

$$m_0(\omega) = \cos\left[\frac{\pi}{2}\beta\left(\frac{3|\omega|}{\pi} - 1\right)\right]\ si\ |\omega| \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$$

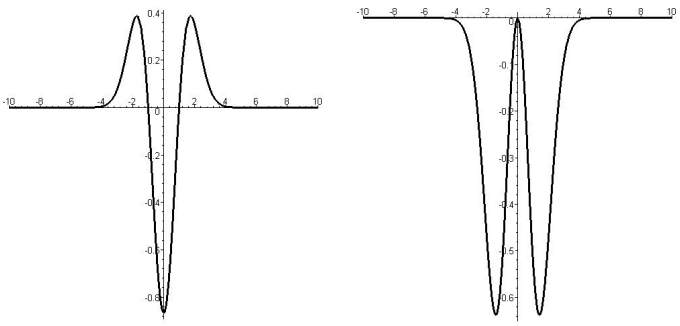


FIG. 3.1 – Ondelette "chapeau mexicain" : dans le domaine direct (à gauche), et dans le domaine de Fourier (à droite).

où l'on s'appuie sur la fonction auxiliaire β définie par

$$\beta(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$$

qui est choisie ici car elle vérifie $\beta(x) + \beta(1-x) = 1$ sur $[0,1]$; on construit ainsi des raccords de classe $\mathcal{C}^3$, qui garantissent une décroissance assez rapide dans le domaine direct (en $\frac{1}{x^3}$).
Ψ et Φ sont données sous forme explicite dans [68] (le fait que m_0 soit à support compact permet de donner une forme simplifiée pour $\hat{\Phi}$ dans (3.16)) ; on a représenté Ψ et sa transformée de Fourier en figure (3.2).

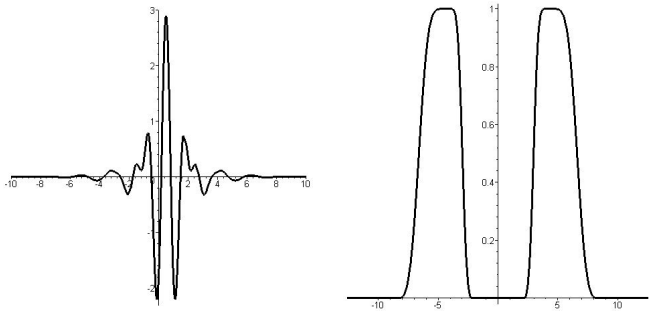


FIG. 3.2 – Ondelette de Meyer : dans le domaine direct (à gauche), et dans le domaine de Fourier (à droite). C'est une ondelette définie à l'origine dans le domaine de Fourier, où elle est à support compact, et de classe $\mathcal{C}^3$.

Exemple 3.1.3 (Ondelettes de Daubechies)
Dans la suite, nous verrons que pour des applications en tomographie locale, le choix des ondelettes se fera en prenant compte deux attributs des ondelettes : la taille du support, et le nombre de moments nuls. Pour $N \in \mathbf{N}$, on dit qu'une ondelette ψ a N moments nuls si

$$\forall k = 0..N-1, \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) t^k dt = 0$$

Les ondelettes de Daubechies ont été construites dans le but de proposer des ondelettes dont le support est de taille minimale pour un nombre de moments nuls fixés. Leur construction est détaillée dans l'ouvrage d'I. Daubechies [26], et on aboutit à des ondelettes dont le support est de taille $2p-1$ pour p moments nuls. Ces ondelettes ne sont pas définies sous forme analytique, mais à partir de la donnée du filtre discret

h permettant de les engendrer. Elles permettent ainsi de construire des bases orthonormées de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$. Nous avons tracé en figure (3.3) les graphiques des ondelettes de Daubechies pour 2, 4 et 8 moments nuls (ces graphiques ont été obtenus grâce à la fonction `MakeWavelet` *de la boîte à outils* `Wavelab`*).*

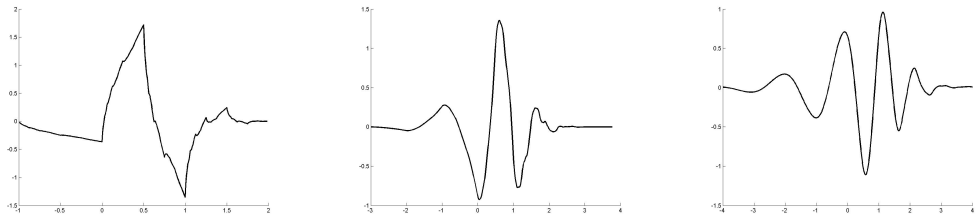


FIG. 3.3 – Ondelettes de Daubechies, à respectivement 2, 4 et 8 moments nuls. Ces ondelettes sont définies par la donnée d'un filtre discret.

Dans cette deuxième partie de chapitre, nous allons présenter plusieurs méthodes d'application de la théorie des ondelettes pour l'inversion de la transformée de Radon, que nous proposons de répartir ici en deux catégories :

- une approche sous l'angle du traitement du signal, dans laquelle les sinogrammes sont analysés projection par projection, et dans laquelle, pour résumer, on adapte la méthode de rétroprojection filtrée pour reconstruire la fonction f visée à partir de transformées en ondelettes adéquates de ses projections. Dans cette approche, il existe des travaux dans la littérature explicitement appliqués au problème intérieur. Nous les détaillerons.

- une approche sous l'angle statistique, dans laquelle les sinogrammes sont analysés comme des fonctions de deux variables (et pas seulement comme une succession de projections) ; cette approche a été développée pour l'inversion en présence de données bruitées de certains opérateurs, dont fait partie la transformée de Radon. L'outil principal est la transformée en ondelettes-vaguelettes, qui a ensuite été adaptée pour traiter plus efficacement certains types d'images (avec les transformées en ridgelets, curvelets, bandelets,..). Nous présenterons cette approche dans un deuxième temps.

3.2 Inversion de la transformée de Radon par des approches par ondelettes de type rétroprojection filtrée (FBP)

Dans cette partie, nous présentons d'abord les grands types de stratégies qui permettent d'inverser la transformée de Radon en utilisant des transformées en ondelettes, sans nous préoccuper des données disponibles (c'est-à-dire en présence de données globales). Dans un second temps, nous recensons diverses applications de ces méthodes au traitement de données tronquées, dans le cas du problème intérieur (seul problème à données tronquées abordé, à notre connaissance, dans ce pan de la littérature).

Nous introduisons d'abord quelques résultats auxiliaires, établissant des relations entre les ondelettes et différents opérateurs qui interviennent en tomographie. C'est essentiellement sur eux que reposent les méthodes d'inversion que nous présenterons ensuite. La plupart d'entre eux ont été énoncés dès le début des années 90 par Walnut et Berenstein [107, 7].

3.2.1 Lemmes techniques

Dans cette partie, nous utiliserons les notations suivantes :
- $\mathrm{T}_{\mathbf{b}}$ désigne l'opérateur de translation du vecteur $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$: $\forall f,\ \mathrm{T}_{\mathbf{b}} f(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{b})$;
- D_a pour désigner l'opérateur de dilatation du facteur $a > 0$: pour toute fonction définie sur $\mathbf{R}^n$, $n = 1$ ou $n = 2$, $\mathrm{D}_a f(\mathbf{x}) = f_a(\mathbf{x}) = a^{-\frac{n}{2}} f\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right)$;
- R_ϕ pour désigner l'opérateur de rotation d'angle $-\phi \in [0, 2\pi[, \forall f,\ \mathrm{R}_\phi f(\mathbf{x}) = f_\phi(\mathbf{x}) = f(\mathrm{r}_{-\phi}(\mathbf{x}))$ où pour tout angle ϕ, r_ϕ désigne la rotation de centre O et d'angle ϕ sur $\mathbf{R}^2$.

Lemme 3.2.1 (Transformée de Radon et ondelettes)

1. *Soit Ψ une ondelette admissible 2D appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$. Alors pour tout $\Theta \in \mathbf{S}^1$, la fonction $\mathcal{R}_\theta\Psi$ est une ondelette 1D admissible.*
2. *Pour toute fonction $\Psi \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2) \cap \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$, pour toute incidence $\theta \in [0, 2\pi[$,*

$\mathcal{R}_\theta(\mathrm{D_a}\Psi) = \sqrt{a}\mathrm{D_a}\mathcal{R}_\theta\Psi\ (a > 0),\ \mathcal{R}_\theta(\mathrm{T}_{\mathbf{b}}\Psi) = \mathrm{T}_{\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}}\mathcal{R}_\theta\Psi\ (\mathbf{b} \in \mathbf{R}^2),\ \mathcal{R}_\theta(\mathrm{R}_\phi\Psi) = \mathcal{R}_{\theta-\phi}\Psi\ (\phi \in [0, 2\pi[)$

et, par conséquent

$$\mathcal{R}_\theta\Psi_{a,\mathbf{b}}(s) = \sqrt{a}\,(\mathcal{R}_\theta\Psi)_{a,\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}}\ (s) = \mathcal{R}_\theta\Psi\left(\frac{s - \mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}}{a}\right) \tag{3.19}$$

et

$$\mathcal{R}_\theta \Psi_{a,\mathbf{b},\phi}(s) = \sqrt{a}\left(\mathcal{R}_{\theta-\phi}\Psi\right)_{a,\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}}(s) \tag{3.20}$$

Preuve . On fixe $\theta \in \mathbf{S}^1$; la condition d'admissibilité pour les ondelettes 1D a été vue en (3.1) ; pour la fonction 1D $\mathcal{R}_\theta\Psi$, cette condition d'admissiblité s'obtient de la manière suivante, en utilisant le théorème de coupe-projection (2.1.4) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\widehat{\mathcal{R}_\theta\Psi}(\omega)\right|^2}{|\omega|} d\omega \quad = \quad 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\hat{\Psi}(\omega\Theta)\right|^2}{|\omega|} d\omega$$

Or Ψ est une ondelette admissible 2D ; cela signifie donc que

$$\int_{\mathbf{R}^2} \frac{\left|\hat{\Psi}(\mathbf{k})\right|^2}{|\mathbf{k}|^2} < +\infty$$

Or

$$\int_{\mathbf{R}^2} \frac{\left|\hat{\Psi}(\mathbf{k})\right|^2}{|\mathbf{k}|^2} = \int_0^\pi \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{\left|\hat{\Psi}(\omega\mathbf{\Theta})\right|^2}{|\omega|^2} |\omega| d\omega \right) d\theta = \int_0^\pi \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{\left|\hat{\Psi}(\omega\mathbf{\Theta})\right|^2}{|\omega|} d\omega \right) d\theta$$

En utilisant le théorème de Fubini (les fonctions en jeu sont positives), on en déduit que pour tout θ, la fonction $\omega \mapsto \dfrac{\left|\hat{\Psi}(\omega\mathbf{\Theta})\right|^2}{|\omega|}$ est intégrable, ce qui assure la condition d'admissibilité de chacune des ondelettes $\mathcal{R}_\theta\Psi$.

Ensuite, dans le couplage entre opérateurs avec la transformée de Radon, on a, pour l'opérateur de dilatation D_a :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\theta(\mathrm{D}_a\Psi)(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_a\left(s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a}\Psi\left(\frac{s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp}{a}\right) dt \\ &\overset{u=\frac{t}{a}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a}\Psi\left(\frac{s}{a}\mathbf{\Theta} + u\mathbf{\Theta}^\perp\right) a du = \mathcal{R}_\theta\Psi\left(\frac{s}{a}\right) = \sqrt{a}\mathrm{D}_a\mathcal{R}_\theta\Psi(s) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Pour l'opérateur de translation $\mathrm{T}_\mathbf{b}$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\theta(\mathrm{T}_\mathbf{b}\Psi)(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp - \mathbf{b}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(\left(s - \mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}\right)\mathbf{\Theta} + \left(t - \mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}^\perp\right)\mathbf{\Theta}^\perp\right) dt \\ &\overset{u=t-\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}^\perp}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(\left(s - \mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}\right)\mathbf{\Theta} + u\mathbf{\Theta}^\perp\right) dt = \mathcal{R}_\theta\Psi(s - \mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}) = \mathrm{T}_{\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}}\mathcal{R}_\theta\Psi(s) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Enfin, pour l'opérateur de rotation R_ϕ, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\theta(\mathrm{R}_\phi\Psi)(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{R}_\phi\Psi\left(s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(\mathrm{r}_{-\phi}(s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp)\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(s\mathbf{U}_{\theta,\phi} + t\mathbf{U}_{\theta,\phi}^\perp)\right) dt \ \text{ où } \mathbf{U}_{\theta,\phi} = (\cos(\theta-\phi), \sin(\theta-\phi)) \\ &= \mathcal{R}_{\theta-\phi}\Psi(s) \end{aligned}$$

En cumulant les effets des opérateurs de translation et de dilatation, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\theta\Psi_{a,\mathbf{b}}(s) &= \mathcal{R}_\theta\left(\left(\mathrm{T_b D_a}\Psi\right)\right)(s) = \mathcal{R}_\theta\left(\mathrm{T_b}\left(\mathrm{D_a}\Psi\right)\right)(s)\\ &= \mathrm{T}_{\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\Theta}}\left(\mathcal{R}_\theta(\mathrm{D_a})\Psi\right)(s) \text{ (d'après (3.22))}\\ &= \mathrm{T}_{\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\Theta}}\left(\sqrt{a}\left(\mathrm{D_a}\mathcal{R}_\theta\Psi\right)\right)(s) \text{ (d'après (3.21))}\\ &= \sqrt{a}\mathrm{T}_{\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\Theta}}\mathrm{D_a}\mathcal{R}_\theta\Psi(s) = \sqrt{a}\left(\mathcal{R}_\theta\Psi\right)_{a,\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\Theta}}(s)\end{aligned}$$

et si l'on ajoute l'opérateur de rotation R_ϕ, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\theta\Psi_{a,\mathbf{b},\phi}(s) = \mathcal{R}_\theta\left(\left(\mathrm{T}_b\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\phi\Psi\right)\right)(s) &= \sqrt{a}\left(\mathcal{R}_\theta(\mathrm{R}_\phi\Psi)\right)_{a,\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\Theta}}(s) \text{ (d'après (3.23))}\\ &= \sqrt{a}\left(\mathcal{R}_{\theta-\phi}\Psi\right)_{a,\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\Theta}}(s)\end{aligned}$$

■

Lemme 3.2.2 (Opérateur Λ et ondelettes)

1. *Soit ψ une fonction définie sur $\mathbf{R}$. Pour que $\Lambda\psi$ soit une ondelette admissible, il faut et il suffit que*

$$\int_0^{+\infty}\left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2|\omega|d\omega < +\infty$$

et pour cela, il suffit qu'il existe un réel $\alpha > 1$ et une constante réelle $C > 0$ telle que

$$\forall\omega, |\hat{\psi}(\omega)| \leq \frac{C}{(1+\omega)^\alpha}$$

2. *Pour tout facteur de dilatation $a > 0$, et pour toute translation $b \in \mathbf{R}$, on a*

$$\Lambda\psi_{a,b} = \frac{1}{a}\left(\Lambda\psi\right)_{a,b} \tag{3.23}$$

Preuve . 1. En utilisant la définition de l'opérateur Λ dans le domaine de Fourier vue dans le chapitre précédent, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\widehat{\Lambda\psi}(\omega)\right|^2}{|\omega|}d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2|\omega|^2}{|\omega|}d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2|\omega|d\omega$$

et pour que cette intégrale converge, il suffit qu'il existe un réel $\alpha > 1$ et une constante $C > 0$ telle que $\forall\omega, |\hat{\psi}(\omega)| \leq \frac{C}{(1+\omega)^\alpha}$, car alors

$$\left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2|\omega| \leq \frac{C|\omega|}{(1+\omega)^{2\alpha}} \sim_{\omega\to+\infty} \frac{C}{\omega^{2\alpha-1}}$$

qui est intégrable dès que $2\alpha - 1 > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 1$.

2.

$$\begin{aligned}\widehat{\Lambda\psi_{a,b}}(\omega) &= |\omega|\widehat{\psi_{a,b}}(\omega) = \sqrt{a}|\omega|e^{-i\omega b}\hat{\psi}(a\omega) = \frac{\sqrt{a}}{a}e^{-i\omega b}|a\omega|\hat{\psi}(a\omega)\\ &= \frac{\sqrt{a}}{a}e^{-i\omega b}\widehat{\Lambda\psi}(a\omega) = \frac{1}{a}\widehat{\left(\Lambda\psi\right)_{a,b}}(\omega)\end{aligned}$$

■

Lemme 3.2.3 (Opérateur $\mathcal{R}^{\#}$ et ondelettes (d'après [8]))
Soit $\psi = (\psi_\theta)_{\theta\in[0,2\pi[}$ une famille de fonctions définies sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$. Alors si la famille $(\psi_\theta)_{\theta\in[0,2\pi[}$ est paire sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$, et si pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$,

$$0 < \int_0^{+\infty} \frac{\left|\widehat{\psi_\theta}\,(\omega)\right|^2}{\omega^3} d\omega < +\infty$$

alors $\mathcal{R}^{\#}(\psi)$ est une ondelette admissible 2D et pour tout facteur de dilatation $a > 0$, et pour tout vecteur de translation $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$, on a

$$\left(\mathcal{R}^{\#}\psi\right)_{a,\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{2\pi} (\psi_\theta)_{a,\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}) d\theta \tag{3.24}$$

Preuve . On peut écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{k}} \frac{\left|\widehat{\mathcal{R}^{\#}\psi}(\mathbf{k})\right|^2}{|\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\left|\widehat{\mathcal{R}^{\#}\psi}(\omega\Theta)\right|^2}{\omega^2} \omega d\omega d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\left|2\sqrt{2\pi}\widehat{\psi_\theta}\,(\omega)\right|^2}{\omega^3} d\omega d\theta \text{ (d'après le corollaire (2.1.1)} \\
&= 8\pi \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\left|\widehat{\psi_\theta}\,(\omega)\right|^2}{\omega^3} d\omega d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} (\psi_\theta)_{a,\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}) d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_\theta\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}}{a}\right) d\theta \\
&= \sqrt{a}\frac{1}{a}\int_0^{2\pi} \psi_\theta\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{b}}{a}\cdot\mathbf{\Theta}\right) d\theta = \sqrt{a}\left(\mathcal{R}^{\#}\psi\right)_{a,\mathbf{b}}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

■

Nous allons maintenant présenter plusieurs méthodes d'inversion de la transformée de Radon.

3.2.2 Inversion de la transformée de Radon par des approches par ondelettes de type rétroprojection filtrée (FBP) : cas où les données sont complètes

3.2.2.1 Rétroprojection filtrée d'une transformée en ondelettes 1D de la transformée de Radon

Cette première méthode a été suggérée par Walnut [107], et appliquée ensuite à des données locales par Olson *et al.* [81], comme nous le détaillerons plus loin. Elle consiste à calculer la décomposition en ondelettes 1D de chacune des projections, puis à appliquer la méthode de rétroprojection filtrée (FBP) aux projections ainsi décomposées.

Proposition 3.2.1 (Décomposition en ondelettes 1D et FBP)
Soit $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$, et ψ une ondelette admissible 1D.
Pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, on écrit la transformée en ondelettes de $\mathcal{R}_\theta f$ par rapport à ψ :

$$\mathcal{R}_\theta f(s) = \sum_{j,k} c_{j,k}(\theta)\psi_{j,k}(s)$$

où on a noté

$$c_{j,k}(\theta) = < \mathcal{R}_\theta f, \psi_{j,k} >$$

Alors

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \sum_{j,k} \int_0^\pi c_{j,k}(\theta) \Lambda \psi_{j,k}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}) d\theta$$

Preuve . La formule est obtenue simplement en injectant dans la formule de rétroprojection filtrée la décomposition en ondelettes de chacune des projections :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_0^\pi \Lambda \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}) d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_0^\pi \Lambda \left(\sum_{j,k} c_{j,k}(\theta) \psi_{j,k} \right) (\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \sum_{j,k} \int_0^\pi c_{j,k}(\theta) \Lambda \psi_{j,k}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}) d\theta \end{aligned}$$

■

3.2.2.2 Reconstruction de la transformée en ondelettes 2D à partir de la transformée de Radon

L'idée consiste ici à reconstituer la transformée en ondelettes 2D de la fonction que l'on cherche à reconstruire, avant même de reconstruire la fonction elle-même. Pour cela, on établit une relation entre les coefficients en ondelettes 2D de la fonction et des coefficients en ondelette 1D de chacune des projections. Dans cette approche, tout repose sur le choix des ondelettes qui interviennent respectivement dans chacun des deux domaines. Nous allons voir dans la suite que l'on peut soit fixer l'ondelette 2D, et en déduire une ondelette 1D adaptée, soit fixer une ondelette 1D, et en déduire une ondelette 2D adaptée. Néanmoins, dans les deux cas, les formules que l'on établit reposent sur la formule générale que nous avons énoncée dans la propriété (2.1.7) :

$$f * G = \mathcal{R}^\# (\mathcal{R} f * g)$$

avec

$$G = \mathcal{R}^\# g \text{ ou } g = \frac{1}{4\pi} \Lambda \mathcal{R} G$$

Nous présentons maintenant chacune des deux stratégies.

Première stratégie : en fixant une ondelette 2D.

On choisit une ondelette 2D. C'est le choix qui est fait par exemple par Berenstein *et al.*, dans [8].

Proposition 3.2.2 (Ondelette 2D fixée)
Si Ψ est une ondelette 2D, alors pour tout θ, la fonction $\psi_\theta = \Lambda \mathcal{R}_\theta \Psi$, définie dans le domaine de Fourier par

$$\widehat{\psi_\theta}(\omega) = |\omega| \hat{\Psi}(\omega \Theta)$$

est une ondelette admissible 1D, et on a, quels que soient l'échelle a et le point $\mathbf{b}$,

$$\mathrm{W}^\Psi f(a, \mathbf{b}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{2\pi} \mathrm{W}^{\psi_\theta}(\mathcal{R}_\theta f)(a, \mathbf{b} \cdot \Theta) d\theta = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{2\pi} \mathrm{W}^{\Lambda \mathcal{R}_\theta \Psi}(\mathcal{R}_\theta f)(a, \mathbf{b} \cdot \Theta) d\theta \quad (3.25)$$

Preuve . 1. Ψ étant une ondelette admissible 2D, on sait, d'après le lemme (3.2.1), que pour tout θ, $\mathcal{R}_\theta \psi$ est une ondelette admissible. On s'intéresse ensuite, pour tout θ à $\Lambda \mathcal{R}_\theta \Psi$. On applique alors les résultats obtenus dans le lemme (3.2.2) : ici,

$$\int_0^{+\infty} \left| \widehat{\mathcal{R}_\theta \Psi}(\omega) \right|^2 |\omega| d\omega = 2\pi \int_0^{+\infty} \left| \widehat{\Psi}(\omega \mathbf{\Theta}) \right|^2 |\omega| d\omega$$

Or on sait que Ψ appartient à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$; on a donc

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\hat{\Psi}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} < +\infty$$

avec

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\hat{\Psi}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \left|\widehat{\Psi}(\omega\mathbf{\Theta})\right|^2 \omega d\omega d\theta$$

Le théorème de Fubini permet de conclure que pour tout θ, $\int_0^{+\infty} \left|\widehat{\Psi}(\omega\mathbf{\Theta})\right|^2 \omega d\omega < +\infty$, ce qui montre que $\Lambda\mathcal{R}_\theta\Psi$ est une ondelette admissible 1D.

2. La relation entre coefficients d'ondelettes entre les deux domaines s'obtient de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}^\Psi f(a,\mathbf{b}) &= f * \overline{(\Psi_a)_\sigma}(\mathbf{b}) = \frac{1}{4\pi}\mathcal{R}^\# \left(\mathcal{R}_\theta f * \Lambda\mathcal{R}_\theta \left(\overline{(\Psi_a)_\sigma}\right)\right)(\mathbf{b}) \text{ d'après la propriété (2.1.7)} \\
&= \frac{1}{4\pi}\mathcal{R}^\# \left(\mathcal{R}_\theta f * \Lambda\mathcal{R}_\theta \left(\left(\overline{\Psi_\sigma}\right)_a\right)\right)(\mathbf{b}) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left(\mathcal{R}_\theta f * \Lambda\mathcal{R}_\theta \left(\left(\overline{\Psi_\sigma}\right)_a\right)\right)(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta})d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{2\pi} \left(\mathcal{R}_\theta f * \left(\Lambda\mathcal{R}_\theta\overline{\Psi_\sigma}\right)_a\right)(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta})d\theta \text{ d'après (3.19) et (3.23)} \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{2\pi} \left(\mathcal{R}_\theta f * \left(\overline{(\Lambda\mathcal{R}_\theta\Psi)_\sigma}\right)_a\right)(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta})d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{2\pi} \mathrm{W}^{\Lambda\mathcal{R}_\theta\Psi}(\mathcal{R}_\theta f)(a,\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta})d\theta
\end{aligned}$$

■

Application : calcul des coefficients d'ondelettes 2D dans une base orthonormée à partir de la transformée de Radon

$$\begin{aligned}
d_{j,\mathbf{k}} &\overset{def}{=} < f, \Psi_{j,k} > = \mathrm{W}^\Psi f(2^{-j}, 2^{-j}\mathbf{k}) \\
&= \frac{1}{4\pi}2^{\frac{j}{2}}\int_0^{2\pi} \mathrm{W}^{\Lambda\mathcal{R}_\theta\Psi}(\mathcal{R}_\theta f)(2^{-j}, 2^{-j}\mathbf{k}\cdot\Theta)d\theta \text{ d'après (3.25)} \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left(\mathcal{R}_\theta f * \Lambda\mathcal{R}_\theta \left(\overline{\Psi_\sigma}\right)_{2^{-j}}\right)(2^{-j}\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Theta})d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi}\mathcal{R}^\# \left(\mathcal{R}_\theta f * \Lambda\mathcal{R}_\theta \left(\overline{\Psi_\sigma}\right)_{2^{-j}}\right)(2^{-j}\mathbf{k})
\end{aligned}$$

en reprenant les résultats intermédiaires de la preuve ci-dessus.

En passant par le domaine de Fourier, dans lequel on dispose d'une forme explicite pour l'opérateur Λ, cette dernière expression se réécrit de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
d_{j,\mathbf{k}} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\mathcal{R}_\theta f * \Lambda\mathcal{R}_\theta\left(\overline{\Psi_\sigma}\right)_{2^{-j}}\right)(2^{-j}\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Theta}d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}\left(\mathcal{R}_\theta f * \Lambda\mathcal{R}_\theta\left(\overline{\Psi_\sigma}\right)_{2^{-j}}\right)(\omega)e^{i2^{-j}\omega\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Theta}}d\omega d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)\widehat{\left(\Lambda\mathcal{R}_\theta\left(\overline{\Psi_\sigma}\right)_{2^{-j}}\right)}(\omega)e^{i2^{-j}\omega\mathbf{k}\cdot\Theta}d\omega d\theta \text{ d'après la propriété (A.0.4)} \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)|\omega|\widehat{\left(\overline{\Psi_\sigma}\right)_{2^{-j}}}(\omega)e^{i2^{-j}\omega\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Theta}}d\omega d\theta \text{ d'après la propriété (2.1.4)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)|\omega|\widehat{\Psi_{2^{-j}}}(-\omega\Theta)e^{i2^{-j}\omega\mathbf{k}\cdot\Theta}d\omega d\theta
\end{aligned}
$$

où on voit apparaître une formule similaire à la formule de rétroprojection filtrée, dans laquelle pour chaque projection paramétrée par θ, le filtre rampe $\omega \mapsto |\omega|$ a été modifié par le filtre $\omega \mapsto |\omega|\widehat{\Psi_{2^{-j}}}(-\omega\Theta)$.

On ne connaît pas toujours une expression analytique facilement manipulable de Ψ ou $\hat{\Psi}$: pour y remédier, on utilise les expressions des coefficients d'approximation utilisées dans les algorithmes non pyramidaux détaillés plus haut en 1D (dans la propriété 3.1.5), et généralisés ici en 2D, pour écrire :

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}_{J-l}[\mathbf{n}] = \mathbf{a_J} * \widetilde{\mathbf{H}_\mathbf{l}}[2^l n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{TFTD}\left(\mathbf{a_J} * \widetilde{\mathbf{H}_\mathbf{l}}\right)(\xi)e^{2^l i\xi\cdot\mathbf{n}}d\xi \\
= &\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{TFTD}\left(\mathbf{a_J}\right)(\xi)\mathrm{TFTD}\left(\widetilde{\mathbf{H}_\mathbf{l}}\right)(\xi)e^{2^l i\xi\cdot\mathbf{n}}d\xi = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{TFTD}\left(\mathbf{a_J}\right)(\xi)\overline{\mathrm{TFTD}\left(\mathbf{H_l}\right)(\xi)}e^{2^l i\xi\cdot\mathbf{n}}d\xi
\end{aligned}
$$

On veut calculer cette dernière expression à partir de la transformée de Radon de f ; pour cela, on va utiliser le théorème de coupe-projection (propriété 2.1.4), mais auparavant, on utilise l'estimation, vue en (3.1.4.1), des coefficients d'approximation les plus fins par les valeurs du signal, pour écrire que :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TFTD}(\mathbf{a}_J)(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\sum \mathbf{a}_J[\mathbf{n}]e^{-i\xi\cdot\mathbf{n}} \simeq \frac{1}{2\pi}\sum\frac{1}{2^J}f\left(\frac{\mathbf{n}}{2^J}\right)e^{-i\frac{\mathbf{n}}{2^J}\cdot 2^J\xi} \\
&\simeq \frac{2^J}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}f(\mathbf{u})e^{-i2^J\mathbf{u}\cdot\xi}d\mathbf{u} \simeq 2^J\hat{f}(2^J\xi) = \frac{1}{h_0}\hat{f}\left(\frac{\xi}{h_0}\right)
\end{aligned}
$$

en notant $h_0 = \dfrac{1}{2^J}$ le pas choisi dans le domaine direct.
Ensuite, d'après le théorème de coupe-projection, on a l'égalité, en coordonnées polaires,

$$\forall\omega, \forall\mathbf{\Theta}, \hat{f}(\omega\mathbf{\Theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)$$

Ici, la transformée de Radon est mesurée, pour chaque incidence, selon une grille régulière, dont nous noterons le pas h_s. On note $\mathcal{R}_\theta f[\,]$ le vecteur de mesures, pour lequel on peut calculer la transformée de Fourier à temps discret.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TFTD}\left(\mathcal{R}_\theta f[\,]\right)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum\mathcal{R}_\theta f[n]e^{-in\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum\mathcal{R}_\theta f(nh_s)e^{-inh_s\frac{\omega}{h_s}} \\
&\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}h_s}\int\mathcal{R}_\theta f(u)e^{-iu\frac{\omega}{h_s}}du = \frac{1}{h_s}\widehat{\mathcal{R}_\theta f}\left(\frac{\omega}{h_s}\right)
\end{aligned}
$$

Finalement, utilisant ces deux approximations, on a

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_{J-l}[\mathbf{n}] &\simeq \frac{1}{h_0}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}\left(\frac{\xi}{h_0}\right)\overline{\mathrm{TFTD}\left(\mathbf{H}_l\right)(\xi)}e^{2^l i\xi\cdot\mathbf{n}}d\xi \\
&\simeq \frac{1}{h_0}\int_{0}^{\pi}\int_{-Bh_0}^{Bh_0}\hat{f}\left(\frac{\omega}{h_0}\mathbf{\Theta}\right)\overline{\mathrm{TFTD}\left(\mathbf{H}_l\right)(\omega\mathbf{\Theta})}e^{2^l i\omega\mathbf{\Theta}\cdot\mathbf{n}}\omega d\omega d\theta \\
&\qquad \text{on fait l'hypothèse qu'on est dans les conditions de Nyquist :} \\
&\qquad \text{on note } B \text{ la fréquence de coupure de } f \text{ en faisant l'hypothèse que } B \leq \frac{\pi}{2h_0} \\
&= \frac{1}{h_0}\int_{0}^{\pi}\int_{-Bh_0}^{Bh_0}\hat{f}\left(\frac{\omega}{h_0}\mathbf{\Theta}\right)\overline{\mathrm{TFTD}\left(\mathbf{H}_l\right)(\omega\mathbf{\Theta})}e^{2^l i\omega\mathbf{\Theta}\cdot\mathbf{n}}|\omega|d\omega d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{h_0}\int_{0}^{\pi}\int_{-Bh_0}^{Bh_0}\widehat{\mathcal{R}_\theta f}\left(\frac{\omega}{h_0}\right)\overline{\mathrm{TFTD}\left(\mathbf{H}_l\right)(\omega\mathbf{\Theta})}e^{2^l i\omega\mathbf{\Theta}\cdot\mathbf{n}}|\omega|d\omega d\theta \\
&\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{h_s}{h_0}\int_{0}^{\pi}\int_{-Bh_0}^{Bh_0}\mathrm{TFTD}\left(\mathcal{R}_\theta f[\,]\right)\left(\frac{h_s}{h_0}\omega\right)\overline{\mathrm{TFTD}\left(\mathbf{H_l}\right)(\omega\mathbf{\Theta})}e^{2^l i\omega\mathbf{\Theta}\cdot\mathbf{n}}|\omega|d\omega d\theta \\
\overset{\omega'=\frac{h_s}{h_0}\omega}{=} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{h_0}{h_s}\int_{0}^{\pi}\int_{-Bh_s}^{Bh_s}\mathrm{TFTD}\left(\mathcal{R}_\theta f[\,]\right)(\omega')\overline{\mathrm{TFTD}\left(\mathbf{H}_l\right)\left(\frac{h_0\omega'}{h_s}\mathbf{\Theta}\right)}e^{2^l i\frac{\omega'\mathbf{\Theta}\cdot\mathbf{n}h_0}{h_s}}|\omega'|d\omega' d\theta
\end{aligned}
$$

On peut aussi écrire cette formule sous forme d'une rétroprojection filtrée

$$\mathbf{a}_{J-l}[\mathbf{n}] \simeq \int_0^{\pi} Q_\theta^{(l)}\left(\frac{2^l h_0}{h_s}\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Theta}\right)d\theta$$

avec

$$Q_\theta^l(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{h_0}{h_s}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{TFTD}\left(\mathcal{R}_\theta f[\,]\right)(\omega)\overline{\mathrm{TFTD}\left(\mathbf{H}_l\right)\left(\frac{h_0\omega}{h_s}\mathbf{\Theta}\right)}e^{i\omega u}|\omega|d\omega \tag{3.26}$$

(le changement de bornes dans l'intégrale étant justifié par le fait que dans les conditions de Nyquist appliquées cette fois-ci, pour tout θ, à $\mathcal{R}_\theta f$, qui est également B bande limitée, on a $Bh_s \leq \frac{\pi}{2}$)

On aboutit ainsi aux formules utilisées par Delaney et Bresler dans [29], Rashid, Berenstein *et al.* dans [90], Bonnet et Peyrin dans [11]. Précisons maintenant comment elles peuvent concrètement être implémentées.

Pour la phase de rétroprojection, on peut utiliser une formule de quadrature pour l'intégration en la variable θ, comme dans le cas de la méthode de rétroprojection usuelle :

$$\mathbf{a}_{J-l}[\mathbf{n}] \simeq \frac{\pi}{N_\theta}\sum_{p=1}^{N_\theta} Q_{\theta_p}^{(l)}\left(\frac{2^l h_0}{h_s}\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Theta}_p\right)$$

Pour la phase de filtrage, on peut s'appuyer sur la transformée de Fourier rapide afin que les calculs soient efficaces. Avec les normalisations choisies dans ce manuscrit, pour tout vecteur 1D à support compact (N indices), on a

$$\mathrm{TFD}\left(\mathbf{g}\right)[k] = \sum_{n=0}^{N-1}\mathbf{g}[n]e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} = \sqrt{2\pi}\mathrm{TFTD}\left(\mathbf{g}\right)\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

et la formule (3.26) peut être discrétisée de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
Q_\theta^{(l)}(u) &\overset{\omega=\frac{2\pi k}{N}}{\simeq} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\pi}{N}\frac{h_0}{h_s}\sum_k \mathrm{TFTD}\left(\mathcal{R}_\theta f[\,]\right)\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\overline{\mathrm{TFTD}\left(\mathbf{H_l}\right)\left(\frac{h_0}{h_s}\frac{2\pi k}{N}\mathbf{\Theta}\right)}e^{i\frac{2\pi ku}{N}}\left|\frac{2\pi k}{N}\right| \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{N}\frac{h_0}{h_s}\sum_{k=-\frac{N}{4}+1}^{\frac{N}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{TFD}\left(\mathcal{R}_\theta f[\,]\right)[k]\overline{\mathrm{TFTD}\left(\mathbf{H_l}\right)\left(\frac{2\pi h_0}{h_s}\frac{k}{N}\mathbf{\Theta}\right)}e^{i\frac{2\pi ku}{N}}\left|\frac{2\pi k}{N}\right|
\end{aligned}
$$

Cette dernière quantité peut alors se calculer par une transformée de Fourier discrète inverse, comme on l'a présenté dans le chapitre précédent pour la rétroprojection filtrée (proposition (2.2.1)).
Nous avons programmé ces formules afin de pouvoir ensuite les tester sur des données locales. Nous présentons ici deux exemples de reconstruction avec des données globales : dans le cas d'un carré (figure 3.4), et dans le cas du fantôme de Shepp et Logan (figure 3.5). Les tests ont été effectués avec l'ondelette de Daubechies à 2 moments nuls, et nous avons reconstruit la transformée en ondelettes séparable 2D de profondeur 2, puis, par transformée en ondelettes inverse, l'image initiale.

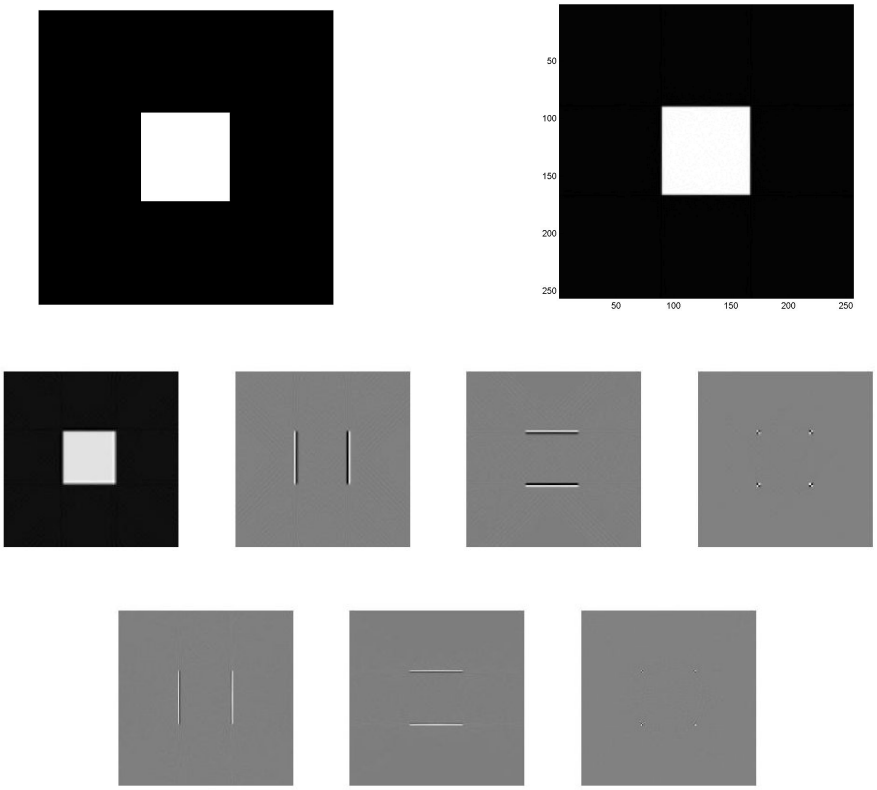


FIG. 3.4 – Reconstruction de la transformée en ondelettes 2D à partir de la transformée de Radon : en haut, à gauche, le fantôme initial, et à droite, l'image obtenue après inversion de la transformée en ondelettes 2D ; en dessous, le résultat de la reconstruction de la transformée en ondelettes 2D : sur la première ligne, l'image des coefficients d'approximation au niveau $J-2$, et les trois images des coefficients de détail au niveau $J-2$, puis, sur la deuxième ligne, les trois images des coefficients de détail au niveau $J-1$, où J désigne la résolution la plus fine (celle de l'image initiale). On a utilisé des ondelettes de Daubechies à 2 moments nuls.

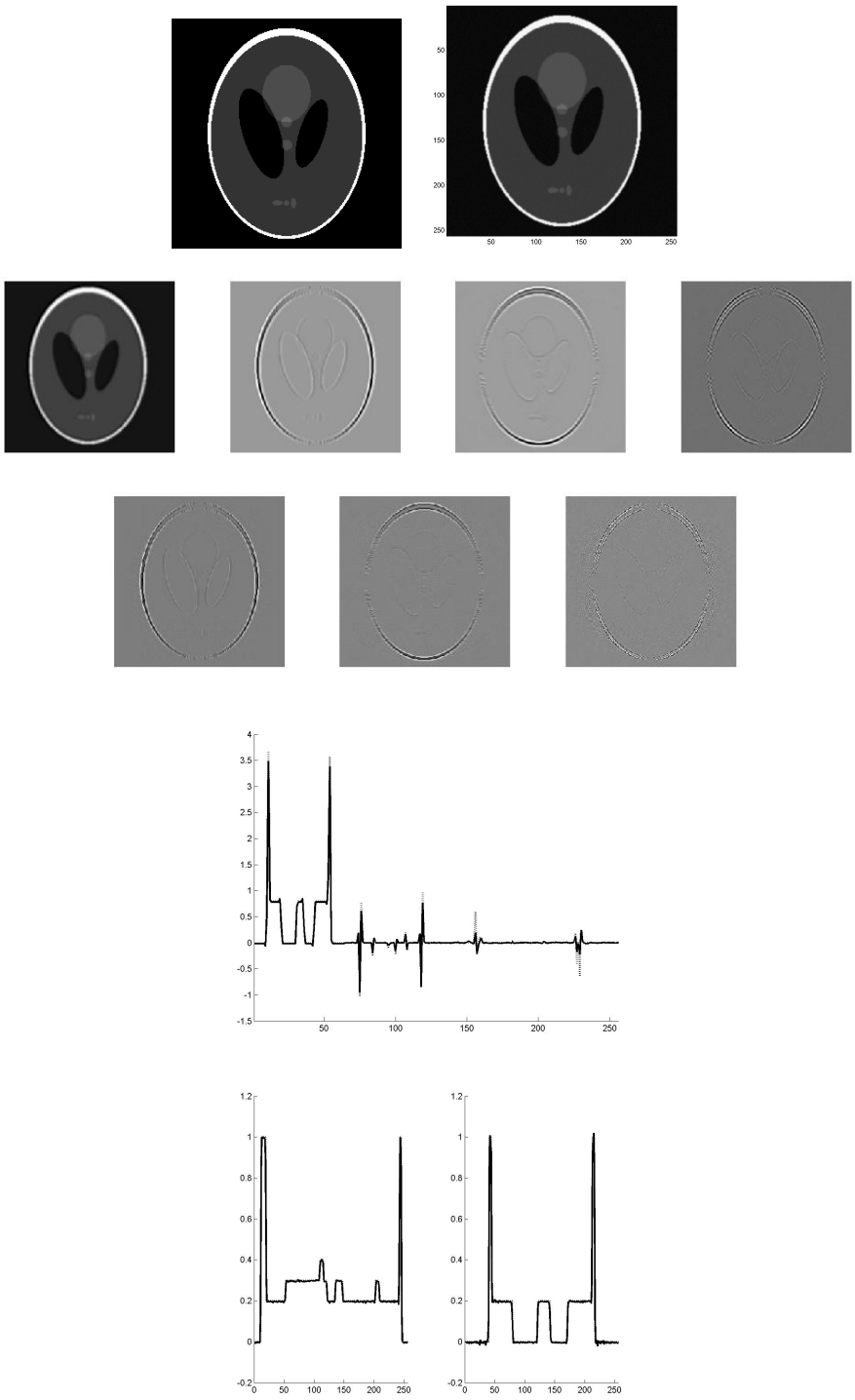


FIG. 3.5 – Reconstruction de la transformée en ondelettes 2D à partir de la transformée de Radon pour le fantôme de Shepp et Logan : en haut, à gauche, le fantôme initial, et à droite, l'image obtenue après inversion de la transformée en ondelettes 2D ; en dessous, le résultat de la reconstruction de la transformée en ondelettes 2D (même disposition que pour l'image précédente). En dessous, une section de l'image des coefficients, en gras (disposition classique pour les coefficients d'une analyse multirésolution), pour comparer avec la transformée en ondelettes 2D calculée directement à partir de l'image (en pointillés). Sur la dernière ligne, les sections centrales horizontale et verticale des images reconstruites (en gras), comparées au fantôme (en pointillé ; les deux courbes sont pratiquement confondues). On a utilisé des ondelettes de Daubechies à 2 moments nuls.

Deuxième stratégie : en fixant des ondelettes 1D.

Cette méthode a été proposée par Walnut dans [108], et, indépendamment, par F. Peyrin *et al.* dans [83]. Elle consiste à décider de la nature des ondelettes que l'on veut appliquer aux projections, pour en déduire une ondelette 2D adaptée. Nous présentons d'abord la stratégie proposée par Walnut.

Proposition 3.2.3 (Reconstruction d'une TO 2D par rétroprojection d'une famille d'ondelettes 1D[108]) *Soit $(\psi_\theta)_\theta$ une famille d'ondelettes admissibles sur $\mathbf{R}$, telles que pour tout $\theta \in [0, \pi[$, pour tout $s \in [-1, 1]$, $\psi_{\theta+\pi}(-s) = \psi_\theta(s)$; si les fonctions $(\psi_\theta)_\theta$ vérifient en outre la condition*

$$\forall \theta, 0 < \int_0^{+\infty} \frac{\left|\widehat{\psi_\theta}(\omega)\right|^2}{\omega^3} d\omega < +\infty \tag{3.27}$$

alors $\mathcal{R}^\#\psi$ est une ondelette admissible sur $\mathbf{R}^2$, et, pour toute fonction $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$, les coefficients d'ondelette de f par rapport à l'ondelette $\mathcal{R}^\#\psi$ sont donnés par

$$\mathrm{W}^{\mathcal{R}^\#\psi}(f)(a, \mathbf{b}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{2\pi} \mathrm{W}^{\psi_\theta}(\mathcal{R}_\theta f)(a, \mathbf{b} \cdot \Theta) d\theta$$

Preuve . La condition d'admissibilité a été vue dans le lemme (3.2.3). Pour les relations entre coefficients, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}^{\mathcal{R}^\#\psi}(f)(a, \mathbf{b}) &\stackrel{def}{=} < f, \left(\mathcal{R}^\#\psi\right)_{a,\mathbf{b}} > \\
&= < f, \frac{1}{\sqrt{a}} \mathcal{R}^\# \left((\psi_\theta)_{a,\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}}\right) > \text{ d'après (3.24)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{2\pi} < \mathcal{R}_\theta f, (\psi_\theta)_{a,\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}} > d\theta \text{ par définition de l'opérateur adjoint} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{2\pi} \mathrm{W}^{\psi_\theta}(\mathcal{R}_\theta f)(a, \mathbf{b} \cdot \mathbf{\Theta}) d\theta
\end{aligned}$$

■

La proposition précédente impose une contrainte sur l'ondelette ψ avec laquelle on analyse les projections : elle doit vérifier la condition d'admissibilité (3.27). La construction d'une ondelette 2D proposée par Peyrin *et al.* dans [83] (dans des travaux indépendants de [108]) permet de contourner cette contrainte supplémentaire sur ψ, et de s'autoriser le choix de n'importe quelle ondelette admissible sur $\mathbf{R}$. En effet, dans [83], les auteurs choisissent une famille d'ondelettes sur $\mathbf{R}$ (ψ_θ), et analysent ensuite les projections non pas avec la famille $(\psi_{\theta,a,b})$, mais avec la famille $(\Lambda\psi_{\theta,a,b})$. En effet, dans ce cas-là, la condition d'admissibilité sur Ψ (3.27) s'écrit

$$0 < \int_0^{\infty} \frac{\left|\widehat{\Lambda\psi_\theta}(\omega)\right|^2}{\omega^3} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\left|\widehat{\psi_\theta}(\omega)\right|}{\omega} d\omega < +\infty$$

condition qui n'est autre que la condition d'admissibilité sur chacune des ondelettes 1D ψ_θ. On peut alors montrer que la famille de fonctions $(\Lambda\psi_\theta)$ est une famille d'ondelettes 1D, et ensuite, avec le même procédé que dans [108], on peut reconstruire une transformée en ondelettes 2D : la fonction $\mathcal{R}^\#\Lambda\psi$ est une ondelette, et on peut calculer les coefficients comme ci-dessus :

$$\mathrm{W}^{\mathcal{R}^\#\Lambda\psi}(f)(\mathbf{b}, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{2\pi} \mathrm{W}^{\Lambda\psi_\theta}(\mathcal{R}_\theta f)(a, \mathbf{b} \cdot \mathbf{\Theta}) d\theta$$

Les auteurs font alors deux remarques :

1. si toutes les ondelettes 1D (ψ_θ) sont identiques (ie indépendantes de θ), toutes égales à une fonction notée ψ, et si cette fonction ψ est paire, alors l'ondelette 2D correspondante est radiale ;
2. le procédé permet de reconstruire une transformée en ondelettes directionnelle.

Explicitons le deuxième point (dans le cas où toutes les ondelettes 1D sont identiques)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{W}^{\Lambda\psi}(\mathcal{R}_\theta f)(a,\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}) &= \frac{1}{\sqrt{a}}[(\Lambda\psi)_{a,\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}}\,,\mathcal{R}_\theta f] = \frac{1}{\sqrt{a}} < \mathcal{R}_\theta^{\#}\left((\Lambda\psi)_{a,\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}}\right), f > \\ &= \sqrt{a} < \left(\mathcal{R}_\theta^{\#}\left(\Lambda\psi\right)\right)_{a,\mathbf{b}}, f >\end{aligned}$$

avec, dans le cas où g est une fonction définie sur le cylindre, indépendante de la variable θ :

$$\mathcal{R}_\theta^{\#} g(\mathbf{x}) = g(0,\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}) = g(0,\mathrm{r}_{-\theta}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{e_1}) = \mathcal{R}_0^{\#} g(\mathrm{r}_{-\theta}(\mathbf{x})) = (\mathcal{R}_0^{\#} g)_\theta(\mathbf{x})$$

et donc

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{W}^{\Lambda\psi}(\mathcal{R}_\theta f)(a,\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}) = \sqrt{a} < (\mathcal{R}_0^{\#}\Lambda\psi)_{a,\mathbf{b},\theta}, f >$$

faisant ainsi apparaître, à une constante près, un coefficient d'ondelette dans une transformée en ondelettes directionnelle.
L'ondelette-mère est $\mathcal{R}_0^{\#} g$; c'est bien une ondelette admissible 2D, puisque, en remarquant que

$$\widehat{\mathcal{R}_0^{\#}\Lambda\psi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\mathcal{R}_0^{\#}\Lambda\psi(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}d\mathbf{x} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\Lambda\psi(\mathbf{x}_1)e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}d\mathbf{x} = \widehat{\Lambda\psi}(k_1)\delta(k_2) = \widehat{\psi}(k_1)|k_1|\delta(k_2)$$

on a

$$\int_{\mathbf{R}^2}\frac{|\widehat{\mathcal{R}_0^{\#}\Lambda\psi}(\mathbf{k})|^2}{|\mathbf{k}|^2}d\mathbf{k} = \int_{\mathbf{R}^2}\frac{|\widehat{\psi}(k_1)|^2|k_1|^2\delta(k_2)}{k_1^2+k_2^2}d\mathbf{k} = \int_{\mathbf{R}}|\widehat{\psi}(k_1)|^2dk_1 = \|\psi\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)}$$

Finalement,

$$\mathrm{W}^{\Lambda\psi}(\mathcal{R}_\theta f)(a,\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}) = a\mathrm{W}^{\mathcal{R}_0^{\#}\Lambda\psi}(f)(a,\mathbf{b},\theta)$$

Notons enfin que dans tous les cas, on dispose alors d'une formule d'inversion de la transformée de Radon, puisqu'une fois que les coefficients d'ondelette 2D ont été calculés, il suffit d'appliquer une transformée en ondelettes inverse 2D.

Nous venons de présenter des méthodes d'inversion de la transformée de Radon faisant intervenir des ondelettes, pour lesquelles on faisait l'hypothèse que la transformée de Radon était complètement connue. Si le but de l'inversion est uniquement de reconstruire la fonction du domaine direct, alors, en présence de données globales, recourir à des méthodes autres que la rétroprojection filtrée ne se justifie pas. En revanche, en présence de données globales, si l'on est intéressé par une reconstruction multirésolution de l'image finale, et non par l'image finale elle-même, alors les ondelettes présentent l'intérêt d'offrir un accès direct à cette description multirésolution, sans passer par une phase de reconstruction de l'image.

Ici, notre objectif est autre : nous nous plaçons dans un contexte de données de Radon tronquées, et dans la suite, nous allons exposer comment tirer parti des ondelettes dans ces circonstances.

3.2.3 Inversion de la transformée de Radon par des approches par ondelettes de type rétroprojection filtrée (FBP) : adaptation au cas où les données sont tronquées

3.2.3.1 Moments nuls et localisation de l'inversion

Comme on l'a dit plus haut, le filtre rampe n'est pas à support compact dans le domaine direct, et par conséquent, lors de la phase de filtrage de l'algorithme de rétroprojection filtrée, toutes les valeurs de la

transformée de Radon sont mobilisées. Or, dans le problème intérieur, par exemple, pour chaque projection $\mathcal{R}_\theta f$, seules les valeurs $\{\mathcal{R}_\theta f(s); s \in [-a,a]\}$ sont disponibles (où $[-a,a]$ désigne un intervalle strictement inclus dans le support de la projection).

Les fenêtres de régularisation que l'on introduit dans l'algorithme de rétroprojection filtrée localisent le filtre rampe dans le domaine de Fourier, en tronquant, de manière plus ou moins régulière, les hautes fréquences. En revanche, elles ne sont pas construites pour traiter la singularité que porte le filtre rampe à l'origine ($\omega \mapsto |\omega|$ est continue, mais pas dérivable en 0) : cette singularité subsiste lors de la régularisation et le support du filtre rampe régularisé demeure non borné.

Dans la suite, nous allons nous intéresser à des « modifications » supplémentaires du filtre rampe par des convolutions par des ondelettes dans le but de localiser le filtre rampe dans le domaine direct. Les ondelettes sont des fonctions de moyenne nulle, ou autrement dit, des fonctions oscillantes, propriété que l'on quantifie par des attributs que l'on nomme *moments nuls*, et que l'on peut résumer ainsi : plus une fonction a de moments nuls, plus elle oscille. Or, comme on le précisera ensuite, convoler le filtre rampe avec une fonction avec moments nuls permet de le régulariser à l'origine dans le domaine de Fourier, réduisant ainsi son support. Ou, d'un autre point de vue, convoler une fonction par le filtre rampe n'élargit « pas trop » le support initial de la fonction. Cette propriété des fonctions à moments nuls vis à vis du filtre rampe vont permettre de construire des « filtres rampes modifiés » se prêtant à l'analyse et à la reconstruction locales de signaux, que l'on peut mettre en oeuvre dans des algorithmes directement inspirés de l'algorithme de rétroprojection filtrée.

Moments nuls Pour $N \in \mathbf{N}$, on dit que l'ondelette ψ a N moments nuls si ([68]) :

$$\forall k = 0..N-1,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) t^k dt = 0$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) t^k dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) t^k e^{it\omega} dt \Big|_{\omega=0}$$

avec

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) t^k e^{it\omega} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{d\omega^k} \left(\psi(t) e^{it\omega}\right) dt = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{d\omega^k} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{it\omega} dt\right) \\ &\quad \textit{(en appliquant le théorème de dérivation des intégrales à paramètres [45])} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{i^k} \frac{d^k}{d\omega^k} \left(\hat{\psi}\right)(\omega)\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) t^k dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{i^k} \hat{\psi}^{(k)}(0)$$

et donc ψ a N moments nuls si et seulement si pour tout $k = 0 \cdots N-1$, $\hat{\psi}^{(k)}(0) = 0$. En particulier, le premier moment d'une fonction est sa moyenne : ψ a un moment nul si et seulement si $\hat{\psi}(0) = 0$.

Rappelons ici que par définition, une ondelette ψ est une fonction appartenant à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}) \cap \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ qui vérifie

$$\int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty$$

Une ondelette ψ est donc, en particulier, une fonction telle que la fonction $\omega \mapsto \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}$ est intégrable en zéro. Ceci n'est possible que si $\hat{\psi}(0) = 0$. Toute ondelette est donc nécessairement une fonction de moyenne nulle (et donc a au moins un moment nul).

Moments nuls et filtre rampe Nous allons expliquer ici comment les moments nuls permettent de résister (en terme d'élargissement du support) à l'action du filtre rampe, qui, rappelons-le, s'exprime avec l'opérateur Λ dans le domaine direct (cf. chapitre 2).

Proposition 3.2.1 (Décroissance après application du filtre rampe et moments nuls)
Soit $a > 0$, et g une fonction avec $N+1$ moments nuls, dont le support est inclus dans l'intervalle $[-a, a]$.
Alors, à l'extérieur de l'intervalle $[-a, a]$,

$$|\Lambda g(s)| \leq \frac{1}{\pi} \frac{N+2}{|s-a|^{N+3}} \int_{-a}^{a} \left| g(u) u^{N+1} \right| du$$

Si le premier moment est non nul, mais si les N suivants sont nuls

$$|\Lambda g(s)| \leq \frac{1}{\pi s^2} + \frac{1}{\pi} \frac{N+2}{|s-a|^{N+3}} \int_{-a}^{a} \left| g(u) u^{N+1} \right| du$$

Preuve . (d'après [90]) On fixe $s \in \mathbf{R}$, hors du support de g : $s \notin [-a, a]$.

$$\Lambda g(s) = -\frac{1}{\pi} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) * \partial_s g(s) = -\frac{1}{\pi} < \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), (\tau_s \partial_s g)_\sigma > \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|t| \geq \epsilon} \frac{g'(s-t)}{t} dt \text{ (Cf. (??))}$$

Or, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{|t| \geq \epsilon} \frac{g'(s-t)}{t} dt &= \left[\frac{-g(s-t)}{t}\right]_{\epsilon}^{+\infty} + \left[\frac{-g(s-t)}{t}\right]_{-\infty}^{-\epsilon} - \int_{|t| \geq \epsilon} \frac{g(s-t)}{t^2} dt \\ &\quad \text{(car il existe } A > 0 \text{ tel que : } |t| \geq A \Leftrightarrow s - t \notin [-a, a] \Leftrightarrow g(s-t) = 0) \\ &= \frac{g(s-\epsilon) + g(s+\epsilon)}{\epsilon} - \int_{|t| \geq \epsilon} \frac{g(s-t)}{t^2} dt \end{aligned}$$

En notant alors qu'il existe $\epsilon_s > 0$ tel que, pour tout $\epsilon < \epsilon_s$, $s - \epsilon$ appartient à un voisinage de s hors du support $[-a, a]$ de f, on en déduit que

$$\forall \epsilon < \epsilon_s,\ g(s-\epsilon) = g(s+\epsilon) = 0$$

et donc

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|t| \geq \epsilon} \frac{g'(s-t)}{t} dt = -\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|t| \geq \epsilon} \frac{g(s-t)}{t^2} dt = \int_{s-a}^{s+a} \frac{g(s-t)}{t^2} dt \text{ car} s > a$$

Par ailleurs, d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $t_s \in]s-a, s+a[$ tel que pour tout $t \in]s-a, s+a[$,

$$\begin{aligned} \frac{g(s-t)}{t^2} &= \frac{g(s-t)}{(s+(t-s))^2} \\ &= g(s-t) \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(t-s)^k}{k!} \frac{(-1)^k (k+1)!}{s^{k+2}} + \frac{(t-s)^{N+1}}{(N+1)!} \frac{(-1)^{N+1} (N+2)!}{t_s^{N+3}} \right) \\ &= g(s-t) \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(k+1)(s-t)^k}{s^{k+2}} + \frac{(N+2)(s-t)^{N+1}}{t_s^{N+3}} \right) \end{aligned}$$

et

$$\int_{s-a}^{s+a} \frac{g(s-t)}{t^2} dt = \int_{s-a}^{s+a} g(s-t) \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(k+1)(s-t)^k}{s^{k+2}} + \frac{(N+2)(s-t)^{N+1}}{t_s^{N+3}} \right) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{k+1}{s^{k+2}} \int_{s-a}^{s+a} g(s-t)(s-t)^k dt + \frac{N+2}{t_s^{N+3}} \int_{s-a}^{s+a} g(s-t)(s-t)^{N+1} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{k+1}{s^{k+2}} \int_{-a}^{+a} g(u) u^k du + \frac{N+2}{t_s^{N+3}} \int_{-a}^{a} g(u) u^{N+1} du$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{k+1}{s^{k+2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) u^k du + \frac{N+2}{t_s^{N+3}} \int_{-a}^{a} g(u) u^{N+1} du \text{ car } qg \text{ est à support dans } [-a, a]$$

Si g a $N+1$ moments nuls,

$$\int_{s-a}^{s+a} \frac{g(s-t)}{t^2} dt = \frac{N+2}{t_s^{N+3}} \int_{-a}^{a} g(u) u^{N+1} du$$

et donc

$$\left| -\frac{1}{\pi} \int_{s-a}^{s+a} \frac{g(s-t)}{t^2} dt \right| = \frac{1}{\pi} \left| \frac{N+2}{t_s^{N+3}} \int_{-a}^{a} g(u) u^{N+1} du \right| \leq \frac{1}{\pi} \frac{N+2}{|t_s|^{N+3}} \int_{-a}^{a} \left| g(u) u^{N+1} \right| du$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \frac{N+2}{|s-a|^{N+3}} \int_{-a}^{a} \left| g(u) u^{N+1} \right| du$$

Si le premier moment est non nul (avec $\int g(t)dt = 1$), et si les N suivants le sont,

$$\int_{s-a}^{s+a} \frac{g(s-t)}{t^2} dt = \frac{1}{s^2} + \frac{N+2}{t_s^{N+3}} \int_{-a}^{a} g(u) u^{N+1} du$$

et

$$\left| -\frac{1}{\pi} \int_{s-a}^{s+a} \frac{g(s-t)}{t^2} dt \right| = \frac{1}{\pi} \left| \frac{1}{s^2} + \frac{N+2}{t_s^{N+3}} \int_{-a}^{a} g(u) u^{N+1} du \right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi s^2} + \frac{1}{\pi} \frac{N+2}{|s-a|^{N+3}} \int_{-a}^{a} \left| g(u) u^{N+1} \right| du$$

■

Les conséquences en tomographie locale sont les suivantes : si l'on fixe une ondelette 2D, on a vu plus haut que l'on peut reconstruire les coefficients d'ondelettes 2D en appliquant à chaque projection le filtre $\Lambda \mathcal{R}_\theta \Psi$, qui, par rapport à la rétroprojection filtrée, remplace le filtre rampe. L'idée est alors que si l'ondelette Ψ a plusieurs moments nuls, alors pour tout θ, le support du filtre $\Lambda \mathcal{R}_\theta \Psi$ est sensiblement le même que le support de $\mathcal{R}_\theta \Psi$; par conséquent, au moins aux fines échelles, c'est-à-dire tant que le support de Ψ n'est pas plus large que le diamètre de la région d'exposition (à des marges près), alors on peut filtrer les projections localement, et, par suite, on peut reconstruire localement les coefficients d'ondelettes.

Le deuxième point de la proposition précédente est à la base des travaux de Rashid Farrokhi *et al.* dans [90] : les auteurs ont constaté que certaines fonctions d'échelle ont un moment nul (pas le premier, puisqu'une fonction d'échelle n'est pas de moyenne nulle, mais le suivant) ; par conséquent, les coefficients d'échelle peuvent aussi être reconstruits par des filtres dont le support est contrôlé.

Dans l'exemple qui suit, nous illustrons le support, après application du filtre rampe, de $\Lambda \mathcal{R} \Psi$, pour un choix de l'ondelette chapeau mexicain 2D, puis de $\Lambda \psi$, pour des ondelettes de Daubechies : pour ces

dernières, on constate bien que plus une ondelette a de moments nuls, moins son support est élargi par le filtre rampe ; en revanche, on voit apparaître le compromis auquel on est confronté, car simultanément, plus une ondelette a de moments nuls, plus son support initial est grand.

Exemple 3.2.1 (Chapeau mexicain)
Pour l'ondelette chapeau mexicain 2D, on a

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{\Delta} \left(e^{-\frac{|\mathbf{x}|}{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x_1^2 + x_2^2 - 2) e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$$

et donc, dans le domaine de Fourier,

$$\hat{\Psi}(\mathbf{k}) = \hat{\Psi}(k_1, k_2) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (k_1^2 + k_2^2) e^{-\frac{k_1^2 + k_2^2}{2}}$$

On en déduit, par le théorème de coupe-projection, que

$$\widehat{\mathcal{R}_\theta \Psi}(\omega) = \sqrt{2\pi} \hat{\Psi}(\omega \Theta) = -\omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

puis, en appliquant le filtre rampe, on obtient :

$$\widehat{\Lambda \mathcal{R}_\theta \Psi}(\omega) = -|\omega|^3 e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

On en déduit alors l'expression du filtre dans le domaine direct :

$$\begin{aligned} \Lambda \mathcal{R}_\theta \Psi(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \widehat{\Lambda \mathcal{R}_\theta \Psi}(\omega) e^{i\omega s} d\omega = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^3 e^{-\frac{\omega^2}{2}} e^{i\omega s} d\omega \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \omega^3 e^{-\frac{\omega^2}{2}} \cos(\omega s)\, d\omega \end{aligned}$$

Cette dernière expression peut se réécrire de la manière suivante (grâce au logiciel `Maple`*) :*

$$\Lambda \mathcal{R}_\theta \Psi(s) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(2 - s^2 - \frac{1}{2} e^{-\frac{s^2}{2}} \operatorname{erfi}\left(\frac{s\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{\pi} s \sqrt{2} (3 - s^2) \right)$$

où on a noté erfi *la fonction* erreur imaginaire *définie, pour tout réel* s*, par* $\operatorname{erfi}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{t^2} dt$*. On trouvera une représentation de la fonction* $\Lambda \mathcal{R} \Psi$ *en figure (3.6).*
On trouvera également, en figure (3.7), les graphiques d'ondelettes de Daubechies superposées aux filtres obtenus après application du filtre rampe, pour un nombre de moments nuls croissant. Ces graphiques ont été obtenus grâce à la fonction `MakeWavelet` *de la boîte à outils* `Wavelab`*.*

3.2.3.2 Algorithmes essentiellement locaux

Nous présentons ici une première classe d'algorithmes prenant en compte des données locales. Les algorithmes exposés dans cette partie se placent dans un contexte où l'on s'intéresse à la reconstruction d'une région d'intérêt, lorsque *toutes* les valeurs de la transformée de Radon sont accessibles (ie au travers mais aussi à l'extérieur de la région d'intérêt). L'objectif est alors d'utiliser le moins de mesures possibles à l'extérieur de la région d'intérêt pour reconstruire *exactement* la région d'intérêt (*a contrario*, dans la partie suivante, seules des données locales seront disponibles, et l'on essaiera alors de faire la reconstruction la plus fidèle possible de la région d'intérêt, tout en sachant qu'une reconstruction exacte est impossible). Ici, on parle donc d'algorithmes *essentiellement locaux*.

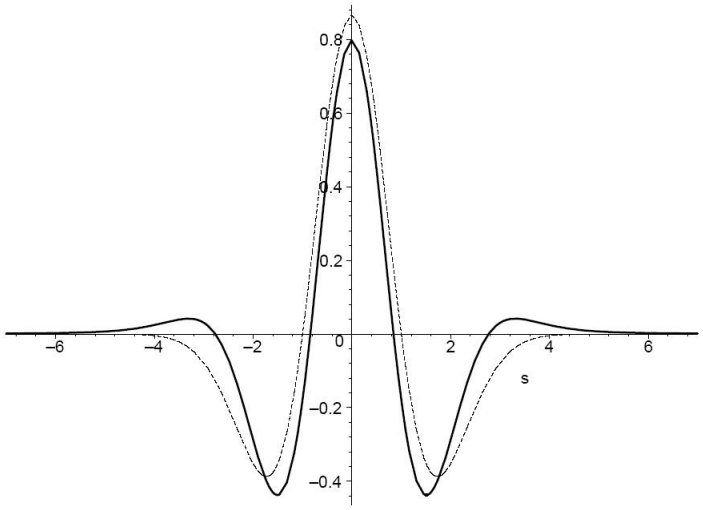


FIG. 3.6 – Ondelette 1D $\Lambda\mathcal{R}\Psi$ associée à un chapeau mexicain 2D Ψ (à titre de comparaison, on a également tracé, en pointillés, le graphe de l'ondelette chapeau mexicain 1D)

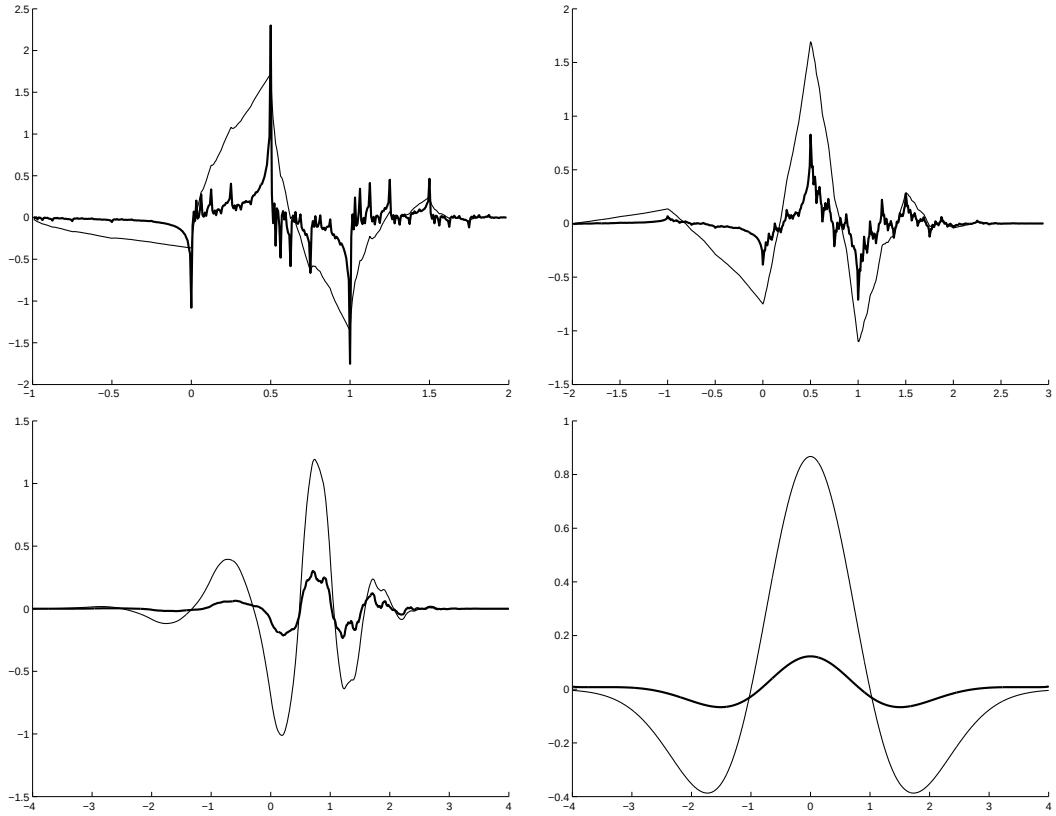


FIG. 3.7 – Ondelettes $\Lambda\psi$ superposées aux ondelettes initiales (tracées en figure (3.3)), pour les ondelettes 1D de Daubechies à 2, 3 et 5 moments nuls, et pour le chapeau mexicain 1D.

Première méthode essentiellement locale : reconstruction avec résolution localisée avec des méthodes d'ondelettes 1D.

Cette méthode a été développée par T. Olson et J. DeStefano [81]. Elle s'appuie sur la formule d'inversion vue dans la propriété (3.2.1), dans laquelle on injecte une décomposition de chacune des projections dans la formule d'inversion par rétroprojection filtrée : le filtre rampe porte alors sur chacune des ondelettes 1D, et les coefficients d'ondelettes qui interviennent sont ceux de la décomposition en ondelettes 1D de la transformée de Radon :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \sum_{j,k} \int_0^\pi c_{j,k}(\theta) \Lambda \psi_{j,k}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}) d\theta$$

où

$$c_{j,k}(\theta) =< \mathcal{R}_\theta f, \psi_{j,k} >$$

L'idée, qui exploite la "cohérence" de la transformée de Radon en la variable θ, mentionnée au début du chapitre 2, est la suivante : si on fixe un couple (j,k), alors pour une incidence θ_1 le coefficient d'ondelette $c_{j,k}(\theta_1)$ de la projection $\mathcal{R}_{\theta_1} f$ est peu différent du coefficient d'ondelette $c_{j,k}(\theta_2)$ calculé pour une projection voisine $\mathcal{R}_{\theta_2} f$, ceci étant d'autant plus vrai que l'échelle j est grossière.

Cette affirmation, que nous justifierons brièvement ensuite, peut être illustrée par la figure (3.8) : pour un signal 1D donné, on a tracé, une échelle et une position étant fixées, l'évolution en fonction de θ des coefficients d'ondelettes des projections ; chaque graphique est associé à une échelle, et pour chaque échelle, on a tracé les courbes pour quelques localisations du coefficient d'ondelette. Pour l'échelle la plus grossière (en haut à gauche), on calcule un seul coefficient d'ondelette pour chacune des projections, et on constate qu'il ne varie pas d'une projection à l'autre (ce qui est normal, puisque ce coefficient est aussi la valeur moyenne de l'image, qui est égale à la valeur moyenne de chacune des projections). Ensuite, de gauche à droite puis de haut en bas, l'échelle devient plus fine, et l'on constate que plus l'échelle augmente, plus les coefficients d'ondelettes varient d'une projection à l'autre.

Sans la formaliser complètement (on pourra se reporter à [81] pour plus de détails) nous allons maintenant donner une brève justification du lien qui existe entre l'échelle d'analyse et la vitesse de variation des coefficients d'ondelettes d'une projection à l'autre.

Pour une échelle j et une position k fixées, le coefficient d'ondelette 1D de la projection $\mathcal{R}_\theta f$ est égal à

$$c_{j,k}(\theta) \quad = \quad < \psi_{j,k}, \mathcal{R}_\theta f >=< \widehat{\psi_{j,k}}, \widehat{\mathcal{R}_\theta f} > \tag{3.28}$$

Or, on a vu dans la propriété (2.2.3) que la transformée de Radon peut s'écrire comme une combinaison linéaire de produits tensoriels de polynômes en s par des fonctions $\cos$ et $\sin$ en θ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f \quad &= \quad \sum_{l \in \mathbf{N}} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{\epsilon=1}^{2} \sigma_{l,l-2m} < f, f_{l,l-2m,\epsilon} > g_{l,l-2m,\epsilon} \\ &= \quad \sum_{l \in \mathbf{N}} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{\epsilon=1}^{2} \alpha_{l,l-2m,\epsilon} w(s) U_l(s) Y_{l-2m}(\mathbf{\Theta}) \end{aligned}$$

Si l'on reprend le calcul (3.28), on peut donc écrire :

$$c_{j,k}(\theta) \quad = \quad < \widehat{\psi_{j,k}}, \widehat{\mathcal{R}_\theta f} >= \sum_{l \in \mathbf{N}} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{\epsilon=1}^{2} \alpha_{l,l-2m,\epsilon} < \widehat{\psi_{j,k}}, \widehat{wU_l} > Y_{l-2m}(\mathbf{\Theta})$$

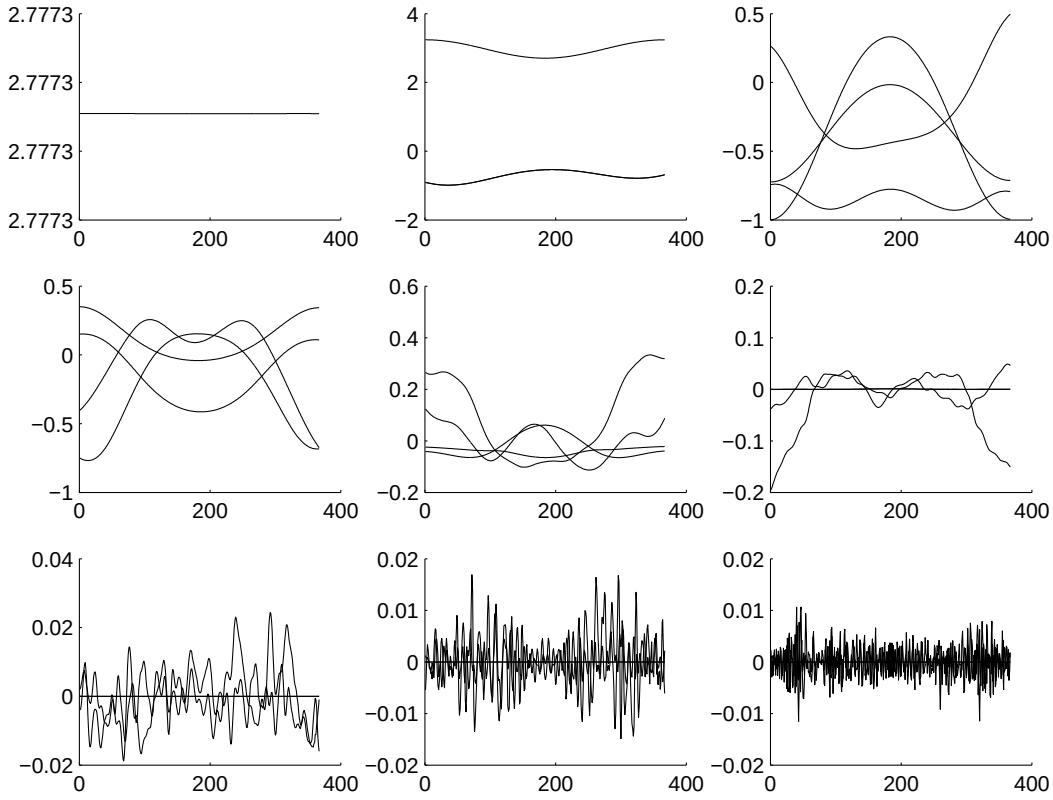


FIG. 3.8 – Evolution de l'amplitude des coefficients d'ondelettes $c_{j,k}(\theta)$ vus comme des fonctions de θ ($\theta \in [0, 360]$) : chaque graphique correspond à une échelle 2^j ($j = 0, 1, \cdots, 8$), et pour chaque échelle on a représenté l'évolution des coefficients pour quelques localisations k : plus l'échelle est grossière (premiers graphiques), plus la variation de ces coefficients d'une incidence θ à une incidence voisine est réduite.

Or il s'avère que la transformée de Fourier du polynôme de Tchebycheff U_l vérifie la relation suivante [78] (p. 198) :

$$\widehat{(wU_l)}(\omega) = C_l \frac{J_{l+1}(\omega)}{\omega}$$

où C_l est une constante, et où J_{l+1} désigne la fonction de Bessel de première espèce et de degré $l+1$; quel que soit l'entier l, la formule de Debye [78] permet d'affirmer que $J_{l+1}(\omega) \simeq 0$ dès que $|\omega| > l$.

Pour $\psi_{j,k}$ fixée, on sait que sa transformée de Fourier est concentrée dans une (ou deux) bande(s) de fréquences, d'autant plus proches de 0 que l'échelle j est grossière ; par conséquent, pour j grossière, seuls les coefficients $\left(< \widehat{\psi_{j,k}}, \widehat{wU_l} > \right)_{l \in \mathbf{N}}$ associés aux *petites* valeurs de l sont non nuls (soit $l \leq l_0$), et par conséquent, il ne subsiste dans la décomposition de $c_{j,k}(\theta)$ que des composantes $Y_r(\mathbf{\Theta})$ avec $r \leq l_0$, c'est à dire des composantes "basses fréquences", qui varient peu en fonction de θ. En revanche, quand l'échelle j va devenir plus fine, des composantes $Y_r\theta$, avec r plus élevé, vont apparaître dans la décomposition de $c_{j,k}(\theta)$, de telle sorte que les variations en fonction de θ vont pouvoir être plus rapides.

De manière plus précise, dans [81], les auteurs utilisent le fait que la plus grande fréquence contenue dans $\theta \mapsto c_{j,k}(\theta)$ (à (j,k) fixés) est divisée par deux quand on passe d'une échelle à l'échelle immédiatement plus grossière, et s'appuyant sur la théorie de l'échantillonnage de Shannon, évoquée dans le chapitre 2, en tirent le schéma de calcul suivant :

- à l'échelle J la plus fine, on calcule pour chaque angle θ tous les coefficients d'ondelettes $\left(c_{J,k}(\theta)\right)_k$ de la projection $\mathcal{R}_\theta f$;
- à l'échelle $J-1$, on calcule tous les coefficients d'ondelettes $\left(c_{J-1,k}(\theta)\right)_k$ *seulement* pour une incidence θ sur deux, et on en déduit la valeur des coefficients intermédiaires par interpolation grâce à la formule de Shannon ;
- on continue ensuite à l'échelle $J-2$, on calcule tous les coefficients d'ondelettes $\left(c_{J-2,k}(\theta)\right)_k$ *seulement* pour une incidence θ sur quatre ;
- $\ldots$
- à l'échelle la plus grossière (échelle 0), on calcule tous les coefficients d'ondelettes $\left(c_{0,k}(\theta)\right)_k$ *seulement* pour une incidence θ sur 2^J.

Le schéma de mesures des données permettant de reconstruire une région intérieure de rayon a s'en déduit :

- pour reconstruire les coefficients à l'échelle la plus fine J, il suffit de mesurer la transformée de Radon à travers cette région, avec une marge m en la variable s correspondant au support de l'ondelette à cette échelle la plus fine (marge permettant de reconstruire les coefficients d'ondelette des projections au bord des segments $[-a, a]$).
- pour reconstruire les coefficients à l'échelle suivante $J-1$, on peut réduire la fréquence d'échantillonnage angulaire d'un facteur 2, et il faut doubler la marge pour reconstruire les coefficients au bord (le support de l'ondelette est doublé) ; les mesures de la transformée de Radon à travers la région intérieure sont de toute façon faites (cf. étape précédente) : il suffit donc d'ajouter les mesures de la transformée de Radon pour une incidence sur deux sur l'intervalle $[-a-2m, a+2m]$.
- on réitère ce processus jusqu'à l'échelle la plus grossière (l'échelle 0), pour laquelle on effectue des mesures de la transformée de Radon à travers tout l'objet (c'est-à-dire des mesures globales) ; mais au lieu d'irradier les structures les plus éloignées de la région d'intérêt pour chaque incidence, on ne les irradie que pour une projection sur 2^J projections.

Nous illustrons cette technique par deux exemples, avec un algorithme programmé par nos soins.

Exemple 3.2.2 (Reconstruction d'un élément du noyau à partir de données essentiellement locales) *Nous reprenons l'exemple présenté dans [81]. On considère la fonction f définie dans le domaine de Radon par*

$$\forall \theta,\ \mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}, s) = g(\mathbf{\Theta}, s)$$

où

$$g(\mathbf{\Theta}, s) = \begin{cases} 1 & si\ \frac{1}{16} < |s| \leq \frac{1}{32} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

(Par des arguments dits de consistance des données *[78], on pourrait montrer que la fonction g est effectivement dans l'image de $\mathcal{R}$.)*
Le sinogramme de g est présenté en haut à gauche en figure (3.9).
En appliquant l'algorithme de rétroprojection filtrée à $\mathcal{R}f$, on obtient la fonction f, représentée au milieu à gauche en figure (3.9).
Si on choisit comme région d'intérêt le disque de rayon $\frac{1}{16}$ du domaine direct, alors, comme dans l'exemple présenté en figure (2.16), la fonction f appartient au noyau de la transformée de Radon intérieure. Pour autant, elle n'est pas nulle à l'intérieur de la région d'intérêt. Un algorithme d'inversion locale qui s'appuierait sur des données strictement locales conduirait à une reconstruction nulle dans la région d'intérêt. Ce n'est pas le cas avec l'algorithme essentiellement local présenté ici. A droite en figure (3.9), on trouvera en haut les données essentiellement locales retenues dans le sinogramme en vue de l'inversion, et au milieu la reconstruction obtenue (on a utilisé des ondelettes de Daubechies D6). Sur la dernière ligne sont tracées les sections centrales de ces reconstructions : on constate que la fonction est reconstruite dans la région d'intérêt de manière similaire avec les deux méthodes.

Nous proposons un deuxième exemple, avec une région intérieure choisie dans le fantôme de Shepp et Logan.

Exemple 3.2.3 (Reconstruction à partir de données essentiellement locales pour le fantôme de SL) *Avec la même technique que dans l'exemple précédent, on reconstruit une région intérieure dans le fantôme de Shepp et Logan, à partir d'un sinogramme complet au travers de la région d'intérêt, et sous-échantillonné pour les données extérieures (à droite sur la première ligne en figure (3.10)). La reconstruction obtenue à partir de données essentiellement locales est présentée sur la 2ème colonne, avec un zoom sur la région d'intérêt, et la section centrale présentée à gauche sur la dernière ligne : on parvient à une reconstruction correcte dans la région d'intérêt, la densité du fantôme étant quasiment atteinte.*

A titre de comparaison, on a représenté le résultat obtenu avec la méthode de rétroprojection filtrée basée sur des données strictement locales. Comme on l'a dit dans le chapitre 2, cette méthode présente une qualité d'image très satisfaisante (même si elle ne permet pas d'atteindre aussi bien la densité dans la région d'intérêt que la méthode essentiellement locale, elle permet de visualiser très clairement les différentes structures).

Deuxième méthode essentiellement locale : reconstruction avec résolution localisée avec des méthodes d'ondelettes 2D.

Cette méthode a été proposée par Delaney et Bresler [29].
On se place dans le cadre d'une analyse multirésolution orthonormée de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$; étant donné une région d'intérêt, les auteurs proposent de reconstruire l'image globale à basse résolution, et de lui ajouter ensuite les seuls détails permettant de reconstruire la région d'intérêt (et seulement celle-ci) à haute résolution. De plus, par des observations similaires à celles que nous venons de détailler dans la méthode proposée par Olson et DeStefano, les auteurs tirent partis du contenu fréquentiel des différentes *sous-bandes* d'images petit à petit ajoutées pour réduire la quantité de mesures de la transformée de Radon effectuées : les coefficients aux échelles grossières sont calculés à partir de mesures effectuées pour des incidences

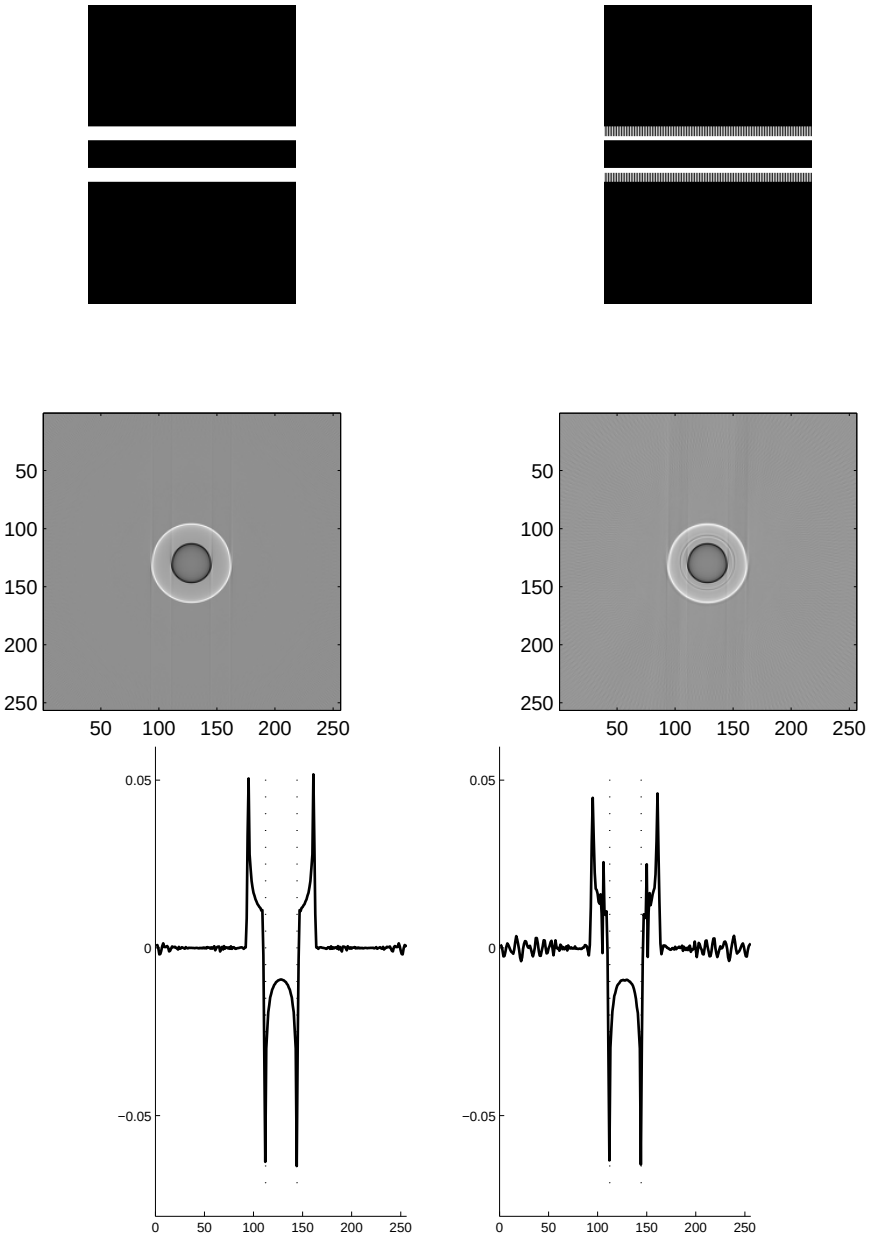


FIG. 3.9 – Reconstruction d'un élément du noyau de la transformée de Radon intérieure à partir d'un algorithme essentiellement local (voir explications dans l'exemple 3.2.2) : sur la première ligne, à gauche, le sinogramme global, et à droite, le sinogramme « essentiellement local » utilisé (cf. construction du schéma de mesures décrite juste avant l'exemple 3.2.2) ; sur la deuxième ligne, à gauche, la reconstruction obtenue par rétroprojection filtrée avec des données globales ; à droite, la reconstruction obtenue à partir du sinogramme essentiellement local ; comme on peut le constater sur les sections centrales associées à ces reconstructions et figurant sur la dernière ligne, la fonction est reconstruite dans la région d'intérêt de la même manière avec les deux méthodes.

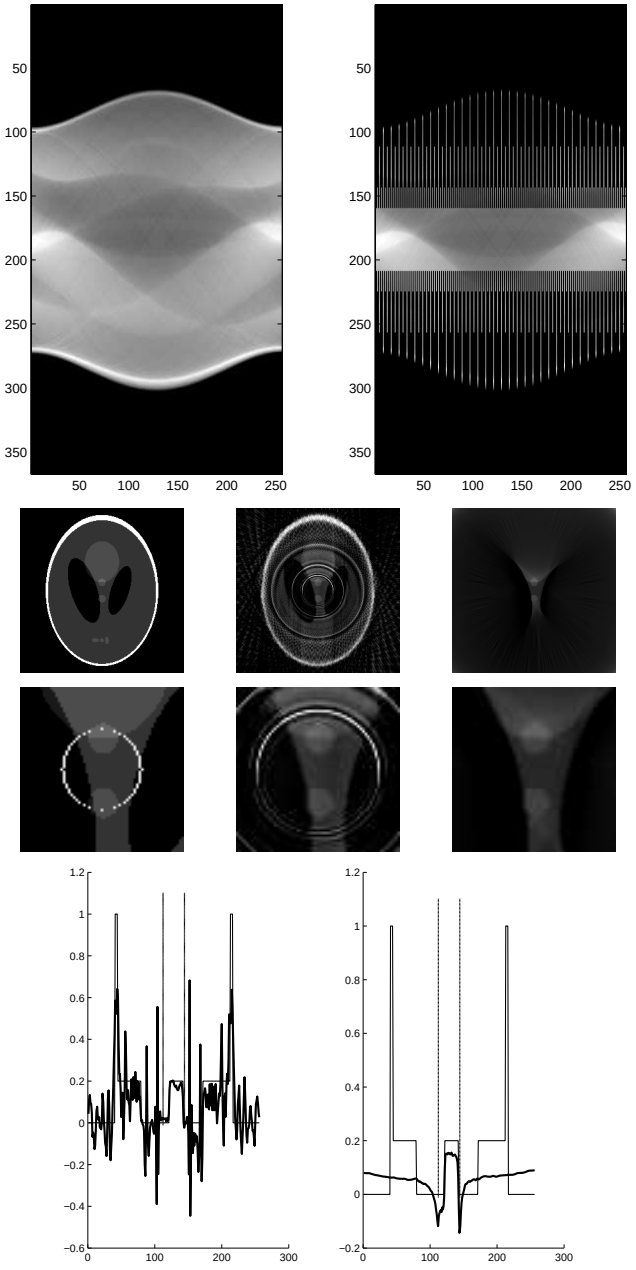


FIG. 3.10 – Reconstruction d'une région intérieure du fantôme de Shepp et Logan : en haut, le sinogramme complet, puis le sinogramme essentiellement local. Ensuite, sur la 1ère colonne, sont représentés le fantôme et un zoom sur la région d'intérêt ; sur la 2ème colonne, la reconstruction obtenue à partir de données essentiellement locales, avec la section centrale à gauche sur la dernière ligne : on parvient à une reconstruction correcte dans la région d'intérêt, la densité exacte étant quasiment atteinte. A titre de comparaison, on a représentéen 3ème colonne, puis à droite sur la dernière ligne, le résultat obtenu avec la méthode de rétroprojection filtrée basée sur des données strictement locales.

espacées, puis, d'échelle plus fine en échelle plus fine, la quantité d'angles pour laquelle on effectue les mesures est multipliée par deux ; ainsi, il y a, à peu près, seulement au travers de la région d'intérêt que l'on mesure la transformée de Radon autant que pour la méthode de rétroprojection filtrée.

Les formules utilisées dans cette méthode ont été explicitées plus haut dans le paragraphe (3.2.2.2).

3.2.3.3 Algorithmes strictement locaux

A la différence des algorithmes qui viennent d'être présentés, on se place dans le contexte où seules des données locales ont été mesurées (autrement dit aucune donnée extra-locale n'est disponible).

Ces algorithmes s'appuient sur les formules de reconstruction de coefficients en ondelette 2D énoncées dans le paragraphe (3.2.2.2). Ils consistent à reconstruire les coefficients de détail d'une analyse en ondelette 2D à partir des données locales, en se limitant à une échelle suffisamment fine pour que les filtres discrets 1D modifiés par le filtre rampe aient leur support inclus dans la largeur de projections disponibles (en pratique, dans [90, 11], un seul niveau de décomposition est calculé). Dans [90], les auteurs se placent dans le cadre d'une analyse multirésolution orthonormée, et reconstruisent donc trois familles de coefficients de détail, alors que dans [11], les auteurs reconstruisent les coefficients de détail d'une analyse multirésolution quinconce, soit une seule famille.

Nous présentons en figure (3.11) et (3.12) les résultats que nous avons obtenus en programmant cette méthode dans le cas orthonormé, pour l'exemple du fantôme de Shepp et Logan (taille 256×256), pour une région d'exposition de rayon 32 pixels, et ceci pour deux ondelettes : l'ondelette de Daubechies à 2 moments nuls, et l'ondelette de Daubechies à 4 moments nuls. Les résultats obtenus sont visuellement similaires à ceux qui son proposés par Berenstein et Walnut dans [8], dans des travaux qui précédaient [90]. Dans les deux cas, on constate que les coefficients de détail sont reconstruits comme si l'on appliquait le même algorithme avec des données globales au coeur de la région d'exposition.

On est toutefois conduit à remarquer que l'on voit apparaître des marges entre la région correctement reconstruite et la région d'exposition qui représentent presque la moitié du rayon d'exposition. En effet, même si l'ondelette de Daubechies D2 correspond à un filtre discret de largeur 4, son support après filtrage par le filtre rampe est étendu. Dans le deuxième cas, l'ondelette a certes plus de moments nuls, mais le fait que son support initial soit plus large fait qu'après filtrage par le filtre rampe, la largeur de données mobilisées pour reconstruire correctement un coefficient reste étendue.

Cette méthode de reconstruction des coefficients d'ondelettes aux fines échelles a été prolongée dans [90], puis reprise dans [11], en s'appuyant sur la remarque que nous avons évoquée au paragraphe (3.2.3.1) : certains filtres d'échelle présentent la propriété d'avoir des moments nuls (pas le premier, mais plusieurs suivants), et de ce fait, sont *a priori* peu sensibles au filtre rampe. Dans ces travaux, les auteurs choisissent donc des filtres d'échelle de ce type, et affirment pouvoir reconstruire *essentiellement* localement les coefficients d'échelle (au premier niveau de décomposition), dans la région d'intérêt, à partir de données locales. Ils obtiennent des reconstructions où la différence entre la fonction reconstruite et le fantôme initial dans la région d'intérêt est à peu près une constante.

Nous avons reproduit ces expériences avec l'ondelette de Daubechies à 2 moments nuls, qui *a priori* ne fait pas partie des ondelettes préconisées dans les travaux que nous venons de citer. Nous parvenons également à une reconstruction dans la région d'intérêt qui diffère "à peu près" d'une constante avec le fantôme initial, comme on pourra le voir en figure (3.13). Il nous semble qu'en fait ceci était prévisible, et ne dépend pas du choix de l'ondelette (et des moments nuls associés aux coefficients d'échelle), car nous pensons qu'en ajoutant les coefficients d'échelle, la fonction obtenue après inversion de la trans-

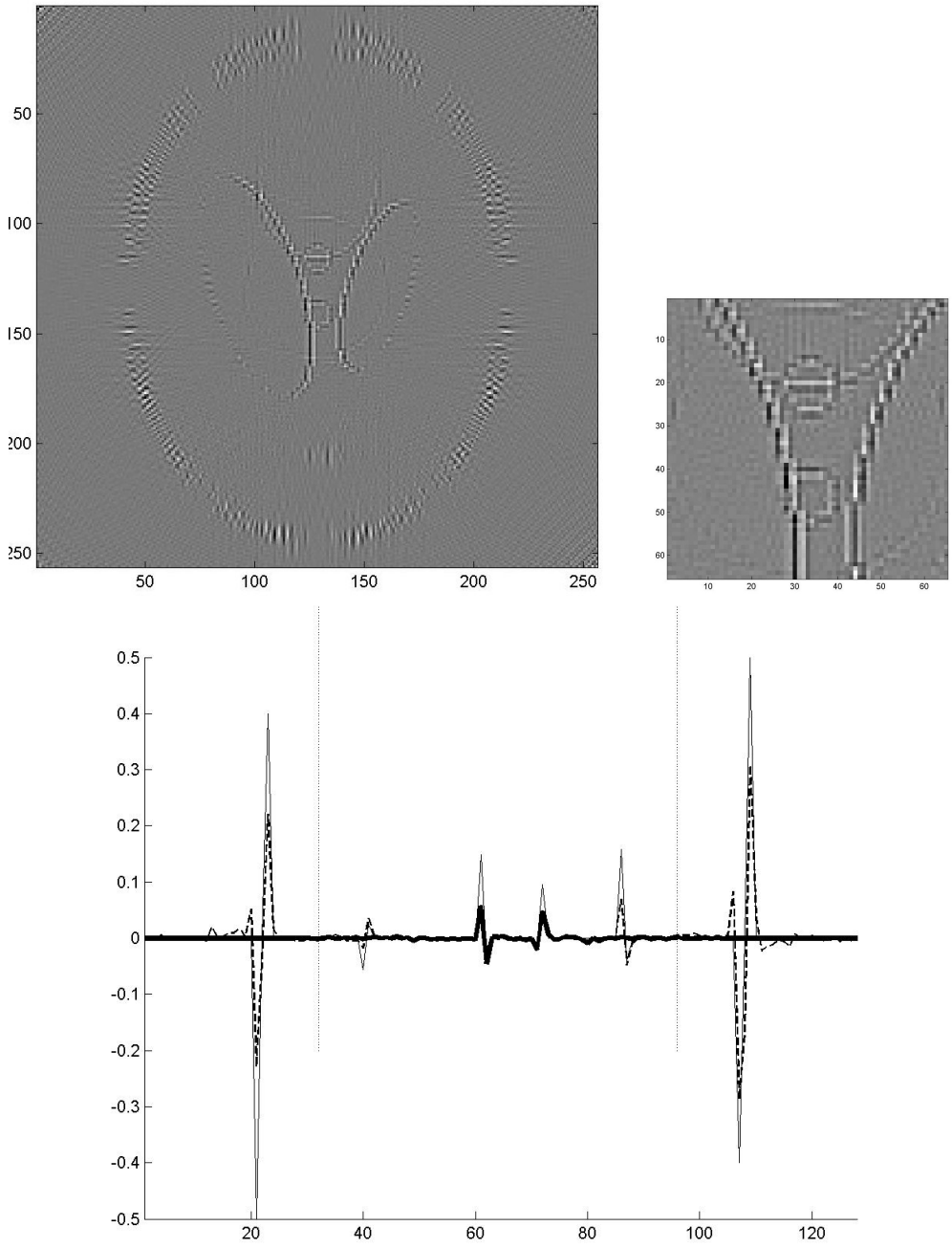


FIG. 3.11 – Inversion de la transformée de Radon à partir de données strictement locales : reconstruction des coefficients de détail à l'échelle $J-1$ de la transformée en ondelettes 2D à partir de la transformée de Radon mesurée au travers du disque de rayon 32 pixels dans le fantôme de Shepp et Logan de taille 256×256 (région d'exposition matérialisée par les deux segments verticaux). En haut, l'image obtenue après transformée en ondelettes inverse, avec un zoom sur la région d'exposition. En bas, la section centrale et horizontale de l'image des coefficients de détails verticaux : en trait épais, à partir de l'inversion de données locales ; pour comparaison : en pointillés à partir de l'inversion de données globales, et en trait plein, fin, dans la transformée en ondelettes 2D calculée directement sur le fantôme initial (sans passer dans le domaine de Radon). On a utilisé une ondelette de Daubechies à 2 moments nuls. Au coeur de la région d'intérêt, les coefficients de détail sont reconstruits comme si l'on avait des données globales (la courbe en trait gras est confondue avec la courbe en pointillés).

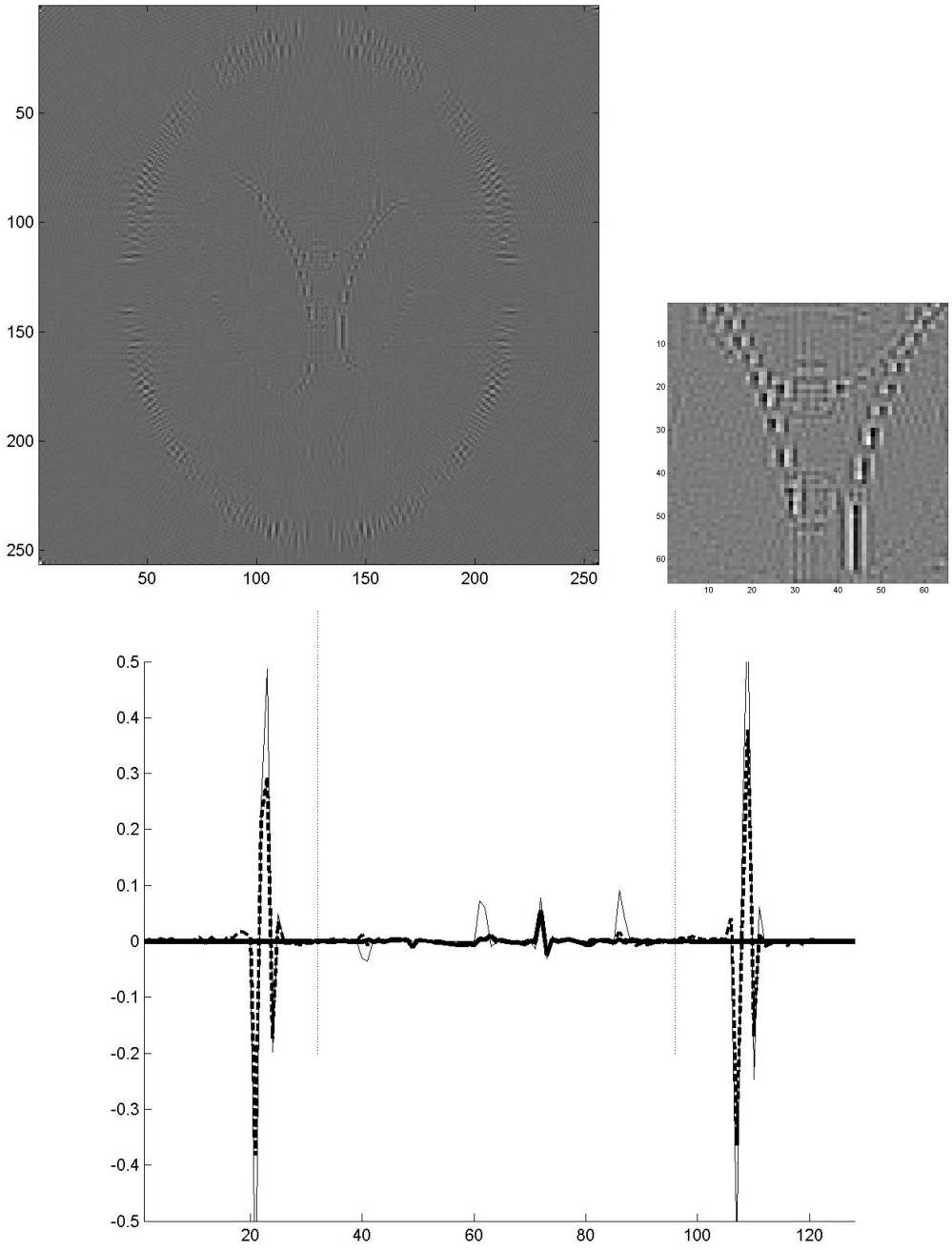


FIG. 3.12 – Inversion de la transformée de Radon à partir de données strictement locales : comparaison avec la figure précédente, pour une ondelette de Daubechies avec plus de moments nuls que dans le cas précédent (4 moments nuls) : il existe toujours une zone au coeur de la région d'intérêt dans laquelle on peut reconstruire les coefficients de détail à partir des données locales comme en présence de données globales, mais cette zone est moins large que dans le cas précédent.

formée en ondelettes 2D n'est autre que la fonction que l'on aurait obtenue en appliquant directement la rétroprojection filtrée sur des données tronquées, les différences de qualité de reconstruction que les auteurs obtiennent par exemple dans [11] s'expliquant par la différence de largeur du support des filtres après application du filtre rampe.

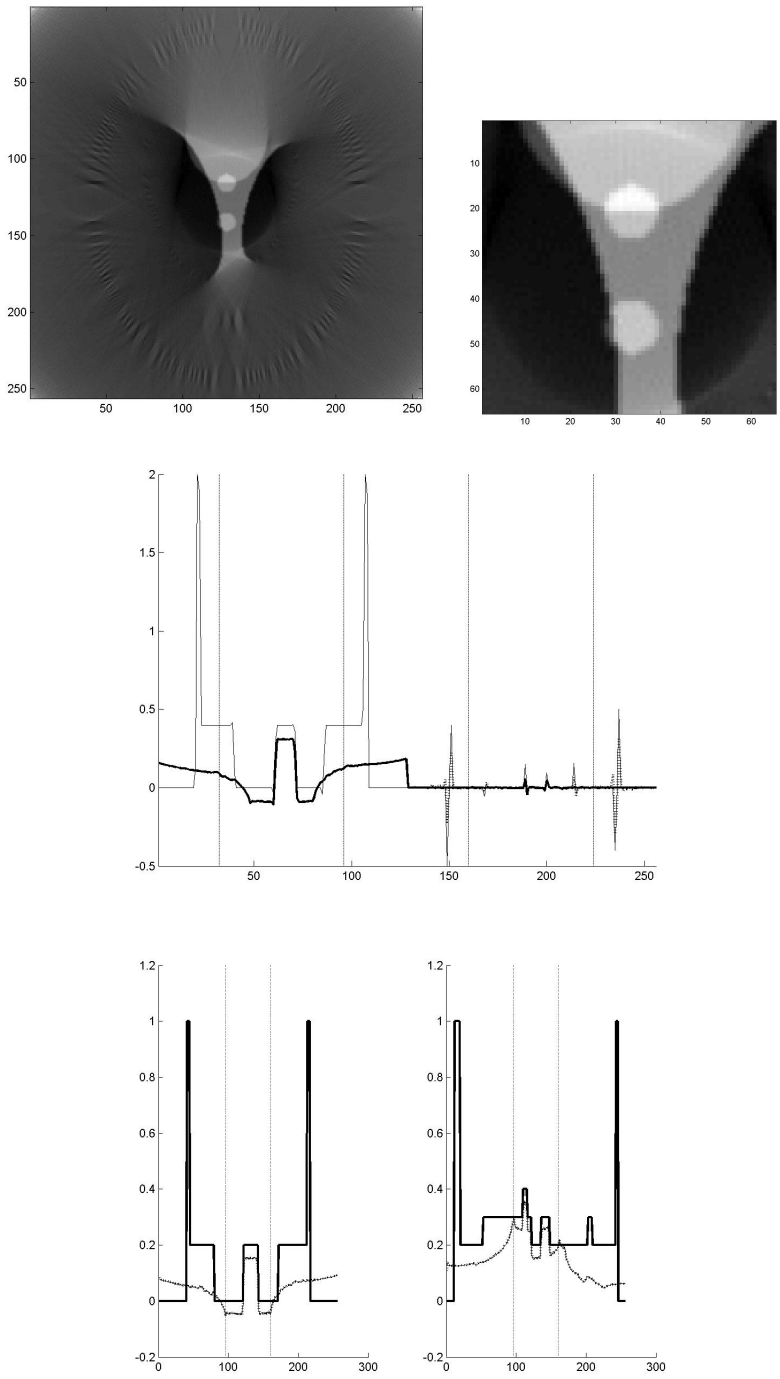


FIG. 3.13 – Inversion de la transformée de Radon en présence de données locales, avec ajout des coefficients d'échelle, pour l'ondelette de Daubechies à 2 moments nuls. En haut, l'image obtenue après reconstruction, et zoom sur la région d'intérêt. Ensuite, une section dans l'image des coefficients (même codage que dans les images précédentes), et en bas, les sections centrales des reconstructions, avec comparaison avec la reconstruction obtenue quand on utilise la rétroprojection filtrée sur des données locales : les reconstructions sont confondues.

3.3 Inversion de la transformée de Radon bruitée par méthodes multiéchelles

Les méthodes que nous allons présenter dans cette partie étaient motivées au départ par la résolution de problèmes inverses à partir de données bruitées : c'est dans ce contexte que la transformée en ondelettes-vaguelettes a été développée par D. Donoho.
Dans la foulée, d'autres familles multiéchelles ont été construites, sur le même modèle, c'est-à-dire avec des liens forts avec le domaine de Radon. Leurs différences résident dans le fait que l'objectif est de fournir des représentations efficaces de classes d'images dans lesquelles la "géométrie" est forte, c'est-à-dire des images régulières sur des domaines eux-mêmes délimités par des frontières régulières.

Nous allons dans la suite présenter ces transformées, en les abordant sous l'angle des apports du domaine de Radon pour leur compréhension.

3.3.1 Concept fondateur : la transformée en ondelettes-vaguelettes

La décomposition en ondelettes-vaguelettes d'un problème inverse a été introduite au début des années 90 par Donoho [32], où elle est présentée comme une alternative à la décomposition en valeurs singulières, conçue pour permettre l'inversion de certains opérateurs d'inverse non borné en présence de données bruitées. Un des opérateurs concernés est la transformée de Radon. Ici, nous présentons la transformée en ondelettes-vaguelettes dans ce cas particulier.

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, dans le paragraphe (2.2.4.2), la décomposition en valeurs singulières consiste à travailler dans deux familles orthonormées $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, appartenant respectivement à l'espace direct et à l'espace des projections, et que l'on construit avec les vecteurs propres de l'opérateur $\mathcal{R}\mathcal{R}^*$. En notant $\left(\sigma_\lambda^2\right)_{\lambda\in\Lambda}$ les valeurs singulières de $\mathcal{R}\mathcal{R}^*$ (elles sont positives), on a vu dans le paragraphe (2.2.4.2) que l'on peut décomposer ainsi toute fonction f de l'espace direct selon

$$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} < f, f_\lambda > f_\lambda$$

où

$$< f, f_\lambda >= \frac{1}{\sigma_\lambda}[\mathcal{R}f, g_\lambda]$$

tandis que la transformée de Radon de f s'écrit

$$\mathcal{R}f = \sum_{\lambda\in\Lambda} \sigma_\lambda < f, f_\lambda > g_\lambda$$

Comme on l'a dit dans le chapitre précédent, la spécificité de la décomposition en valeurs singulières réside dans le fait que les deux familles $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sont simultanément orthonormées. On dit souvent qu'avec la décomposition en valeurs singulières, on *diagonalise l'opérateur* $\mathcal{R}$, fournissant ainsi une modalité d'inversion *efficace* de la transformée de Radon (au sens où un coefficient dans une base orthonormée de l'espace de Radon fournit directement un coefficient également dans une base orthonormée de l'espace direct). Mais il y a un inconvénient : la base orthonormée de l'espace direct est imposée (par l'opérateur, ici $\mathcal{R}$) : c'est la base orthonormée formée des vecteurs propres de l'opérateur $\mathcal{R}\mathcal{R}^*$. Or il s'avère que cette base peut se prêter "plus ou moins bien" à une représentation des signaux f manipulés ; Donoho, puis Candès, rappellent que les méthodes de régularisation de la décomposition en valeurs singulières [78] consistent à introduire une fenêtre w, ce qui conduit à conserver seulement dans la formule d'inversion (2.2.3) les termes de la somme associés aux plus grandes valeurs singulières σ_λ

(pour éviter que le bruit éventuel ne soit trop amplifié dans la formule $\sum_\lambda \frac{1}{\sigma_\lambda}[\mathcal{R}f, g_\lambda]f_\lambda$) :

$$f_w = \sum_\lambda \frac{w_\lambda}{\sigma_\lambda}[y, g_\lambda]f_\lambda$$

où on a noté y la transformée de Radon éventuellement corrompue par un bruit additif.
Or faire ceci revient, dans la décomposition en valeurs singulières, à supprimer les termes associés aux grandes fréquences ; pour des images dont l'information est en grande partie concentrée dans la localisation des bords, cette stratégie n'est pas optimale [17].

L'objectif des concepteurs de la transformée en ondelettes-vaguelettes était de trouver un mode de décomposition préservant la facilité des relations entre coefficients des deux domaines, tout en s'autorisant le choix d'une base orthonormée d'ondelettes comme fonctions de base dans la décomposition du domaine direct (par exemple pour disposer ensuite des algorithmes existants pour débruiter des signaux) ; sur le premier point, on dit parfois que la décomposition en ondelettes-vaguelettes réussit à fournir une décomposition *quasi diagonale* de l'opérateur $\mathcal{R}\mathcal{R}^*$.

Construction d'un inverse faible On a vu dans le chapitre précédent, dans le paragraphe (2.2.1.2), que la transformée de Radon n'admet pas d'inverse borné lorsqu'elle est vue comme un opérateur entre espaces $\mathbf{L}^2$, et qu'il faut avoir recours à l'espace de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(S^1 \times \mathbf{R})$ pour y remédier. Or en pratique, on considèrera souvent que la transformée de Radon est corrompue par un bruit dont on contrôlera le niveau en norme $\mathbf{L}^2$. La méthode proposée par D. Donoho consiste dans un premier temps à construire un inverse *faible* de la transformée de Radon, pour lequel on pourra garantir la stabilité en norme $\mathbf{L}^2$.

Plus précisément, on part d'une base orthonormée d'ondelettes du domaine direct, dans laquelle on peut décomposer tout signal f selon

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} < f, \Psi_\lambda > \Psi_\lambda$$

et pour laquelle on va reconstruire chacun des coefficients en ondelettes $< f, \Psi_\lambda >$ à partir de la transformée de Radon. L'idée consiste alors à voir chaque coefficient $< f, \Psi_\lambda >$ comme le résultat d'un opérateur c_λ appliqué à f. Dans ces conditions, la reconstruction d'un coefficient à partir de la transformée de Radon est stable - le but cherché - si et seulement si il existe une constante C_λ positive, associé à l'opérateur c_λ, telle que pour toute fonction f, on puisse écrire

$$|c_\lambda(f)| = |< f, \Psi_\lambda >| \leq C_\lambda \|\mathcal{R}f\|_{\mathbf{L}^2} \tag{3.29}$$

Dans [32], D. Donoho s'appuie sur le fait que cette majoration est vérifiée dès que $\Psi_\lambda \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}^*)$, où, comme précédemment, $\mathcal{R}^*$ désigne l'opérateur adjoint de $\mathcal{R}$ (opérateur de rétroprojection). En effet, si on note alors ψ_λ la fonction définie sur le cylindre $S^1 \times \mathbf{R}$ et vérifiant $\mathcal{R}^*\psi_\lambda = \Psi_\lambda$, on a alors

$$|< f, \Psi_\lambda >| = |< f, \mathcal{R}^*\psi_\lambda >| = |< \mathcal{R}f, \psi_\lambda >|$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire

$$|< \mathcal{R}f, \psi_\lambda >| \leq \ \|\psi_\lambda\|_2 \|\mathcal{R}f\|_2 \tag{3.30}$$

ce qui donne finalement

$$\forall f,\ |c_\lambda(f)| = |< f, \Psi_\lambda >| \leq \ C_\lambda \ \|\mathcal{R}f\|_2 \quad \text{où } C_\lambda = \|\psi_\lambda\|_2$$

Si pour tout λ, la condition $\Psi_\lambda \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}^*)$ est vérifiée, alors on dit que $\mathcal{R}$ est faiblement inversible dans la base (Ψ_λ), et on a, au sens de la convergence en norme $\mathbf{L}^2$,

$$f = \sum_\lambda < \mathcal{R}f, \psi_\lambda > \Psi_\lambda \tag{3.31}$$

On peut expliciter chacune des fonctions ψ_λ : comme on l'a vu dans le chapitre précédent, avec la formule d'inversion de la transformée de Radon par rétroprojection filtrée, pour que la fonction ψ_λ vérifie $\mathcal{R}^\# \psi_\lambda = \Psi_\lambda$, il suffit que

$$\psi_\lambda = \frac{1}{4\pi} \Lambda \mathcal{R} \Psi_\lambda$$

ce qui, via le domaine de Fourier, s'écrit

$$\begin{aligned} \forall (\theta, s) \in [0, 2\pi[\times \mathbf{R},\ \psi_\lambda(\theta, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{(\psi_\lambda)_\theta}(\omega) e^{i\omega s} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} |\omega| \widehat{\mathcal{R}_\theta \Psi_\lambda}(\omega) e^{i\omega s} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Psi_\lambda}(\omega \mathbf{\Theta}) |\omega| e^{i\omega s} d\omega \text{ (d'après la propriété (2.1.4))} \end{aligned}$$

Une fois chacune des fonctions ψ_λ définie, on s'intéresse à la structure de la famille ainsi construite (dans la décomposition en valeurs singulières, on a une base orthornormée aussi dans le domaine de Radon) ; ici ce n'est pas le cas de la famille $(\psi_\lambda)_\lambda$, comme nous allons l'expliquer ensuite.

Systèmes de décomposition dans le domaine de Radon On se donne donc une famille orthonormée d'ondelettes permettant de décomposer toute fonction $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ sous la forme

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} < f, \Psi_\lambda > \Psi_\lambda$$

et on choisit une famille (ψ_λ) de fonctions définies sur le cylindre telles que pour tout λ, $\Psi_\lambda = \mathcal{R}^\# \psi_\lambda$, de telle sorte que

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ < f, \Psi_\lambda > = < f, \mathcal{R}^\# \psi_\lambda > = [\mathcal{R}f, \psi_\lambda]$$

Chaque coefficient $< f, \Psi_\lambda >$ de la décomposition de f dans la base orthonormée $(\Psi_\lambda)_\lambda$ du domaine direct peut donc être obtenu par un produit scalaire avec un élément ψ_λ du domaine de Radon. L'atout de la décomposition en valeurs singulières résidait dans le fait que les atomes d'analyse dans le domaine de Radon formaient aussi une base orthonormée, et donc que les coefficients $[\mathcal{R}f, \psi_\lambda]$ apportaient une représentation complète et sans redondance de $\mathcal{R}f$. Ici, ce n'est pas le cas de la famille $(\psi_\lambda)_\lambda$, qui, telle qu'elle est définie, n'a aucune raison d'être orthonormée. Néanmoins, nous allons voir dans la suite qu'à défaut d'une base orthonormée, on peut, à l'aide de la famille $(\mathcal{R}\Psi_\lambda)_\lambda$, disposer d'une base de Riesz de l'espace des projections, que l'on sait coupler à une autre base de Riesz, telles que les deux bases soient biorthogonales.

En effet, si l'on considère la famille de fonctions $(\mathcal{R}\Psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ définies sur le cylindre $S^1 \times \mathbf{R}$, alors, exploitant le caractère orthonormé de la famille $(\Psi_\lambda)_\lambda$, on a

$$\forall (\lambda, \lambda') \in \Lambda,\ [\psi_\lambda, \mathcal{R}\Psi_{\lambda'}] = < \mathcal{R}^\# \psi_\lambda, \Psi_{\lambda'} > = < \Psi_\lambda, \Psi_{\lambda'} > = \delta_{\lambda, \lambda'}$$

Les deux familles $(\mathcal{R}\Psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ et $(\psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sont donc biorthogonales, et formellement, en appliquant l'opérateur $\mathcal{R}$ dans la relation (3.31), on obtient

$$\mathcal{R}f = \sum_\lambda < \mathcal{R}f, \psi_\lambda > \mathcal{R}\Psi_\lambda$$

On peut alors montrer que, convenablement normalisées, les familles $(\mathcal{R}\Psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ constituent chacune une base de Riesz de $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R})$. Pour cela, on calcule d'abord la norme de chacune des fonctions ψ_λ. On se place ici dans le cas où l'ensemble Λ qui sert à indexer la famille d'ondelettes du domaine direct est, comme c'est le cas avec les analyses multirésolutions séparables, de la forme $\Lambda = \{(j, \mathbf{k}, \epsilon) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^2 \times \{1, 2, 3\}\}$; on a ainsi

$$\forall (j, \mathbf{k}, \epsilon) \in \Lambda,\ \Psi_{j,\mathbf{k},\epsilon}(\mathbf{x}) = 2^j \Psi(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k}) = \Psi_{2^{-j},2^{-j}\mathbf{k}}(\mathbf{x})$$

On peut alors faire apparaître trois fonctions mères, de la manière suivante :

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \psi_\lambda(\mathbf{\Theta}, s) \quad = \quad \psi_{j,\mathbf{k},\epsilon}(\mathbf{\Theta}, s) = \frac{1}{4\pi} \Lambda \mathcal{R}\Psi_{j,\mathbf{k},\epsilon}(\mathbf{\Theta}, s)$$

On applique alors successivement (3.19) et (3.23), avec comme facteur de dilation $a = 2^{-j}$, et comme vecteur de translation $\mathbf{b} = 2^{-j}\mathbf{k}$, et on obtient

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \psi_\lambda(\mathbf{\Theta}, s) \quad = \quad \frac{1}{4\pi} 2^j \Lambda \mathcal{R}\Psi_{0,\mathbf{0},\epsilon}(\theta, 2^j s - \mathbf{k} \cdot \mathbf{\Theta}) \tag{3.32}$$

soit

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \psi_\lambda(\mathbf{\Theta}, s) \quad = \quad 2^j \psi_{0,\mathbf{0},\epsilon}(\mathbf{\Theta}, 2^j s - \mathbf{k} \cdot \mathbf{\Theta})$$

où on a noté $\psi_{0,\mathbf{0},\epsilon}$ la fonction définie sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ par

$$\psi_{0,\mathbf{0},\epsilon}(\mathbf{\Theta}, s) = \frac{1}{4\pi} \Lambda \mathcal{R}\Psi_{0,\mathbf{0},\epsilon}(\mathbf{\Theta}, s) = \frac{1}{4\pi} \Lambda \mathcal{R}\Psi^{[\epsilon]}(\mathbf{\Theta}, s)$$

On peut alors calculer la norme de chacune des fonctions $\psi_\lambda = \psi_{j,\mathbf{k},\epsilon}$: pour tout $\lambda \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^2 \times \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} \|\psi_\lambda\|^2 \quad &= \quad \|\psi_{j,\mathbf{k},\epsilon}\|^2 = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{j,\mathbf{k},\epsilon}(\mathbf{\Theta}, s)|^2 \, ds d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2^{2j} \left|\psi_{0,0,\epsilon}\left(\mathbf{\Theta}, 2^j s - \mathbf{k} \cdot \mathbf{\Theta}\right)\right|^2 ds d\theta \\ &= \quad \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2^j \left|\psi_{0,0,\epsilon}\left(\mathbf{\Theta}, s'\right)\right|^2 ds' d\theta = 2^j \|\psi_{0,0,\epsilon}\|^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\|\psi_\lambda\| = 2^{\frac{j}{2}} \|\psi_{0,0,\epsilon}\|$$

On peut donc construire une première famille de fonctions normalisées, en posant

$$\boxed{\forall \lambda \in \Lambda,\ u_\lambda = 2^{-\frac{j}{2}} \psi_\lambda,\ \text{où } \psi_\lambda = \frac{1}{4\pi} \Lambda \mathcal{R}\Psi_\lambda}$$

De même, en appliquant (3.19), on a

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \mathcal{R}\Psi_\lambda(\mathbf{\Theta}, s) = \mathcal{R}\Psi_{j,\mathbf{k},\epsilon}(\mathbf{\Theta}, s) = \mathcal{R}_\theta \Psi^{[\epsilon]}(2^j s - \mathbf{k} \cdot \mathbf{\Theta})$$

et

$$\|\mathcal{R}\Psi_\lambda\|^2 = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathcal{R}_\theta \Psi_{0,0,\epsilon}(2^j s - \mathbf{k} \cdot \mathbf{\Theta})\right|^2 ds d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-j} \left|\mathcal{R}_\theta \Psi_{0,0,\epsilon}(s')\right|^2 ds' d\theta = 2^{-j} \|\mathcal{R}_\theta \Psi^{[\epsilon]}\|^2$$

et donc

$$\|\mathcal{R}\Psi_\lambda\| = 2^{-\frac{j}{2}} j \|\mathcal{R}_\theta \Psi^{[\epsilon]}\|$$

On peut donc construire une seconde famille de fonctions normalisées, en posant

$$\boxed{\forall \lambda \in \Lambda,\ v_\lambda = 2^{\frac{j}{2}} \mathcal{R}\Psi_\lambda}$$

Au passage, on peut noter que la relation de biorthogonalité entre les familles (ψ_λ) et $(\mathcal{R}\Psi_\lambda)$ est conservée, puisque l'on a

$$\forall (\lambda, \lambda') \in \Lambda^2,\ [u_\lambda, v_{\lambda'}] = [2^{-\frac{j}{2}}\psi_\lambda, 2^{\frac{j'}{2}}\mathcal{R}\Psi_{\lambda'}] = 2^{\frac{j'-j}{2}}[\psi_\lambda, \mathcal{R}\Psi_{\lambda'}] = 2^{\frac{j'-j}{2}}\delta_{\lambda,\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}$$

A ce stade, on dispose donc de deux familles définies sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$, $(u_\lambda)_\lambda$ et $(v_\lambda)_\lambda$, normalisées et biorthogonales. On peut alors montrer que chacune d'elles est une base de Riesz de $\mathbf{L}^2(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R})$: pour cela, Donoho a recours à deux autres familles, que nous noterons dans la suite $(w_\lambda^+)_\lambda$ et $(w_\lambda^-)_\lambda$, définies dans le domaine direct, que Meyer appelle des *vaguelettes*. Précisons tout ceci.

Tout d'abord, on peut remarquer que, pour tout couple $(\lambda, \lambda') \in \Lambda^2$,

$$\begin{aligned}
[u_\lambda, u_{\lambda'}] &= \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_\lambda(\mathbf{\Theta}, s)u_{\lambda'}(\mathbf{\Theta}, s)dsd\theta = \frac{1}{16\pi^2}2^{-\frac{j+j'}{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda\mathcal{R}_\theta\Psi_\lambda(s)\Lambda\mathcal{R}_\theta\Psi_{\lambda'}(s)dsd\theta \\
&= \frac{1}{16\pi^2}2^{-\frac{j+j'}{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (\Lambda\widehat{\mathcal{R}_\theta\Psi_\lambda})(\omega)(\Lambda\widehat{\mathcal{R}_\theta\Psi_{\lambda'}})(\omega)d\omega d\theta \text{ (d'après la propriété A.0.5)} \\
&= \frac{1}{16\pi^2}2^{-\frac{j+j'}{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^2\widehat{\mathcal{R}_\theta\Psi_\lambda}(\omega)\widehat{\mathcal{R}_\theta\Psi_{\lambda'}}(\omega)d\omega d\theta \\
&= \frac{1}{8\pi}2^{-\frac{j+j'}{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^2\widehat{\Psi_\lambda}(\omega\Theta)\widehat{\Psi_{\lambda'}}(\omega\Theta)d\omega d\theta \text{ (d'après la propriété 2.1.4)} \\
&= \frac{2}{8\pi}2^{-\frac{j+j'}{2}}\int_{\mathbf{R}^2} |\mathbf{k}|\widehat{\Psi_\lambda}(\mathbf{k})\widehat{\Psi_{\lambda'}}(\mathbf{k})d\mathbf{k} = \frac{1}{4\pi}2^{-\frac{j+j'}{2}}\int_{\mathbf{R}^2}\left(|\mathbf{k}|^{\frac{1}{2}}\widehat{\Psi_\lambda}(\mathbf{k})\right)\left(|\mathbf{k}|^{\frac{1}{2}}\widehat{\Psi_{\lambda'}}(\mathbf{k})\right)d\mathbf{k} \\
&= \frac{1}{8\pi} < \widehat{w_\lambda^+}, \widehat{w_{\lambda'}^+} > = \frac{1}{8\pi} < w_\lambda^+, w_{\lambda'}^+ >
\end{aligned}$$

où on a posé

$$w_\lambda^+(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}2^{-\frac{j}{2}}\int_{\mathbf{R}^2} |\mathbf{k}|^{\frac{1}{2}}\widehat{\Psi_\lambda}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{k} \tag{3.33}$$

De même,

$$\begin{aligned}
[v_\lambda, v_{\lambda'}] &= 2^{\frac{j+j'}{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_\theta\Psi_\lambda(s)\mathcal{R}_\theta\Psi_{\lambda'}(s)dsd\theta = 2^{\frac{j+j'}{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (\widehat{\mathcal{R}_\theta\Psi_\lambda})(\omega)(\widehat{\mathcal{R}_\theta\Psi_{\lambda'}})(\omega)d\omega d\theta \\
&= = 2\pi\ 2^{-\frac{j+j'}{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\Psi_\lambda}(\omega\Theta)\widehat{\Psi_{\lambda'}}(\omega\Theta)d\omega d\theta = 4\pi\ 2^{-\frac{j+j'}{2}}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{1}{|\mathbf{k}|}\widehat{\Psi_\lambda}(\mathbf{k})\widehat{\Psi_{\lambda'}}(\mathbf{k})d\mathbf{k} \\
&= 4\pi\ 2^{-\frac{j+j'}{2}}\int_{\mathbf{R}^2}\left(|\mathbf{k}|^{-\frac{1}{2}}\widehat{\Psi_\lambda}(\mathbf{k})\right)\left(|\mathbf{k}|^{-\frac{1}{2}}\widehat{\Psi_{\lambda'}}(\mathbf{k})\right)d\mathbf{k} = 4\pi < \widehat{w_\lambda^-}, \widehat{w_{\lambda'}^-} > \\
&= 4\pi < w_\lambda^-, w_{\lambda'}^- >
\end{aligned}$$

où on a posé

$$w_\lambda^-(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}2^{\frac{j}{2}}\int_{\mathbf{R}^2} |\mathbf{k}|^{-\frac{1}{2}}\widehat{\Psi_\lambda}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{k} \tag{3.34}$$

On peut dès à présent remarquer que les familles (w_λ^+) et (w_λ^-) sont biorthogonales ; en effet

$$\forall (\lambda, \lambda') \in \Lambda^2,\ < w_\lambda^+, w_{\lambda'}^- > = < \widehat{w_\lambda^+}, \widehat{w_{\lambda'}^-} > = \int_{\mathbf{R}^2} |\mathbf{k}|^{\frac{1}{2}}\widehat{\Psi_\lambda}(\mathbf{k})|\mathbf{k}|^{-\frac{1}{2}}\widehat{\Psi_{\lambda'}}(\mathbf{k})d\mathbf{k} = < \Psi_\lambda, \Psi'_\lambda > = 0$$

Donoho montre alors qu'on peut caractériser la structure des familles (w_λ^+) et (w_λ^-) ; pour cela, nous admettrons ici, comme dans [32], les résultats suivants :

Lemme 3.3.1 (Ondelettes et multiplicateurs de Fourier[32])
Si $\Psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est une fonction à support compact, de classe $\mathcal{C}^M$ sur $\mathbf{R}^2$, avec M moments nuls[1]*, alors, pour tout réel α vérifiant $\alpha < M - 3$, la fonction $w : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par*

$$w(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}(\mathbf{k}) |\mathbf{k}|^{\alpha} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}$$

vérifie les trois propriétés suivantes

1. $$\exists C_1 > 0 \mid \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2,\ |w(\mathbf{x})| \leq \frac{C_1}{(1 + |\mathbf{x}|^3)} \tag{3.35}$$
(autrement dit la fonction w est bien localisée en espace) ;

2. $$\int_{\mathbf{R}^2} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \tag{3.36}$$
(autrement dit la fonction w est oscillante) ;

3. $$\exists C_2 > 0 \mid \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}^2,\ |w(\mathbf{x}) - w(\mathbf{y})| \leq C_2 \, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \tag{3.37}$$
(autrement dit on contrôle la régularité de la fonction w : w est lipschitzienne (de constante de Lipschitz C_2)

Les propriétés énoncées dans ce lemme conduisent à la notion de *vaguelettes* [77], au sens de la définition suivante :

Définition 3.3.1 (Vaguelettes [77, 32])
Soit $w : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ vérifiant les propriétés (3.35),(3.36) et (3.37), engendrant par dilatations et translations la famille $(w_{j,\mathbf{k}})_{j \in \mathbf{Z}, \mathbf{k} \in \mathbf{R}^2}$ définie par

$$w_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = 2^j w(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k})$$

On dit que la famille $(w_{j,\mathbf{k}})_{j \in \mathbf{Z}, \mathbf{k} \in \mathbf{R}^2}$ est une famille de vaguelettes sur $\mathbf{R}^2$.

L'intérêt que l'on a à mettre en évidence une famille de vaguelettes apparaît avec la propriété suivante, que l'on doit à Y. Meyer [77].

Proposition 3.3.1 (Vaguelettes et stabilité [77, 32])
Si $(w_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille de vaguelettes, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in l_2(\mathbf{Z}),\ \| \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda w_\lambda \| \leq C \|(\alpha_\lambda)\|_{l_2(\mathbf{Z})}$$

A ce stade, Donoho explique que ces différents résultats sont suffisants pour affirmer que les familles (w_λ^+) et (w_λ^-) apparues en (3.33) et (3.34) sont des vaguelettes dans le domaine direct : en effet, si Ψ est une ondelette de classe $\mathcal{C}^4$, avec 4 moments nuls, alors les fonctions w^+ et w^- définies par

$$w^+(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} |\mathbf{k}|^{\frac{1}{2}} \widehat{\Psi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \text{ et } w^-(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} |\mathbf{k}|^{-\frac{1}{2}} \widehat{\Psi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}$$

vérifient les hypothèses du lemme (3.3.1).

[1] On dit qu'une ondelette 2D Ψ a N moments nuls si pour tout couple $(a, b) \in \mathbf{N}^2$ tels que $a + b \leq N - 1$, $\int_{\mathbf{R}^2} \Psi(x, y) x^a y^b dx dy = 0$

De plus, la famille (w_λ^+) a été construite en posant

$$w_\lambda^+(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} 2^{-\frac{j}{2}} \int_{\mathbf{R}^2} |\xi|^{\frac{1}{2}} \widehat{\Psi_\lambda}(\xi) e^{i\xi\cdot\mathbf{x}} d\xi$$

mais ceci revient à écrire que

$$\begin{aligned} w_{j,\mathbf{k},\epsilon}^+(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} 2^{-\frac{j}{2}} \int_{\mathbf{R}^2} |\xi|^{\frac{1}{2}} 2^{-j} \widehat{\Psi^{[\epsilon]}}(2^{-j}\xi) e^{-i2^{-j}\xi\cdot\mathbf{k}} e^{i\xi\cdot\mathbf{x}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} 2^j \int_{\mathbf{R}^2} |\xi'|^{\frac{1}{2}} \widehat{\Psi^{[\epsilon]}}(\xi') e^{-i\xi'\cdot\mathbf{k}} e^{i2^j\xi'\cdot\mathbf{x}} d\xi' = 2^j w^+(2^j\mathbf{x}-\mathbf{k}) \end{aligned}$$

ce qui signifie, au sens de la définition (3.3.1), que la famille (w_λ^+) est une famille de vaguelettes.

De même, la famille (w_λ^-) a été construite en posant

$$w_\lambda^-(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbf{R}^2} |\xi|^{-\frac{1}{2}} \widehat{\Psi_\lambda}(\xi) e^{i\xi\cdot\mathbf{x}} d\xi$$

mais ceci revient à écrire que

$$\begin{aligned} w_{j,\mathbf{k},\epsilon}^-(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbf{R}^2} |\xi|^{-\frac{1}{2}} 2^{-j} \widehat{\Psi^{[\epsilon]}}(2^{-j}\xi) e^{-i2^{-j}\xi\cdot\mathbf{k}} e^{i\xi\cdot\mathbf{x}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} 2^j \int_{\mathbf{R}^2} |\xi'|^{-\frac{1}{2}} \widehat{\Psi^{[\epsilon]}}(\xi') e^{-i\xi'\cdot\mathbf{k}} e^{i2^j\xi'\cdot\mathbf{x}} d\xi' = 2^j w^-(2^j\mathbf{x}-\mathbf{k}) \end{aligned}$$

ce qui signifie, au sens de la définition (3.3.1), que la famille (w_λ^-) est une famille de vaguelettes.

Par conséquent, en appliquant ensuite la proposition (3.3.1), on peut affirmer qu'il existe deux constantes C_+ et C_- telles que

$$\forall (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in l_2(\mathbf{Z}),\ \|\sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda w_\lambda^+\| \le C_+ \|(\alpha_\lambda)\|_{l_2(\mathbf{Z})} \text{ et } \|\sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda w_\lambda^-\| \le C_- \|(\alpha_\lambda)\|_{\text{-}2(\mathbf{Z})}$$

De plus, comme on l'a vu plus haut, les familles (w_λ^+) et (w_λ^-) sont biorthogonales. Ceci permet d'écrire

$$\forall (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in l_2(\mathbf{Z}), < \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda w_\lambda^+, \sum_{\lambda'\in\Lambda} \alpha_{\lambda'} w_{\lambda'}^- > = \sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_{\lambda'\in\Lambda} \alpha_\lambda \alpha_{\lambda'} < w_\lambda^+, w_{\lambda'}^- > = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda^2 = \|(\alpha_\lambda)\|_{l^2(\mathbf{Z})}^2$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a aussi

$$\begin{aligned} \forall (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in l_2(\mathbf{Z}), \left| < \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda w_\lambda^+, \sum_{\lambda'\in\Lambda} \alpha_{\lambda'} w_{\lambda'}^- > \right| &\le \|\sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda w_\lambda^+\| \|\sum_{\lambda'\in\Lambda} \alpha'_\lambda w_{\lambda'}^-\| \\ &\le C_- \|(\alpha_\lambda)\|_{l_2(\mathbf{Z})} \|\sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda w_\lambda^+\| \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in l_2(\mathbf{Z}),\ \|(\alpha_\lambda)\|_{l^2(\mathbf{Z})} \le C_- \|\sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda w_\lambda^+\|$$

et on a donc l'encadrement

$$\frac{1}{C_-} \|(\alpha_\lambda)\|_{l^2(\mathbf{Z})} \le \|\sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda w_\lambda^+\| \le C_+ \|(\alpha_\lambda)\|_{l_2(\mathbf{Z})}$$

De même, on peut prouver qu'on a

$$\frac{1}{C_+}\|(\alpha_\lambda)\|_{l^2(\mathbf{Z})} \leq \|\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda w_\lambda^-\| \leq C_-\|(\alpha_\lambda)\|_{l_2(\mathbf{Z})}$$

On remarque enfin que

$$\begin{aligned}\|\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda w_\lambda^+\|^2 &= <\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda w_\lambda^+, \sum_{\lambda'\in\Lambda}\alpha_{\lambda'} w_{\lambda'}^+ >= \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\lambda'\in\Lambda}\alpha_\lambda\alpha_{\lambda'} < w_\lambda^+, w_{\lambda'}^+ > \\ &= 4\pi\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\lambda'\in\Lambda}\alpha_\lambda\alpha_{\lambda'} < u_\lambda, u_{\lambda'} > = 4\pi\|\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda u_\lambda\|_2\end{aligned}$$

et, de même, que

$$\|\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda w_\lambda^-\|_2 = \frac{1}{4\pi}\|\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda v_\lambda\|_2$$

Finalement, en notant $C = \max\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}C_+, 2\sqrt{\pi}C_-\right)$, on obtient les encadrements suivants, caractéristiques des bases de Riesz : pour toute suite de coefficients $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in l_2(\mathbf{Z})$,

$$\boxed{\frac{1}{C}\|(\alpha_\lambda)\|_{l^2(\mathbf{Z})} \leq \|\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda u_\lambda\|_2 \leq C\|(\alpha_\lambda)\|_{l_2(\mathbf{Z})} \text{ et } \frac{1}{C}\|(\alpha_\lambda)\|_{l^2(\mathbf{Z})} \leq \|\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda v_\lambda\|_2 \leq C\|(\alpha_\lambda)\|_{l_2(\mathbf{Z})}}$$

On aboutit finalement à la proposition suivante :

Proposition 3.3.2 (Décomposition en ondelettes-vaguelettes appliquée à la transformée de Radon [32]) *On suppose que (Ψ_λ) est une famille d'ondelettes bidimensionnelles, avec au moins 4 moments nuls. On pose*

$$\forall\lambda\in\Lambda, u_\lambda = 2^{-\frac{j}{2}}\Lambda\mathcal{R}\Psi_\lambda \text{ et } v_\lambda = 2^{\frac{j}{2}}\mathcal{R}\Psi_\lambda$$

Alors $((u_\lambda)_\lambda, (v_\lambda)_\lambda)$ forment un système de bases de Riesz biorthogonales, normées, et, pour toute fonction $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$, on peut écrire

$$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} 2^{\frac{j}{2}}[\mathcal{R}f, u_\lambda]\Psi_\lambda$$

et

$$\mathcal{R}f = \sum_{\lambda\in\Lambda}[\mathcal{R}f, u_\lambda]v_\lambda$$

Nous présentons en figure (3.14) une ondelette à quatre moments nuls (connue explicitement, et que nous présenterons plus en détail en (4.2.2)), à différentes échelles, en plaçant en vis à vis le sinogramme de la fonction u associée (calculé via le domaine de Fourier en utilisant (3.32)) ; on voit que lorsque l'échelle devient fine, l'ondelette se concentre autour d'un point dans le domaine direct, tandis que dans le domaine de Radon, la fonction u se concentre autour d'une sinusoïde.

Application de la transformée en ondelettes-vaguelettes en tomographie : inversion de la transformée de Radon en présence de données bruitées. Dans ce paragraphe, nous expliquons brièvement, et sans entrer dans les détails, comment la transformée en ondelettes-vaguelettes pour la transformée de Radon est exploitée pour traiter des données bruitées.

Nous rappelons d'abord les définitions des bruits blancs gaussiens discret et continu.

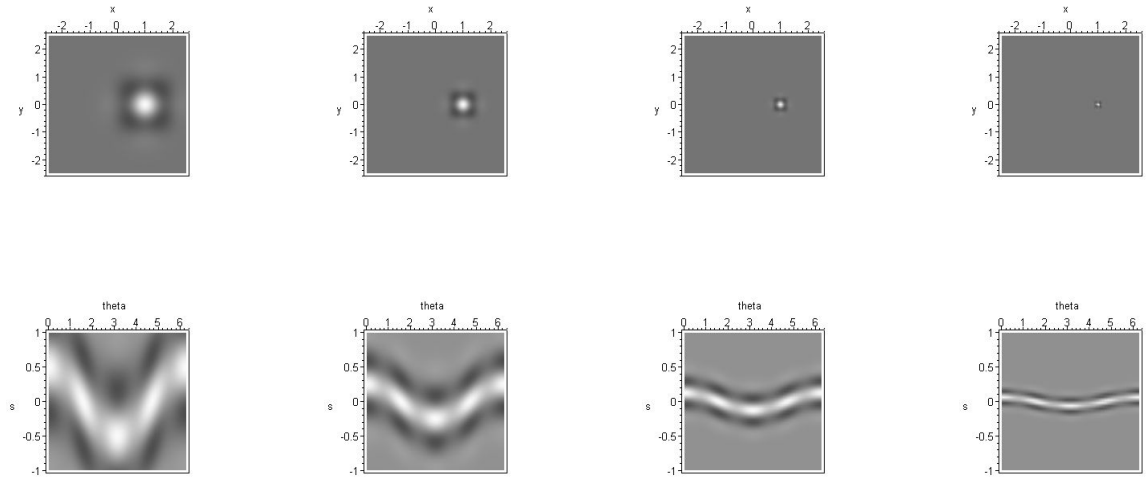


FIG. 3.14 – Pour une ondelette à quatre moments nuls, représentation d'une ondelette dans le domaine direct (première ligne), et de la fonction u associée dans le domaine de Radon (deuxième ligne), pour des échelles de plus en plus fines (de gauche à droite). On constate que quand l'échelle devient plus fine, les ondelettes se concentrent autour de points dans le domaine direct, tandis que les fonctions qui permettent d'analyser le sinogramme se concentrent autour de sinusoïdes dans le domaine de Radon.

Soit ϵ un signal de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$; on dit que le signal ϵ est un *bruit blanc gaussien continu de niveau* $\sigma > 0$ lorsque pour tout signal $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, le produit scalaire $z_f =< f, \epsilon >$ est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma\|f\|^2)$; autrement dit,

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}),\ < f, \epsilon > \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma\|f\|), \quad \mathrm{E}(< f, \epsilon >) = 0, \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(< f, \epsilon >) = \sigma\|f\|^2$$

Soit $\epsilon = (\epsilon_i)_{i\in I}$ un signal indexé par un ensemble discret I ; on dit que ϵ est un *bruit blanc gaussien discret de niveau de bruit* σ (ou de variance σ), lorsque les composantes de ϵ sont des variables aléatoires centrées, indépendantes et identiquement distribuées selon la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma)$:

$$\forall i \in I,\ \mathrm{E}(\epsilon_i) = 0$$
$$\forall i \in I,\ \forall j \in I,\ \mathrm{E}(\epsilon_i \epsilon_j) = \sigma\delta_{i,j} \quad (\text{ en particulier } \forall i \in I,\ \mathrm{Var}(\epsilon_i) = \mathrm{E}(\epsilon_i^2) = \sigma)$$

Nous allons maintenant expliquer brièvement pourquoi on cherche à décomposer des signaux dans des familles *orthonormées* dans des contextes où des données sont bruitées : l'idée clé est qu'un bruit blanc reste un bruit blanc quand il est décomposé dans une famille orthonormée, ou, plus précisément, que les coefficients dans une famille orthonormée d'un bruit blanc gaussien continu ont une structure de bruit blanc gaussien discret : schématiquement, connaissant cette structure, c'est-à-dire la forme que prend le bruit une fois qu'il est réparti dans les coefficients, on peut développer des algorithmes pour l'isoler puis l'éliminer au mieux ; et le fait que le bruit soit décomposé en composantes indépendantes autorise à mettre en place des algorithmes dans lesquels on peut traiter chacun des coefficients indépendamment des autres.

Le fait qu'un bruit blanc continu donne un bruit blanc discret après décomposition dans une base orthonormée se justifie ainsi : considérons une famille orthonormée $(\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$, et un bruit blanc gaussien continu ϵ de niveau σ. ϵ peut être décomposé dans la famille $(\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, selon

$$\epsilon = \sum_{\lambda\in\Lambda} < \epsilon, \psi_\lambda > \psi_\lambda$$

Si l'on s'intéresse ensuite à la famille des coefficients $(< \epsilon, \psi_\lambda >)_{\lambda\in\Lambda}$, on peut vérifier qu'elle a la forme un bruit blanc gaussien discret ; en effet, par définition d'un bruit blanc gaussien continu, chacun des coefficients $< \epsilon, \psi_\lambda >$ est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma\|\psi_\lambda\|)$, qui, puisque la famille $(\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est normée, est la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma)$.
Reste alors à vérifier que les variables aléatoires $(< \epsilon, \psi_\lambda >)_{\lambda\in\Lambda}$ sont deux à deux indépendantes, c'est-à-dire, puisque les variables sont gaussiennes, non corrélées. On revient à la définition de la covariance de deux variables aléatoires : pour toutes variables aléatoires X et Y,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))) \\ \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{Var}(X+Y)-\mathrm{Var}(X)-\mathrm{Var}(Y)\right) \end{cases}$$

Or ici

$$\begin{aligned} \forall(\lambda,\lambda')\in\Lambda^2, \qquad & \mathrm{E}(< \epsilon, \psi_\lambda >< \epsilon, \psi_{\lambda'} >) = \mathrm{E}((< \epsilon, \psi_\lambda > -\mathrm{E}(< \epsilon, \psi_\lambda >))(< \epsilon, \psi_{\lambda'} > -\mathrm{E}(< \epsilon, \psi_{\lambda'} >))) \\ & \qquad \text{(car, par définition du bruit blanc continu, } \mathrm{E}(< \epsilon, \psi_\lambda >) = \mathrm{E}(< \epsilon, \psi'_\lambda >) = 0) \\ & \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Cov}(< \epsilon, \psi_\lambda >, < \epsilon, \psi_{\lambda'} >) \\ & \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\mathrm{Var}(< \epsilon, \psi_\lambda > + < \epsilon, \psi_{\lambda'} >) - \mathrm{Var}(< \epsilon, \psi_\lambda >) - \mathrm{Var}(< \epsilon, \psi_{\lambda'} >)\right) \end{aligned}$$

Par définition du bruit blanc continu, on a pour les deux derniers termes

$$\mathrm{Var}(< \epsilon, \psi_\lambda >) = \mathrm{Var}(< \epsilon, \psi_{\lambda'} >) = \sigma$$

Pour le premier, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(< \epsilon, \psi_\lambda > + < \epsilon, \psi_{\lambda'} >) &= \mathrm{Var}(< \epsilon, \psi_\lambda + \psi_{\lambda'} >) = \sigma\|\psi_\lambda + \psi_{\lambda'}\|^2 \\ &= \sigma\|\psi_\lambda\|^2 + \sigma\|\psi_{\lambda'}\|^2 + 2\sigma < \psi_\lambda, \psi_{\lambda'} > \\ &= 2\sigma + 2\sigma\delta_{\lambda,\lambda'} \ \text{(car la famille } (\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ est orthonormée.)} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathrm{E}(< \epsilon, \psi_\lambda >< \epsilon, \psi_{\lambda'} >) = \frac{\sigma}{2}\left(2 + 2\delta_{\lambda,\lambda'} - 2\right) = \sigma\delta_{\lambda,\lambda'}$$

ce qui montre le dernier item permettant de vérifier que la suite des coefficients $(< \epsilon, \psi_\lambda >)_{\lambda\in\Lambda}$ est un bruit blanc gaussien discret.

Un bruit blanc décomposé dans une base orthonormée reste donc un bruit blanc. Nous allons maintenant expliquer brièvement comment cette propriété est exploitée dans des algorithmes de débruitage.

On pourra se reporter à l'état de l'art dressé par Antoniadis *et al.* [3] pour avoir une revue détaillée des techniques de débruitage utilisant des ondelettes. Ici, nous nous contenterons de dire que les algorithmes de débruitage dans des bases orthonormées d'ondelettes ont d'abord été conçus pour les problèmes *directs*, c'est-à-dire les problèmes dans lesquels c'est la fonction que l'on cherche à reconstruire qui est corrompue par du bruit. Les premières stratégies, *linéaires*, consistent à calculer une transformée en ondelettes du signal bruité, et à ne conserver que les K plus grands coefficients d'ondelette, K ayant été fixé à l'avance, puis à effectuer une transformée en ondelette inverse ; comme alternative à ces dernières, des algorithmes *non linéaires* de seuillage ont été developpés ; on pourrait en résumer grossièrement le principe de la manière suivante : connaissant le fait que les coefficients ont une structure de bruit blanc gaussien dont on connaît le niveau, on peut fixer un seuil T, de telle sorte que les coefficients non nuls du fait uniquement de la présence du bruit aient une grande probabilité d'être en dessous de T.

Les problèmes *indirects* sont des problèmes dans lesquels le bruit n'affecte pas *directement* la fonction que l'on cherche à reconstruire, mais une transformée de celle-ci (ici les mesures radiographiques, c'est-à-dire la transformée de Radon). Dans la transformée en ondelettes-vaguelettes, la transformée de Radon est décomposée dans une famille qui n'est pas orthonormée, et les composantes du bruit ainsi décomposées ne sont pas des variables indépendantes ; en effet, à la différence du cas orthonormé, on peut écrire ici :

$$\begin{aligned}\forall(\lambda,\lambda')\in\Lambda^2, \quad & \mathrm{E}(<\epsilon,u_\lambda><\epsilon,u_{\lambda'}>)=\mathrm{E}((<\epsilon,u_\lambda>-\mathrm{E}(<\epsilon,u_\lambda>))(<\epsilon,u_{\lambda'}>-\mathrm{E}(<\epsilon,u_{\lambda'}>)))\\ &= \mathrm{Cov}(<\epsilon,u_\lambda>,<\epsilon,u_{\lambda'}>)\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Var}(<\epsilon,u_\lambda>+<\epsilon,u'_\lambda>)-\mathrm{Var}(<\epsilon,u_\lambda>)-\mathrm{Var}(<\epsilon,u_{\lambda'}>)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|u_\lambda+u_{\lambda'}\|^2-\|u_\lambda\|^2-\|u_{\lambda'}\|^2\right)\\ &= <u_\lambda,u'_\lambda>\end{aligned}$$

C'est le caractère *quasi-orthonormé* des bases de Riesz $(u_\lambda)_\lambda$ et $(v_\lambda)_\lambda$ qui autorise à considérer les $(<z,u_\lambda>)$ comme quasi-indépendantes, de telle sorte que l'on peut mettre en place une technique de seuillage des coefficients similaire à celle que l'on aurait mise en place si le problème avait été direct, avec comme seule différence le fait que la valeur du seuil appliqué aux coefficients dépend de l'échelle ; la preuve de ce résultat fait l'objet d'une étude détaillée dans [32], où il est montré que le risque de l'estimateur ainsi construit est équivalent au risque de l'estimateur que l'on aurait construit si la fonction avait été directement bruitée.

Implémentation de la transformée en ondelettes-vaguelettes Une mise en oeuvre de la transformée en ondelettes-vaguelettes pour l'inversion de la transformée de Radon est proposée par Eric Kolaczyk dans sa thèse [59] puis dans l'article [60].

L'ondelette Ψ choisie est une ondelette de Meyer 2D (construite à partir de l'ondelette 1D présentée dans l'exemple 3.1.2), qui est une ondelette réelle ; elle engendre une base orthonormée $(\Psi_\lambda)_\lambda$ de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ (à partir d'une analyse multirésolution).
On note f la fonction à reconstruire ; on cherche ainsi à reconstituer la famille de coefficients $(<f,\Psi_\lambda>)_\lambda$ à partir de la transformée de Radon $\mathcal{R}f$. Kolaczyk constate alors que l'on peut écrire que

$$\begin{aligned}<f,\Psi> &= <\hat f,\hat\Psi>=\int_{\mathbf{R}^2}\hat f(\xi)\overline{\hat\Psi(\xi)}d\xi\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}^2}\widehat{\mathcal{R}^\#\mathcal{R}f}(\xi)|\xi|\overline{\hat\Psi(\xi)}d\xi \text{ (d'après le corollaire (2.1.2)}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}^2}\widehat{\mathcal{R}^\#\mathcal{R}f}(\xi)|\xi|\hat\Psi(-\xi)d\xi \text{ (car } \Psi \text{ est réelle)}\end{aligned}$$

et, plus généralement, pour l'ondelette $\Psi_{j,k}:\mathbf{x}\mapsto 2^j\Psi\left(2^j\mathbf{x}-\mathbf{k}\right)$, avec

$$\widehat{\Psi_{j,k}}(\xi)=\frac{1}{2^j}e^{-i2^{-j}\xi\cdot\mathbf{k}}\hat\Psi\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

on a

$$\begin{aligned}<f,\Psi_{j,\mathbf{k},\epsilon}> &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}^2}\widehat{\mathcal{R}^\#\mathcal{R}f}(\xi)|\xi|\widehat{\Psi_{j,k}}(-\xi)d\xi=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}^2}\widehat{\mathcal{R}^\#\mathcal{R}f}(\xi)|\xi|e^{i2^{-j}\xi\cdot\mathbf{k}}\frac{1}{2^j}\hat\Psi\left(-\frac{\xi}{2^j}\right)d\xi\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}_2^{-1}\left(\widehat{\mathcal{R}^\#\mathcal{R}f}(\xi)|\xi|\frac{1}{2^j}\hat\Psi\left(-\frac{\xi}{2^j}\right)\right)\left(\frac{\mathbf{k}}{2^j}\right)\end{aligned}$$

et plus précisément, avec la normalisation adaptée à la transformée en ondelettes-vaguelettes, on calcule

$$[\mathcal{R}f, u_{j,\mathbf{k},\epsilon}] = 2^{-\frac{j}{2}} < f, \Psi_{j,\mathbf{k},\epsilon} >= 2^{-\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathcal{F}_2^{-1} \left(\widehat{\mathcal{R}^{\#}\mathcal{R}f}(\xi)|\xi| \frac{1}{2^j} \hat{\Psi} \left(-\frac{\xi}{2^j} \right) \right) \left(\frac{\mathbf{k}}{2^j} \right)$$

Cette formule est similaire à la formule d'inversion de la transformée de Radon à laquelle nous avons fait allusion dans le chapitre 2, au paragraphe (2.2.3) : on a vu que l'on peut reconstruire une fonction f en rétroprojetant sa transformée de Radon, puis en filtrant, par un filtrage 2D, le résultat obtenu, avant de calculer f par transformée de Fourier 2D inverse ; ici, Kolaczyk obtient les coefficients de la décomposition en ondelettes en modifiant l'étape centrale : le filtre 2D est modifié par l'ondelette utilisée.

L'algorithme qu'il applique est le suivant :

1. Mesure de la transformée de Radon $\mathcal{R}f$;
2. Rétroprojection de la transformée de Radon sur une grille cartésienne : $\mathcal{R}^{\#}\mathcal{R}f$ (algorithme vu pour la rétroprojection filtrée) ;
3. Calcul de la transformée de Fourier de $\mathcal{R}^{\#}\mathcal{R}f$ par transformée de Fourier rapide ;
4. Multiplication de $\widehat{\mathcal{R}^{\#}\mathcal{R}f}$ (échantillonné sur une grille régulière $\mathcal{G}$) par la fonction $\xi \mapsto |\xi|$ (calculé sur cette même grille) ;
5. Pour chaque échelle j
   (a) Calcul sur la grille $\mathcal{G}$ des valeurs de $\xi \mapsto \frac{1}{2^j} \hat{\Psi} \left(-\frac{\xi}{2^j} \right)$;
   (b) Multiplication terme à terme des grilles obtenues en (4) et (5a) ;
   (c) Calcul de la grille des coefficients d'ondelette à l'échelle j par FFT2 inverse des valeurs obtenues en (5b).

Nous pouvons noter que l'algorithme ainsi proposé, est un algorithme global : il ne se prête pas au traitement de données locales.

3.3.2 Transformée en vaguelettes-ondelettes

Nous mentionnons très brièvement une transformée proposée comme alternative à la transformée en ondelettes-vaguelettes par Abramovich et Silverman dans [1], pour la résolution de problèmes inverses en présence de données bruitées. A la différence de la transformée en ondelettes-vaguelettes, son application spécifique à la transformée de Radon n'est pas explicitée, mais nous la présentons brièvement ici dans ce cas particulier.

Dans la transformée en vaguelettes-ondelettes, on fixe une base orthonormée d'ondelettes 2D [2]. Ainsi :
- à la différence de la transformée en ondelettes-vaguelettes, c'est dans le domaine de Radon que l'on fixe une famille de fonctions d'analyse ;
- à la différence des approches dites de type rétroprojection filtrée développée dans la partie précédente, on n'applique plus une famille d'ondelettes 1D "terme à terme" à la famille de projections 1D, mais une famille d'ondelettes bidimensionnelles, qui se concentrent donc chacune autour d'un point du sinogramme aux fines échelles.

On choisit une base orthonormée d'ondelettes $(\psi_\lambda)_\lambda$ définies sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$, telle que l'ondelette-mère ψ appartienne à $\mathrm{Im}(\mathcal{R})$: pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe donc Ψ_λ définie sur le domaine direct telle que $\psi_\lambda = \mathcal{R}\Psi_\lambda$.

[2] pour la transformée de Radon, un exemple d'une telle base est proposé par Donoho dans [33], pour la construction des *ridgelets orthonormées* définies sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$. Nous y reviendrons au paragraphe suivant.

Si l'on note f une fonction à reconstruire, alors sa transformée de Radon $\mathcal{R}f$ peut se décomposer dans la base orthonormée $(\psi_\lambda)_\lambda$:

$$\forall f,\ \mathcal{R}f = \sum_{\lambda\in\Lambda} < \mathcal{R}f, \psi_\lambda > \psi_\lambda$$

et formellement, en appliquant l'opérateur inverse de la transformée de Radon, on peut reconstruire la fonction f en écrivant :

$$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} < \mathcal{R}f, \psi_\lambda > \mathcal{R}^{-1}\psi_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} < \mathcal{R}f, \psi_\lambda > \mathcal{R}^{\#}\Lambda\psi_\lambda$$

On peut alors montrer, de manière analogue à ce qui a été fait pour la transformée en ondelettes-vaguelettes, qu'il existe une normalisation adaptée, échelle par échelle, de la famille $(\mathcal{R}^{\#}\Lambda\psi_\lambda)_\lambda$ pour que celle-ci forme une base de Riesz dans le domaine direct. Cette normalisation permet ensuite de mettre en place un algorithme de débruitage par seuillage de coefficients, comme pour la transformée en ondelettes-vaguelettes.

Sous l'impulsion de la transformée en ondelettes-vaguelettes, d'autres modes de décomposition des fonctions de $\mathbf{R}^2$ construits eux-aussi en lien étroit avec le domaine de Radon ont vu le jour, motivés par l'envie de proposer des systèmes de décomposition encore mieux adaptés à la description de certaines fonctions : les fonctions régulières, sauf le long de certaines courbes ; une première famille a ainsi été proposée : les *ridgelets*, destinées à la représentation des fonctions présentant des singularités linéaires, puis les *curvelets*, qui, elles, sont destinées aux fonctions présentant des singularités le long de courbes régulières (typiquement des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sauf au travers de courbes elles-mêmes de classe $\mathcal{C}^2$). Nous allons les présenter brièvement, en nous focalisant sur la manière dont le passage dans le domaine de Radon a été exploité pour leur construction. Nous verrons en outre que, pour les curvelets, des applications en tomographie existent dans la littérature. Enfin, nous citerons un autre type de décomposition, la décomposition en bandelets, pour laquelle des applications en tomographie ont récemment été proposées.
Toutes ces décompositions ont un dénominateur commun : vouloir tirer parti à la fois des principes de l'analyse multirésolution et de la "géométrie" des images [19].

3.3.3 La transformée en ridgelets et ses liens avec la transformée de Radon

La transformée en ridgelets continue a été proposée à la fin des années 90 par Candès et Donoho [15], motivés par l'idée suivante : l'image d'une droite du domaine direct est un point dans le domaine de Radon, et, grâce à des résultats d'analyse micro-locale, on sait que s'il y a une singularité le long d'une droite dans le domaine direct, il y a aussi une singularité au voisinage du point image dans le sinogramme. Or les ondelettes sont des outils efficaces pour représenter des singularités ponctuelles : en associant à une famille d'ondelettes 1D la famille de fonctions 2D liées, on peut donc espérer construire ici un mode de représentation efficace des signaux du domaine direct présentant des singularités le long de droites.

La transformée en ridgelets est de fait une transformée applicable aux fonctions du domaine direct, dans laquelle chaque coefficient peut être calculé dans le domaine de Radon. C'est sous cet angle que nous allons la présenter.

Définition et Construction de repèrs de ridgelets Une *ridgelet* est par définition une fonction Ψ définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$\Psi(\mathbf{x}) = \psi(x_1) \text{ où } \psi \text{ est une ondelette unidimensionnelle réelle}$$

Par dilatation, translation et rotation, on engendre la famille

$$\Psi_{a,b,\mathbf{\Theta}}(\mathbf{x}) = \psi_a(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - b}{a}\right)$$

à partir de laquelle on peut calculer les coefficients de ridgelets, définis par

$$\mathrm{R}^{\Psi} f(a,b,\theta) =< \Psi_{a,b,\mathbf{\Theta}}, f >= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbf{R}^2} f(\mathbf{x})\psi\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - b}{a}\right) d\mathbf{x} \tag{3.38}$$

Avec la terminologie utilisée en tomographie, on peut aussi définir une ridgelet Ψ comme la rétroprojetée d'une ondelette ψ selon une direction donnée :

$$\Psi_{\mathbf{\Theta}}(\mathbf{x}) = \mathcal{R}_\theta^{\#}\psi(\mathbf{x}), \text{ et } \Psi_{a,b,\mathbf{\Theta}}(\mathbf{x}) = \mathcal{R}_\theta^{\#}\psi_{a,b}(\mathbf{x})$$

Ainsi définie, la fonction Ψ est constante le long de chacune des droites du plan , ou *arêtes* (*ridges* en anglais), d'équation $D_{\theta,s} : \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} = s$. Dans la direction orthogonale, chaque section d'un faisceau de droites de direction donnée $\mathbf{\Theta}$ est une *ondelette* (*wavelet*) : l'ondelette ψ : la fonction Ψ ainsi construite a été baptisée *ridgelet*. On construit ensuite par dilatations, translations et rotations - comme pour une transformée en ondelettes directionnelle - la famille $(\Psi_{a,\mathbf{b},\mathbf{\Theta}})_{a,\mathbf{b},\mathbf{\Theta}}$. Aux échelles fines, les ridgelets se concentrent le long des droites pour toutes les orientations et positions possibles (alors que les ondelettes directionnelles se concentrent autour de points).

Lien avec la transformée de Radon : Si l'on voit une ridgelet comme la rétroprojetée d'une ondelette 1D, alors on peut réécrire la définition (3.38) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^{\Psi} f(a,b,\theta) &= < \Psi_{a,b,\mathbf{\Theta}}, f >=< \mathcal{R}_\theta^{\#}\psi_{a,b}, f > \\ &= < \psi_{a,b}, \mathcal{R}_\theta f >= \mathcal{R}_\theta f * (\psi_a)_\sigma (b) \end{aligned} \tag{3.39}$$

Proposition 3.3.3 (Inversion et stabilité de la transformée en ridgelets continue)
Soit ψ une ondelette réelle 1D admissible, c'est-à-dire telle que

$$0 < C_\psi = 2\pi\int_{\mathbf{R}} \frac{\left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2}{\omega} d\omega < +\infty$$

et Ψ la fonction définie par $\Psi = \mathcal{R}^{\#}\psi$; pour tout triplet $(a,b,\mathbf{\Theta})$ tel que $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$ et $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{S}^1$, on note

$$\mathrm{R}^{\Psi} f(a,b,\theta) =< \Psi_{a,b,\mathbf{\Theta}}, f >= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbf{R}^2} f(\mathbf{x})\psi\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - b}{a}\right) d\mathbf{x}$$

Alors la transformée en ridgelets continue peut être inversée selon

$$\forall f \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^2(\mathbf{R}),\ f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi C_\psi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \mathrm{R}^{\Psi} f(a,b,\theta)\Psi_{a,b,\theta}(\mathbf{x})\frac{da}{a^3} dbd\theta \text{ pp } x$$

et la conservation de l'énergie est vérifiée :

$$\int_{vbx\in\mathbf{R}^2} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{4\pi C_\psi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \left|\mathrm{R}^{\Psi} f(a,b,\theta)\right|^2 \frac{da}{a^3} dbd\theta$$

Preuve . On s'intéresse à la quantité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{R}^{\Psi} f(a,b,\theta)\Psi_{a,b,\theta}(\mathbf{x}) db$$

Or, comme on l'a dit plus haut, en 3.39

$$\mathrm{R}^{\Psi} f(a,b,\theta) =< \mathcal{R}_\theta f, \psi_{a,b} >= \mathcal{R}_\theta f * (\psi_a)_\sigma (b)$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{R}^{\Psi} f(a,b,\theta)\Psi_{a,b,\theta}(\mathbf{x})db &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_\theta f * (\psi_a)_\sigma (b)\psi_a(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-b)db \\ &= \mathcal{R}_\theta f * (\psi_a)_\sigma * \psi_a(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})\end{aligned}$$

On calcule alors la transformée de Fourier de cette dernière fonction

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\mathcal{R}_\theta f * (\psi_a)_\sigma * \psi_a\right)(\omega) &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left(\mathcal{R}_\theta f * (\psi_a)_\sigma\right)(\omega)\widehat{\psi}(a\omega) \\ &= 2\pi\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)\widehat{(\psi_a)_\sigma}(\omega)\widehat{\psi}(a\omega) \\ &= \sqrt{2\pi}^3 a\hat{f}(\omega\mathbf{\Theta})\,|\hat{\psi}(a\omega)|^2 \text{ (en appliquant le théorème de coupe-projection 2.1.4)}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{R}^{\Psi} f(a,b,\theta)\ \Psi_{a,b,\theta}(\vec{x})\ db\frac{da}{a^3}d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \mathcal{R}_\theta f * (\psi_a)_\sigma * \psi_a(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta})\frac{da}{a^3}d\theta \\ =\ &\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}\left(\mathcal{R}_\theta f * (\psi_a)_\sigma * \psi_a\right)(\omega)e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}}d\omega\frac{da}{a^3}d\theta \\ =\ &\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{a\sqrt{2\pi}^3}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega\mathbf{\Theta})\,|\hat{\psi}(a\omega)|^2 e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}}d\omega\frac{da}{a^3}d\theta \\ =\ &2\pi\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}|\hat{\psi}(a\omega)|^2\frac{da}{a^2}\right)\hat{f}(\omega\mathbf{\Theta})e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}}d\omega d\theta\end{aligned}$$

Or, ω étant fixé, on a, si $\omega > 0$

$$\int_0^{+\infty}|\hat{\psi}(a\omega)|^2\frac{da}{a^2}\overset{\lambda=a\omega}{=}\int_0^{+\infty}|\hat{\psi}(\lambda)|^2\frac{\omega^2 d\lambda}{\omega\lambda^2} = \omega\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{\lambda^2}d\lambda = \omega\frac{C_\psi}{2\pi} = |\omega|C_\psi\frac{C_\psi}{2\pi}$$

et, si $\omega < 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}|\hat{\psi}(a\omega)|^2\frac{da}{a^2} &\overset{\lambda=a\omega}{=} -\int_{-\infty}^{0}|\hat{\psi}(\lambda)|^2\frac{\omega^2 d\lambda}{\omega\lambda^2} = -\omega\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(-\lambda')|^2}{\lambda'^2}d\lambda' \\ &= -\omega\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\lambda')|^2}{\lambda'^2}d\lambda' \text{ (car } \psi \text{ est réelle)} = -\omega\frac{C_\psi}{2\pi} = |\omega|\frac{C_\psi}{2\pi}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{R}^{\Psi} f(a,b,\theta)\ \Psi_{a,b,\theta}(\vec{x})\ db\frac{da}{a^3}d\theta = 2\pi\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C_\psi}{2\pi}|\omega|\hat{f}(\omega\mathbf{\Theta})e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}}d\omega d\theta \\ =\ &2C_\psi\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\omega|\hat{f}(\omega\mathbf{\Theta})e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}}d\omega d\theta = 4\pi C_\psi f(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Pour la conservation de l'énergie

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left|\mathrm{R}^{\Psi} f(a,b,\theta)\right|^2\frac{da}{a^3}dbd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{R}_\theta f * (\psi_a)_\sigma (b)\right|^2 db\frac{da}{a^3}d\theta \\ =\ &\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{F}\left(\mathcal{R}_\theta f * (\psi_a)_\sigma\right)(\omega)\right|^2 d\omega\frac{da}{a^3}d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\left|\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)\right|^2\left|\widehat{\psi}(a\omega)\right|^2 d\omega\frac{da}{a^2}d\theta \\ =\ &2\pi\frac{C_\psi}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)\right|^2|\omega|d\omega d\theta = 2\pi C_\psi\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(\omega\mathbf{\Theta})\right|^2|\omega|d\omega d\theta \\ =\ &4\pi C_\psi\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(\omega\mathbf{\Theta})\right|^2|\omega|d\omega d\theta = 4\pi C_\psi\int_{\mathbf{R}^2}\hat{f}(\mathbf{k})d\mathbf{k} = 4\pi C_\psi\|f\|^2\end{aligned}$$

■

Candès a montré qu'il est possible de discrétiser la transformée continue en ridgelets avec des repères [15] ; dans la foulée, Donoho a montré que, quitte à modifier légèrement la construction des ridgelets, il est possible de construire des bases orthonormées de fonctions bien adaptées à la représentation de singularités rectilignes dans le domaine direct. Cette construction se fait aussi via le domaine de Radon. Nous en donnons les éléments principaux dans la suite.

Les ridgelets deuxième génération [33]

On construit une base orthonormée du cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ vérifiant la périodisation de la transformée de Radon, par produit tensoriel de deux bases d'ondelettes (variables s et θ) : (W_λ) telle que, pour tout (s,θ), $W_\lambda(\theta+\pi,-s) = W_\lambda(\theta+,s)$.

On construit ensuite une base orthonormée de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ en "rapatriant" la base orthonormée du cylindre dans le domaine direct. Pour cela, on utilise l'opérateur de rétroprojection, mais pour avoir une isométrie, on le fait précéder de l'opérateur Δ^+ tel que $\widehat{\Delta^+}(\omega) = \omega^{1/2}$. Ainsi, on construit, dans le domaine de Radon

$$\tau_\lambda = \left(\Delta^+ \otimes \mathrm{I}\right) W_\lambda$$

puis

$$\rho_\lambda = \mathcal{R}^\# \tau_\lambda$$

$$\begin{aligned}
\|\rho_\lambda\|^2 &= \int_{\mathbf{R}^2} \left|\mathcal{R}^\#\tau_\lambda(\mathbf{x})\right|^2 d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^2} \left|\widehat{\mathcal{R}^\#\tau_\lambda}(\mathbf{k})\right|^2 d\mathbf{k} = \int_0^\pi \int_{\mathbf{R}} \left|\widehat{\mathcal{R}^\#\tau_\lambda}(\omega\mathbf{\Theta})\right|^2 |\omega| d\omega d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_{\mathbf{R}} \left| 2\sqrt{2\pi} \frac{\widehat{(\tau_\lambda)}_\theta(\omega)}{|\omega|} \right|^2 |\omega| d\omega d\theta \text{ d'après le corollaire (2.1.1), en utilisant la parité de } \tau_\lambda. \\
&= 8\pi \int_0^\pi \int_{\mathbf{R}} \left| \frac{\widehat{(W_\lambda)}_\theta(\omega)|\omega|^{\frac{1}{2}}}{|\omega|} \right|^2 |\omega| d\omega d\theta = 8\pi \int_0^\pi \int_{\mathbf{R}} \left|\widehat{(W_\lambda)}_\theta(\omega)\right|^2 d\omega d\theta \\
&= 8\pi \int_0^\pi \int_{\mathbf{R}} |(W_\lambda)_\theta(s)|^2 \, ds d\theta = 8\pi \|W_\lambda\|^2
\end{aligned}$$

et ainsi on a $\|W_\lambda\| = \|\rho_\lambda\|$.

On montre alors que la famille (ρ_λ) ainsi construite est une base orthonormée de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$, et du coup, on a la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
\forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2),\ f = \sum_\lambda < f, \rho_\lambda > \rho_\lambda = \sum_\lambda < f, \mathcal{R}^\#\tau_\lambda > \rho_\lambda = \sum_\lambda < \mathcal{R}f, \tau_\lambda > \rho_\lambda \\
= \sum_\lambda < \left(\Delta^+ \otimes \mathrm{I}\right) \mathcal{R}f, W_\lambda > \rho_\lambda
\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{R}f = \sum_\lambda < \mathcal{R}f, \tau_\lambda > \sigma_\lambda \text{ avec } \sigma_\lambda = \mathcal{R}\rho_\lambda$$

3.3.4 Analyse en curvelets

La décomposition en curvelets, proposée par Candès *et al.* en deux vagues successives de travaux (associées à deux générations de curvelets [17, 16, 18]), est une décomposition de l'espace direct dans la construction de laquelle la transformée de Radon joue, aussi, un rôle essentiel : elle est construite

de manière similaire à la transformée en ondelettes-vaguelettes appliquée au cas particulier de la transformée de Radon. La motivation de ses concepteurs étaient la suivante : fournir un mode de décomposition des fonctions de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ efficace pour représenter des fonctions régulières sauf au travers de courbes elles-même régulières (où la régularité est, typiquement, l'appartenance respective à l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$ et $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$.

Ainsi, une transformée en curvelets permet de décomposer une fonction f de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ sous la forme

$$f = \sum_{\lambda} < f, \gamma_\lambda > \gamma_\lambda$$

où, par rapport à la transformée en ondelettes-vaguelettes, la famille $(\gamma_\lambda)_\lambda$ n'est plus une base orthonormée d'ondelettes, mais un repère étroit, c'est-à-dire tel que

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \|\gamma_\lambda\|_{\mathbf{L}^2} = 1 \quad \text{et} \quad \|f\|^2_{\mathbf{L}^2} = \sum_{\lambda} | < f, \gamma_\lambda > |^2$$

les fonctions (γ_λ) possédant, outre des propriétés de localisation en un point et à une certaine échelle, une *direction*, avec une loi de dilatation d'échelle en échelle dite *parabolique* : le ratio longueur-largeur augmente au fil des échelles, c'est-à-dire le support des éléments s'affine au fil des échelles, et plus précisément, quand, à l'échelle j, la longueur est divisée par 2^j, la largeur est divisée par 2^{2j} (alors que pour les ondelettes, le facteur est le même dans chacune des directions). Dans la deuxième génération de curvelets, cette construction est assurée dans l'espace de Fourier 2D, décomposé en couronnes puis en secteurs angulaires de taille adaptée, chacun étant ensuite muni d'une base locale de fonctions.

Par ailleurs, comme dans la transformée en ondelettes vaguelettes, on construit simultanément deux familles de l'espace de Radon [17] : la famille $(u_\lambda)_\lambda$ telle que

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \gamma_\lambda = \frac{1}{\kappa_\lambda} \mathcal{R}^* u_\lambda$$

de telle sorte que

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ < f, \gamma_\lambda >= \frac{1}{\kappa_\lambda} [\mathcal{R} f, u_\lambda]$$

et la famille $(v_\lambda)_\lambda$ telle que

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \mathcal{R}\gamma_\lambda = \kappa_\lambda v_\lambda$$

Pour tout λ, κ_λ est une constante de normalisation, choisie telle que les deux familles soient normées. A la différence de la tranformée en ondelettes-vaguelettes, ces deux familles ne sont pas biorthogonales, mais forment néanmoins chacun des repères (ou *frames*) dans l'espace de Radon.
En lien avec les résultats énoncés pour l'analyse micro-locale, les fonctions (u_λ) sont également localisées en un point et dans une direction dans l'espace de Radon : comme l'explique Candès dans [16, 17], et conformément aux résultats d'analyse micro-locale que nous avons rappelés au chapitre 2, si l'on considère une curvelet γ_λ, localisée au point $\mathbf{x_0}$ du domaine direct, et dont le support est allongé dans la direction orthogonale $\mathbf{\Theta_0}$ c'est-à-dire aligné selon la droite d'équation $\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta_0} = \mathbf{x_0} \cdot \mathbf{\Theta_0}$, alors dans le domaine de Radon, la fonction u_λ est localisée au point de coordonnées $(\theta, s) = (\theta_0, \mathbf{x_0} \cdot \mathbf{\Theta_0})$ et est dirigée selon le vecteur $(1, \mathbf{x_0} \cdot \mathbf{\Theta_0^\perp})$, c'est-à-dire selon une droite dont la pente est égale à

$$\tau_0 = \arctan(\mathbf{x_0} \cdot \mathbf{\Theta_0^\perp})$$

Les coefficients aux échelles fines dans le domaine de Radon permettent de reconstruire des bords dans le domaine direct.
Candès explique que la transformée en curvelets peut-être utilisée pour les problèmes de tomographie à

angle limité.

En présence de données bruitées, un algorithme de seuillage du même type que celui de la transformée en ondelettes-vaguelettes a été proposé ; il permet de faire une reconstruction dans laquelle la régularisation de l'image inhérente aux algorithmes de débruitage traditionnels est adaptée à la présence de bords ("edge-preserving image reconstruction").

3.3.5 Bandelettes

Nous nous contentons enfin de citer une autre famille de décomposition des fonctions du domaine direct pour laquelle des applications à la transformée de Radon ont récemment été proposées : les bandelettes. Initialement développées par E. Le Pennec et S. Mallat [67], elles ont fait l'objet de travaux pour l'inversion de la transformée de Radon à partir de données bruitées (thèses de C.Dossal et G. Peyré [34, 84]). Les algorithmes qui sont mis en place sont inspirés des techniques de débruitage pour la transformée en ondelettes-vaguelettes, et permettent, comme les curvelets, de prendre en compte dans la reconstruction la présence de bords dans des images par ailleurs régulières.

3.4 Récapitulatif

Nous terminons ce chapitre en rassemblant dans un même tableau les principaux types de relation entre la transformée de Radon et la transformée en ondelettes que nous avons évoqués. Ce tableau figure en page suivante.

Bien qu'à notre connaissance, aucune "passerelle" ne soit explicitement faite dans la littérature, il nous semble que l'on peut trouver des liens entre les approches de type rétroprojection filtrée et les approches avec vaguelettes, ridgelets, curvelets,... :

- les fonctions que l'on manipule quand on fixe une ondelette admissible 2D (deuxième cas dans le tableau) sont, à une constante de normalisation près, les mêmes que celles qui sont construites dans la transformée en ondelettes-vaguelettes ; la différence entre les deux approches étant que dans le deuxième cas, on s'intéresse à la structure de la famille 2D créée dans le sinogramme, alors que dans le premier, on s'intéresse à la structure 1D des fonctions qui analysent chaque projection.

- les coefficients qui sont reconstruits dans le domaine 2D après avoir fixé une ondelette 1D (3ème et 4ème cas dans le tableau) peuvent être vus comme des agrégats (sur toutes les directions θ) de coefficients de ridgelets.

Ce qui est fixé	Ce qu'on reconstruit	Références
ψ ondelette admissible 1D	$c_{j,k}(\theta) =< \mathcal{R}_\theta f, \psi_{j,k} >$ $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \sum_{j,k} \int_0^\pi c_{j,k}(\theta) \Lambda\psi_{j,k}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}) d\theta$	Walnut [107] Olson [81]
Ψ ondelette admissible 2D	$\mathrm{W}^\Psi f(a, \mathbf{b}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{2\pi} \mathrm{W}^{\Lambda\mathcal{R}_\theta\Psi}(\mathcal{R}_\theta f)(a, \mathbf{b} \cdot \Theta) d\theta$	Walnut, Berenstein, Rashid [107, 8, 90] Delaney, Bresler [29] Bonnet [11]
$\psi = (\psi_\theta)_\theta$ famille d'ondelettes 1D ψ paire sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ $\forall\theta, 0 < \int_0^{+\infty} \frac{\left\lvert\widehat{\psi_\theta}(\omega)\right\rvert^2}{\omega^3} d\omega < +\infty$	$\mathrm{W}^{\mathcal{R}^\# \psi} f(a, \mathbf{b}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{2\pi} \mathrm{W}^{\psi_\theta}(\mathcal{R}_\theta f)(a, \mathbf{b} \cdot \Theta) d\theta$	Walnut [108]
$\psi = (\psi_\theta)_\theta$ famille d'ondelettes 1D ψ paire sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ ψ_θ ondelette admissible 1D (pour tout θ)	$\mathrm{W}^{\mathcal{R}^\# \Lambda\psi}(f)(\mathbf{b}, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{2\pi} \mathrm{W}^{\Lambda\psi_\theta}(\mathcal{R}_\theta f)(a, \mathbf{b} \cdot \mathbf{\Theta}) d\theta$	Peyrin [83]
Ridgelets ψ ondelette admissible 1D	$\mathrm{R}^\Psi f(a, b, \theta) =< \mathcal{R}_\theta f, \psi_{a,b} >$ $\Psi_{a,b,\theta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta} - b}{a}\right) = \mathcal{R}_\theta^\# \psi_a(\mathbf{x})$ b paramètre 1D !	Candes, Donoho [15]
Ondelettes-vaguelettes et Curvelets Ψ fonction 2D	$< f, \Psi_\lambda >= \kappa_\lambda < \mathcal{R}f, u_\lambda >$ $u_\lambda = \frac{1}{\kappa_\lambda} \Lambda\mathcal{R}\Psi_\lambda$ $v_\lambda = \kappa_\lambda \mathcal{R}\Psi_\lambda$	Donoho, Candes [32, 17, 18]
Vaguelettes - Ondelettes ψ ondelette 2D sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$	$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} < \mathcal{R}f, \psi_\lambda > \mathcal{R}^{-1}\psi_\lambda$ $= \sum_{\lambda\in\Lambda} < \mathcal{R}f, \psi_\lambda > \mathcal{R}^\# \Lambda\psi_\lambda$	Abramovich, Silverman [1]

Chapitre 4

Une nouvelle approche de l'inversion locale de la transformée de Radon par ondelettes

Nous avons recensé dans le chapitre précédent différentes méthodes d'inversion de la transformée de Radon s'appuyant sur des décompositions en ondelettes. Toutes ont en commun de s'appuyer sur deux décompositions : une décomposition de la transformée de Radon calculée par rapport à une première famille de fonctions, et une décomposition de la fonction 2D calculée par rapport à une autre famille de fonctions.
Dans ce chapitre, nous allons proposer une autre méthode d'inversion de la transformée de Radon utilisant des décompositions en ondelettes. Elle s'appuie sur des travaux théoriques réalisés par M. Holschneider [52], qui, à notre connaissance, n'ont jusqu'alors fait l'objet d'aucune mise en pratique. En particulier, nous allons montrer qu'ils se prêtent très bien à l'exploitation de données locales : nous proposons ainsi une nouvelle méthode locale d'inversion de la transformée de Radon.

L'idée qui guide ces travaux est la suivante : la transformée de Radon d'une fonction f peut aussi être vue comme une *transformée en ondelettes généralisée* bidimensionnelle, où la fonction d'analyse de base, c'est-à-dire la *fonction mère*, n'est plus une ondelette, mais une distribution ; par dilatation, translation, rotation, celle-ci peut, comme une ondelette classique, engendrer une famille de fonctions analysantes, qui, appliquées à un signal, fournissent des coefficients d'analyse qui ne sont autres que les valeurs de la transformée de Radon. Les valeurs de la transformée de Radon sont ainsi interprétables *directement*, *sans calcul supplémentaire*, comme des coefficients en ondelettes 2D, et l'on peut alors, choisissant une ondelette de reconstruction admissible, reconstruire alors la fonction initiale par une simple transformée inverse en ondelettes 2D.

Dans ce qui suit, nous exposons d'abord les modifications qui permettent d'étendre le formalisme de la transformée en ondelettes aux distributions. Ce cadre théorique étant posé, nous présentons la formule d'inversion globale de la transformée de Radon, proposée par Holschneider, qui en découle. Nous montrons ensuite comment cette formule peut être utilisée pour traiter des données locales.

4.1 Extension de la transformée en ondelettes directionnelle aux distributions, et formules de reconstructions associées

4.1.1 Extension de la transformée en ondelettes

La famille de fonctions analysantes est construite, pour une transformée en ondelettes classiques (cf. paragraphe 3.1.1.2), à partir de translations, dilatations, rotations appliquées à la fonction mère. Afin de choisir comme "fonction" mère une distribution, nous rappelons d'abord comment ces trois types d'opérateurs peuvent être prolongés aux distributions.

Opérateur de translation $\mathrm{T}_{\mathbf{b}}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$:
Cas régulier : si g est une fonction appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, $\mathrm{T}_{\mathbf{b}}g$ est la fonction définie par

$$\mathrm{T}_{\mathbf{b}}g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}-\mathbf{b})$$

On a alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2),\ < \mathrm{T}_{\mathbf{b}}g, \varphi >= \int_{\mathbf{R}^2} \overline{g(\mathbf{x}-\mathbf{b})}\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^2} \overline{g(\mathbf{y})}\varphi(\mathbf{y}+\mathbf{b})d\mathbf{y} =< g, \mathrm{T}_{-\mathbf{b}}\varphi >$$

On étend cette définition aux distributions en posant :

$$\forall g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2),\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2),\ < \mathrm{T}_{\mathbf{b}}g, \varphi >=< g, \mathrm{T}_{-\mathbf{b}}\varphi >$$

Opérateur de dilatation D_a, $a > 0$:
Cas régulier : si g est une fonction appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, $\mathrm{T}_{\mathbf{b}}g$ est la fonction définie par

$$\mathrm{D}_a g(\mathbf{x}) = \frac{1}{a} g\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right)$$

On a alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2),\ < \mathrm{D}_a g, \varphi >= \int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{a}\overline{g\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right)}\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^2} \overline{g(\mathbf{y})}a\varphi(a\mathbf{y})d\mathbf{y} =< g, \mathrm{D}_{\frac{1}{a}}\varphi >$$

On étend cette définition aux distributions en posant :

$$\forall g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2),\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2),\ < \mathrm{D}_a g, \varphi >=< g, \mathrm{D}_{\frac{1}{a}}\varphi >$$

Opérateur de rotation R_θ, $\theta \in [0, 2\pi[$:
Cas régulier : si g est une fonction appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, $\mathrm{R}_\theta g$ est la fonction définie par

$$\mathrm{R}_\theta g(\mathbf{x}) = g\left(\mathrm{r}_{-\theta}(\mathbf{x})\right)$$

où pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, r_θ désigne la rotation d'angle θ sur $\mathbf{R}^2$.
On a alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2),\ < \mathrm{R}_\theta g, \varphi >= \int_{\mathbf{R}^2} \overline{g\left(\mathrm{r}_{-\theta}(\mathbf{x})\right)}\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^2} \overline{g(\mathbf{y})}\varphi\left(\mathrm{r}_\theta(\mathbf{y})\right)d\mathbf{y} =< g, \mathrm{R}_{-\theta}\varphi >$$

On étend cette définition aux distributions en posant :

$$\forall g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2),\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2),\ < \mathrm{R}_\theta g, \varphi >=< g, \mathrm{R}_{-\theta}\varphi >$$

Transformée en ondelettes généralisée :
Dans cette partie, f désigne le signal à analyser. On suppose que f appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$.

Dans le cas où g est une ondelette appartenant également à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, la transformée en ondelettes directionnelle de f par rapport à g est définie par :

$$\mathrm{W}_g f(a,\mathbf{b},\theta) \;=\; < \mathrm{T}_b \mathrm{D}_a \mathrm{R}_\theta g, f >_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)}$$

ce qui permet d'écrire que

$$\begin{aligned}\mathrm{W}_g f(a,\mathbf{b},\theta) &= \int_{\mathbf{R}^2} \overline{\frac{1}{a} g\left(r_{-\theta}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{b}}{a}\right)\right)}\, f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = a\int_{\mathbf{R}^2} \overline{g(\mathbf{u})}\, f\left(a r_\theta \mathbf{u}+\mathbf{b}\right)\, d\mathbf{u} \\ &= < g, \mathrm{R}_{-\theta}\mathrm{D}_{\frac{1}{a}}\mathrm{T}_{-\mathbf{b}} f >_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)}\end{aligned}$$

On étend cette définition à l'espace $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$ des distributions tempérées, en posant, pour $g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$, et a, b, θ donnés :

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2), \mathrm{W}_g f(a,\mathbf{b},\theta) =< \mathrm{T}_{\mathbf{b}}\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta g, f >=< g, \mathrm{R}_{-\theta}\mathrm{D}_{\frac{1}{a}}\mathrm{T}_{-\mathbf{b}} f >} \tag{4.1}$$

et on a $\mathrm{T}_{\mathbf{b}}\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$.

4.1.2 Extension de la formule de reconstruction continue et de la condition d'admissibilité associée

Théorème 4.1.1 (Inversion de la transformée en ondelettes généralisée [52])
Soit $g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$, et $h \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, telles que g et h vérifient $g_\sigma * h \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$. On pose

$$C_{g,h} = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\widehat{g_\sigma * h}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k}$$

Alors, si $C_{g,h} < \infty$ et si $C_{g,h} \neq 0$, tout signal $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ peut être reconstruit selon la formule

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi C_{g,h}} \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} \mathrm{W}_g f(a,\mathbf{b},\theta)\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h(\mathbf{x}-\mathbf{b}) d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3}$$

autrement dit g et h forment une paire d'ondelettes généralisées admissibles, g intervenant dans l'analyse, et h intervenant dans la synthèse.

Preuve . Nous réécrivons la preuve de ce théorème en nous appuyant sur le formalisme des distributions.

Rappelons d'abord que pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, $G \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$, $\varphi * G$ est la fonction $\mathbf{x} \mapsto \varphi * G(\mathbf{x}) =< \mathrm{T}_{-\mathbf{x}} G, \varphi_\sigma >$, et $\varphi * G$ est une distribution tempérée.

La transformée en ondelettes directionnelle étendue aux distributions tempérées s'écrit, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2), g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{W}_g f(a,b,\varphi) =< \mathrm{T}_{\mathbf{b}}\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta g, f > &= f_\sigma * \mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta g(-\mathbf{b}) \\ &= f * \left(\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta g\right)_\sigma(\mathbf{b}) = f * \mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta g_\sigma(\mathbf{b})\end{aligned}$$

$\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta g_\sigma$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$, donc pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, $\mathrm{W}_g f(a,.,\theta)$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$.

Soit alors une ondelette h appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, destinée à jouer le rôle d'ondelette de reconstruction compatible avec l'ondelette singulière d'analyse g. $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ étant fixé, on s'intéresse à l'expression suivante :

$$\int_{\mathbf{b}\in\mathbf{R}^2} \mathrm{W}_g f(a,\mathbf{b},\theta)\mathrm{T}_{\mathbf{b}}\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h(\mathbf{x})d\mathbf{b} = \mathrm{W}_g f(a,.,\theta) * \left(\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h\right)(\mathbf{x})$$

On obtient un produit de convolution entre une distribution tempérée et une fonction de l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$: on en déduit que cette convolution est bien définie et que $\mathrm{W}_g f(a,.,\theta) * \mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h$ est elle-même une distribution tempérée. Dans la suite, on note $\gamma_{a,\theta} = \mathrm{W}_g f(a,.,\theta) * \mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h$.

Puisque $\gamma_{a,\theta}$ est une distribution tempérée, on peut calculer sa transformée de Fourier au sens des distributions, et puisque qu'elle est du type $\mathcal{S}' * \mathcal{S}$, on a

$$\widehat{\gamma_{a,\theta}} = 2\pi\widehat{\mathrm{W}_g f(a,.,\theta)}\widehat{\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h}$$

puis, comme $W_g f(a,.,\varphi) = f \star D_a R_\phi g_\sigma$ est elle-même une distribution de type $\mathcal{S}' * \mathcal{S}$, on a

$$\widehat{\gamma_{a,\theta}} \;=\; 4\pi^2 \left(\hat{f}\widehat{\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta g_\sigma}\right)\widehat{\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h}$$

puis, par associativité et en reconnaissant la transformée de Fourier d'une nouvelle convolution de type $\mathcal{S}' * \mathcal{S}$, on obtient enfin

$$\widehat{\gamma_{a,\theta}} \;=\; 2\pi\ \hat{f}\ \left(\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta\widehat{g_\sigma * \mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h}\right)$$

On peut alors simplifier la dernière expression obtenue, en remarquant que

$$\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta g_\sigma * \mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h(\mathbf{x}) =< \mathrm{T}_{-\mathbf{x}}\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta g_\sigma, \mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h_\sigma >=< \mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta g_\sigma, \mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h_\sigma >=< g_\sigma, \mathrm{R}_{-\theta}\mathrm{D}_{\frac{1}{a}}\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h_\sigma >$$

avec, pour la fonction h,

$$\begin{aligned}
\forall \mathbf{u}\in\mathbf{R}^2,\ \mathrm{R}_{-\theta}\mathrm{D}_{\frac{1}{a}}\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h_\sigma(\mathbf{u}) &= \mathrm{R}_{-\theta}\left(\mathrm{D}_{\frac{1}{a}}\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h_\sigma\right)(\mathbf{u}) = \left(\mathrm{D}_{\frac{1}{a}}\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h_\sigma\right)(\mathrm{r}_\theta\mathbf{u}) \\
&= a\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h_\sigma\left(a\mathrm{r}_\theta(\mathbf{u})\right) = a\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h_\sigma\left(a\mathrm{r}_\theta(\mathbf{u}) - \mathbf{x}\right) \\
&= h_\sigma\left(\frac{1}{a}\mathrm{r}_{-\theta}\left(a\mathrm{r}_\theta(\mathbf{u}) - \mathbf{x}\right)\right) = h_\sigma\left(\mathbf{u} - \mathrm{r}_{-\theta}\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right)\right) \\
&= \mathrm{T}_{\mathrm{r}_{-\theta}\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right)}h_\sigma(\mathbf{u})
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\forall \mathbf{x}\in\mathbf{R}^2,\ \mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta g_\sigma * \mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h(\mathbf{x}) &= < g_\sigma, \mathrm{T}_{\mathrm{r}_{-\theta}\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right)}h_\sigma >=< \mathrm{T}_{-\mathrm{r}_{-\theta}\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right)}g_\sigma, h_\sigma > \\
&= g_\sigma * h\left(\mathrm{r}_{-\theta}\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right)\right) = a\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta\left(g_\sigma * h\right)(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

donc

$$\left(\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta\widehat{g_\sigma * \mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta h}\right) = a(\mathrm{D}_a\widehat{\mathrm{R}_\theta\left(g_\sigma * h\right)})$$

Or, pour toute distribution tempérée G,

$$\begin{aligned}
\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^2),\ <\widehat{\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta G}, \varphi > &= < \mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta G, \widehat{\varphi} >=< G, \mathrm{R}_{-\theta}\mathrm{D}_{\frac{1}{a}}\widehat{\varphi} >=< G, (\widehat{\mathrm{R}_{-\theta}\mathrm{D}_a\varphi}) > \\
&= < \widehat{G}, \mathrm{R}_{-\theta}\mathrm{D}_a\varphi >=< \mathrm{R}_\theta\mathrm{D}_{\frac{1}{a}}\widehat{G}, \varphi >
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\widehat{\mathrm{D}_a\mathrm{R}_\theta G} = \mathrm{R}_\theta \mathrm{D}_{\frac{1}{a}} \widehat{G}$, et donc, pour la distribution tempérée, $g_\sigma * h$,

$$(\mathrm{D}_a \widehat{\mathrm{R}_\theta (g_\sigma * h)}) = \mathrm{R}_\theta \mathrm{D}_{\frac{1}{a}} (\widehat{g_\sigma * h})$$

Finalement,

$$\widehat{\gamma_{a,\theta}} \quad = \quad 2\pi a \hat{f}\, \mathrm{R}_\theta \mathrm{D}_{\frac{1}{a}} (\widehat{g_\sigma * h}) \tag{4.2}$$

On suppose alors que $g_\sigma * h$ est une fonction intégrable sur $\mathbf{R}^2$; dans ces conditions, sa transformée de Fourier est définie au sens des fonctions de $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$, et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left(a \mathrm{R}_\theta \mathrm{D}_{\frac{1}{a}} (\widehat{g_\sigma * h}) \right) (\mathbf{k}) d\theta \frac{da}{a^3} \quad &= \quad \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} a^2 (\widehat{g_\sigma * h})\, (a \mathrm{r}_{-\theta} \mathbf{k})\, d\theta \frac{da}{a^3} \\ &\overset{\mathbf{u}=a\mathrm{r}_{-\theta}\mathbf{k}}{=} \quad = \int_{\mathbf{R}^2} (\widehat{g_\sigma * h})(\mathbf{u}) \frac{d\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \end{aligned}$$

Reprenant (4.2), on a alors

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \widehat{\gamma_{a,\theta}} d\theta \frac{da}{a^3} = 2\pi C_{g,h} \hat{f}$$

où on a posé

$$C_{g,h} = \int_{\mathbf{R}^2} (\widehat{g_\sigma * h})(\mathbf{u}) \frac{d\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}$$

Par conséquent, si $C_{g,h}$ est non nul et fini, on obtient la formule de reconstruction suivante : La formule de reconstruction en découle :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \quad &= \quad \frac{1}{2\pi C_{g,h}} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \gamma_{a,\theta}(\mathbf{x}) d\theta \frac{da}{a^3} = \frac{1}{2\pi C_{g,h}} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{W}_g f(a,.,\theta) * \mathrm{D}_a \mathrm{R}_\theta h(\mathbf{x}) d\theta \frac{da}{a^3} \\ &= \quad \frac{1}{2\pi C_{g,h}} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \mathrm{W}_g f(a, \mathbf{b}, \theta) \mathrm{D}_a \mathrm{R}_\theta h(\mathbf{x} - \mathbf{b}) d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3} \end{aligned}$$

■

Avec le résultat précédent, nous disposons d'une formule d'inversion valable au sens des distributions. Nous allons voir dans la suite que l'on peut préciser le type de convergence.

Théorème 4.1.2 (Convergence - Formule de reconstruction[52])
Soit $f \in \mathbf{L}^p(\mathbf{R}^2)$, $1 < p < \infty$. On suppose que (g, h) sont tels que $g_\sigma * h \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$, où

$$C_{g,h} = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\widehat{g_\sigma * h}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k} < \infty$$

On note alors

$$\forall r > 0,\ F_{g,h}(r) = \frac{1}{r^2} \int_{|\mathbf{u}| \leq r} h * g_\sigma(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$$

et on suppose que $r \mapsto r F_{g,h}(r) \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)$, avec donc

$$\int_0^\infty r F_{g,h}(r) dr < +\infty$$

Pour $\epsilon > 0$, $\rho > 0$, on définit

$$f_{\epsilon,\rho}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi C_{g,h}} \int_{\epsilon}^{\rho} \int_{0}^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \mathrm{W}_g f(a,\mathbf{b},\theta) \mathrm{D}_a \mathrm{R}_\theta h(\mathbf{x}-\mathbf{b}) d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3}$$

Alors, dans $\mathbf{L}^p(\mathbf{R}^2)$, on a

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi C_{g,h}} \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \mathrm{W}_g f(a,\mathbf{b},\theta) \mathrm{D}_a \mathrm{R}_\theta h(\mathbf{x}-\mathbf{b}) d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3}$$

au sens où

$$\|f - f_{\epsilon,\rho}\|_{\mathbf{L}^p} \xrightarrow[\epsilon\to 0,\rho\to+\infty]{} 0, \text{ pour } 1 \leq p < \infty$$

Si de plus f est bornée, alors $f_{\epsilon,\rho}$ converge ponctuellement vers f en tout point où f est continue.

Preuve . Cette preuve s'inspire largement de la preuve écrite par Holschneider, dont nous avons explicité certains passages.

On écrit d'abord que pour tous (ϵ,ρ),

$$\begin{aligned}
f_{\epsilon,\rho}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi C_{g,h}} \int_{\epsilon}^{\rho} \int_{0}^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \mathrm{W}_g f(a,\mathbf{b},\theta) \mathrm{D}_a \mathrm{R}_\theta h(\mathbf{x}-\mathbf{b}) d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3} \\
&= \frac{1}{2\pi C_{g,h}} \int_{\epsilon}^{\rho} \int_{0}^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \left(f * \mathrm{D}_a \mathrm{R}_\theta g_\sigma\right)(\mathbf{b}) \mathrm{D}_a \mathrm{R}_\theta h(\mathbf{x}-\mathbf{b}) d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3} \\
&= \frac{1}{2\pi C_{g,h}} \int_{\epsilon}^{\rho} \int_{0}^{2\pi} \left(f * \mathrm{D}_a \mathrm{R}_\theta g_\sigma\right) * \mathrm{D}_a \mathrm{R}_\theta h(\mathbf{x}) d\theta \frac{da}{a^3} \\
&= \frac{1}{2\pi C_{g,h}} \int_{\epsilon}^{\rho} \int_{0}^{2\pi} f * \left(\mathrm{D}_a \mathrm{R}_\theta g_\sigma * \mathrm{D}_a \mathrm{R}_\theta h\right)(\mathbf{x}) d\theta \frac{da}{a^3} \\
&= \frac{1}{2\pi C_{g,h}} \int_{\epsilon}^{\rho} \int_{0}^{2\pi} \left(f * a\mathrm{D}_a \mathrm{R}_\theta \left(g_\sigma * h\right)\right)(\mathbf{x}) d\theta \frac{da}{a^3} = f * B_{\epsilon,\rho}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

où

$$B_{\epsilon,\rho}(\mathbf{x}) = \int_{\epsilon}^{\rho} \int_{0}^{2\pi} a\mathrm{D}_a \mathrm{R}_\theta \left(g_\sigma * h\right)(\mathbf{x}) d\theta \frac{da}{a^3}$$

Or

$$\begin{aligned}
&\int_{\epsilon}^{\rho} \int_{0}^{2\pi} a\mathrm{D}_a \mathrm{R}_\theta \left(g_\sigma * h\right)(\mathbf{x}) d\theta \frac{da}{a^3} = \int_{\epsilon}^{\rho} \int_{0}^{2\pi} \left(g_\sigma * h\right)\left(r_{-\theta}\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right)\right) d\theta \frac{da}{a^3} \\
\overset{\mathbf{u}=r_{-\theta}\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right)}{=}\ & \int_{\mathbf{u}\in\mathbf{R}^2;\, \frac{|\mathbf{x}|}{\rho}<|\mathbf{u}|<\frac{|\mathbf{x}|}{\epsilon}} \left(g_\sigma * h\right)(\mathbf{u}) \frac{d\mathbf{u}}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \int_{\frac{|\mathbf{x}|}{\rho}<|\mathbf{u}|<\frac{|\mathbf{x}|}{\epsilon}} \left(g_\sigma * h\right)(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \\
=\ & \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \int_{|\mathbf{u}|<\frac{|\mathbf{x}|}{\epsilon}} \left(g_\sigma * h\right)(\mathbf{u}) d\mathbf{u} - \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \int_{|\mathbf{u}|<\frac{|\mathbf{x}|}{\rho}} \left(g_\sigma * h\right)(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \\
=\ & \frac{1}{\epsilon^2}\frac{\epsilon^2}{|\mathbf{x}|^2} \int_{|\mathbf{u}|<\frac{|\mathbf{x}|}{\epsilon}} \left(g_\sigma * h\right)(\mathbf{u}) d\mathbf{u} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\rho^2}{|\mathbf{x}|^2} \int_{|\mathbf{u}|<\frac{|\mathbf{x}|}{\rho}} \left(g_\sigma * h\right)(\mathbf{u}) d\mathbf{u}
\end{aligned}$$

et donc, pour tout couple (ϵ,ρ)

$$B_{\epsilon,\rho}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon^2} F_{g,h}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\epsilon}\right) - \frac{1}{\rho^2} F_{g,h}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\rho}\right) \tag{4.3}$$

où on a posé

$$\forall r > 0,\ F_{g,h}(r) = \frac{1}{r^2}\int_{|\mathbf{u}|\leq r} h * g_\sigma(\mathbf{u})d\mathbf{u}$$

Cette nouvelle écriture va permettre de montrer la convergence (en divers sens) de $f * B_{\epsilon,\rho}$ vers f quand ϵ tend vers zéro, et ρ tend vers l'infini.
Pour cela, on va, à partir de la famille $(B_{\epsilon,\rho})_{\epsilon,\rho}$, mettre en évidence une *approximation de l'unité*.

Définition 4.1.1 (Approximation de l'unité [14])
On dit qu'une famille de fonctions $(\varphi_\epsilon)_{\epsilon\in\mathbf{R}_+^*}$ de fonctions appartenant à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^2)$ est une identité approchée *ou une* approximation de l'unité *si*

1. *pour tout $\epsilon > 0$,* $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} \varphi_\epsilon(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1$ *;*
2. $\displaystyle\sup_{\epsilon>0}\int_{\mathbf{R}^2} |\varphi_\epsilon(\mathbf{x})|d\mathbf{x} < +\infty$ *;*
3. $\forall\eta > 0,\ \displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|\mathbf{x}|>\eta} \varphi_\epsilon(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0.$

On dispose alors du résultat suivant :

Lemme 4.1.1 (Convolution par une approximation de l'unité et convergence)
Soit $(\varphi_t)_{t\in\mathbf{R}_+^*}$ une approximation de l'unité ;

1. *si $f \in \mathbf{L}^p(\mathbf{R}^2)$ $(1 \leq p < +\infty)$, alors, pour tout $t > 0$, $f * \varphi_t$ appartient à $\mathbf{L}^p(\mathbf{R}^2)$, et la suite de fonctions $(f * \varphi_t)_{t>0}$ converge vers f au sens de la convergence dans $\mathbf{L}^p(\mathbf{R}^2)$:*

$$\|f - f * \varphi_t\|_{\mathbf{L}^p} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

2. *si f est mesurable et bornée sur $\mathbf{R}^2$ (c'est-à-dire si $\|f\|_\infty < \infty$) alors la suite de fonctions $(f * \varphi_t)_{t>0}$ converge ponctuellement vers f en tout point où f est continue :*

$$f * \varphi_t(\mathbf{x_0}) \xrightarrow[t\to 0]{} f(\mathbf{x_0}) \text{ en tout point } \mathbf{x_0} \text{ où } f \text{ est continue}$$

3. *si f est mesurable et bornée sur $\mathbf{R}^2$, et si de plus f est uniformément continue sur $\mathbf{R}^2$, alors la suite de fonctions $(f * \varphi_t)_{t>0}$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}^2$:*

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2} |f(\mathbf{x}) - f * \varphi_t(\mathbf{x})| \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

Si l'on ne dispose que de la continuité de f sur un compact de K de $\mathbf{R}^2$, alors $(f * \varphi_t)_{t>0}$ converge uniformément vers f sur K :

$$\sup_{\mathbf{x}\in K} |f(\mathbf{x}) - f * \varphi_t(\mathbf{x})| \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

On a vu en (4.3) que

$$\forall(\epsilon,\rho),\ B_{\epsilon,\rho}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon^2}F_{g,h}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\epsilon}\right) - \frac{1}{\rho^2}F_{g,h}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\rho}\right)$$

on a donc

$$f_{\epsilon,\rho}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon^2}f * F_{g,h}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\epsilon}\right) - \frac{1}{\rho^2}f * F_{g,h}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\rho}\right)$$

Nous admettons ici que $f * F_{g,h}$ est borné en 0, et donc que le terme en ρ tend vers zéro quand ρ tend vers l'infini.

Ensuite, sous certaines conditions, la famille $(B_{\epsilon,\rho})$ va constituer une approximation de l'unité. Précisons-les.

Pour la première condition à vérifier pour avoir une approximation de l'identité, on a

$$\forall \epsilon > 0,\ \int_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2} \frac{1}{\epsilon^2} F_{g,h}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\epsilon}\right) d\mathbf{x} \overset{\mathbf{u}=\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}}{=} \int_{\mathbf{R}^2} F_{g,h}\left(|\mathbf{u}|\right) d\mathbf{u} = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} F_{g,h}(r) d\theta r dr = 2\pi \int_0^{+\infty} r F_{g,h}(r) dr$$

On retrouve une des conditions sur $F_{g,h}$ énoncée dans le théorème.

Pour la seconde, en effectuant le même changement de variable, on écrit

$$\forall \epsilon > 0,\ \int_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2} \left|\frac{1}{\epsilon^2} F_{g,h}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\epsilon}\right)\right| d\mathbf{x} = 2\pi \int_0^{+\infty} r|F_{g,h}(r)| dr$$

Par conséquent,

$$\sup_{\epsilon>0}\left(\int_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2} \left|\frac{1}{\epsilon^2} F_{g,h}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\epsilon}\right)\right| d\mathbf{x}\right) = 2\pi \int_0^{+\infty} r|F_{g,h}(r)| dr$$

et dire que cette quantité est finie revient à dire que $r \mapsto rF_{g,h}(r)$ appartient à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)$.

La troisième condition est alors automatiquement vérifiée, en appliquant le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}\forall \eta > 0,\ \int_{|\mathbf{x}|>\eta} \frac{1}{\epsilon^2} F_{g,h}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\epsilon}\right) d\mathbf{x} &= \int_{|\mathbf{u}|>\frac{\eta}{\epsilon}} F_{g,h}\left(|\mathbf{u}|\right) d\mathbf{u} = 2\pi \int_{\frac{\eta}{\epsilon}}^{+\infty} r F_{g,h}(r) dr \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} r F_{g,h}(r) \mathbf{1}_{[\frac{\eta}{\epsilon},\infty[}(r) dr\end{aligned}$$

où

$$\forall \epsilon > 0,, \left|rF_{g,h}(r)\mathbf{1}_{[\frac{\eta}{\epsilon}}(r)\right| \leq |rF_{g,h}(r)|$$

et

$$rF_{g,h}(r)\mathbf{1}_{[\frac{\eta}{\epsilon},\infty[}(r) \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0 \text{ pp } r$$

On en déduit que

$$\int_{|\mathbf{x}|>\eta} \frac{1}{\epsilon^2} F_{g,h}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\epsilon}\right) d\mathbf{x} \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0$$

■

Remarque : Holschneider introduit une autre condition sur $F_{g,h}$ pour garantir la convergence ponctelle de $f_{\epsilon,\rho}$ vers f en tout point où f est continue : il requiert l'existence supplémentaire de deux constantes $\gamma > 0$ et $c > 0$ tels que g et h vérifient la condition

$$\forall t > 0,\ \left|\frac{1}{t^2}\int_{|\mathbf{x}|\leq t} h * g_\sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right| \leq \frac{c}{(1+t)^{2+\gamma}}$$

Ici, les fonctions que nous manipulons sont bornées : nous sommes donc dans les conditions du lemme (4.1.1), et la convergence ponctuelle est assurée sans contrainte supplémentaire sur g et h. De plus, pour des fonctions qui sont des sommes finies d'indicatrices de domaines compacts deux à deux disjoints (comme les fantômes), la convergence uniforme sur chacun de ces compacts est garantie.

4.1.3 Discrétisation exacte

Les formules utilisées par Holschneider sont des formules continues. Dans la partie qui vient, nous allons exposer comment les discrétiser, à l'aide de la généralisation de la transformée en ondelettes "presque continue" vue au début du chapitre précédent.

Proposition 4.1.1
S'il existe une constante strictement positive, notée $\widetilde{C_{g,h}}$, telle que, au sens des distributions,

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^j} \int_0^{2\pi} \mathrm{R}_\theta \mathrm{D}_{\frac{1}{a_0^j}} (\widehat{g_\sigma * h}) d\theta = \widetilde{C_{g,h}}$$

alors

$$f = \frac{1}{2\pi\widetilde{C_{g,h}}} \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^{2j}} \int_0^{2\pi} \left(\mathrm{W}_g f(a_0^j, ., \theta) * \mathrm{D}_{a_0^j} \mathrm{R}_\theta h \right) d\theta$$

Preuve . On note $\gamma_{a_0^j,\theta} = \mathrm{W}_g f(a_0^j, ., \theta) * \mathrm{D}_{a_0^j} \mathrm{R}_\theta h$.

Comme dans la preuve pour la formule de reconstruction (cf. (4.2)), on a

$$\widehat{\gamma_{a_0^j,\theta}} = 2\pi a_0^j \hat{f}\, \mathrm{R}_\theta \mathrm{D}_{\frac{1}{a_0^j}} (\widehat{g_\sigma * h})$$

et dans ces conditions, on peut écrire

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^{2j}} \int_0^{2\pi} \widehat{\gamma_{a_0^j,\theta}} d\theta \quad = \quad 2\pi \hat{f} \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^j} \int_0^{2\pi} \mathrm{R}_\theta \mathrm{D}_{\frac{1}{a_0^j}} (\widehat{g_\sigma * h}) d\theta$$

Remarque : comme dans le cas régulier, la normalisation par a_0^{2j} est obtenue en se référant à la condition d'admissibilité continue.
On constate ainsi que si la distribution

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^j} \int_0^{2\pi} \mathrm{R}_\theta \mathrm{D}_{\frac{1}{a_0^j}} (\widehat{g_\sigma * h}) d\theta$$

est une distribution constante (et non nulle), alors, en la notant $\widetilde{C_{g,h}}$, on obtient

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi\widetilde{C_{g,h}}} \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^{2j}} \int_0^{2\pi} \widehat{\gamma_{a_0^j,\theta}} d\theta$$

et

$$f = \frac{1}{2\pi\widetilde{C_{g,h}}} \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^{2j}} \int_0^{2\pi} \gamma_{a_0^j,\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi\widetilde{C_{g,h}}} \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^{2j}} \int_0^{2\pi} \left(\mathrm{W}_g f(a_0^j, ., \theta) * \mathrm{D}_{a_0^j} \mathrm{R}_\theta h \right) d\theta$$

■

4.2 Application à la transformée de Radon

Nous revenons à la théorie développée par Holschneider dans [52], en montrant comment la transformée en ondelettes généralisée qui vient d'être présentée peut être exploitée pour construire une formule d'inversion de la transformée de Radon.

4.2.1 La transformée de Radon : une transformée en ondelettes généralisée

Avec la définition de la transformée en ondelettes généralisée vue plus haut, la transformée de Radon s'écrit comme une "transformée en ondelettes généralisée". En effet, en choisissant comme **« ondelette » d'analyse :**

$$g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2) : f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2) \mapsto < g, f >= \int_{\mathbf{R}} f(0, x_2) dx_2 \tag{4.4}$$

(notations Holschneider : $g(x) = \delta(< e_1, x >)$, que l'on peut écrire aussi $g = \delta^{x_1} \otimes \mathbf{1}^{x_2}$)
on a, en appliquant la définition (4.1),

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2),\ \mathrm{W}_g f(a, \mathbf{b}, \theta) \stackrel{def}{=} < g, \mathrm{R}_{-\theta} \mathrm{D}_{\frac{1}{a}} \mathrm{T}_{-\mathbf{b}} f >$$

puis, en introduisant (4.4)

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}_g f(a, \mathbf{b}, \theta) &= \int_{\mathbf{R}} \left(\mathrm{R}_{-\theta} \mathrm{D}_{\frac{1}{a}} \mathrm{T}_{-\mathbf{b}} f \right)(0, x_2) dx_2 = \int_{\mathbf{R}} \left(\mathrm{D}_{\frac{1}{a}} \mathrm{T}_{-\mathbf{b}} f \right)(r_\theta(x_2 \mathbf{e_2}))\, dx_2 \\
&= \int_{\mathbf{R}} \left(\mathrm{D}_{\frac{1}{a}} \mathrm{T}_{-\mathbf{b}} f \right)\left(x_2 \mathbf{\Theta}^\perp \right) dx_2 = \int_{\mathbf{R}} a \mathrm{T}_{-\mathbf{b}} f \left(a x_2 \mathbf{\Theta}^\perp \right) dx_2 \\
&= \int_{\mathbf{R}} a f \left(a x_2 \mathbf{\Theta}^\perp + \mathbf{b} \right) dx_2 = \int_{\mathbf{R}} a f \left((\mathbf{b} \cdot \mathbf{\Theta}) \mathbf{\Theta} + (a x_2 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{\Theta}^\perp) \mathbf{\Theta}^\perp \right) dx_2 \\
&\stackrel{u = a x_2 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{\Theta}^\perp}{=} \int_{\mathbf{R}} f \left((\mathbf{b} \cdot \mathbf{\Theta}) \mathbf{\Theta} + u \mathbf{\Theta}^\perp \right) du = \mathcal{R} f(\mathbf{\Theta}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{\Theta})
\end{aligned}$$

$$\boxed{W_g f(a, b, \theta) =< T_b D_a \mathcal{R}_\theta g, f >= \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b} \cdot \mathbf{\Theta})} \tag{4.5}$$

4.2.2 Formule d'inversion continue de la transformée de Radon

On choisit $g \in \mathcal{S}' : f \in \mathcal{S} \mapsto \displaystyle\int_{x_2 \in \mathbf{R}} f(0, x_2) dx_2$.

La condition d'admissibilité sur h s'obtient alors de la manière suivante. On remarque d'abord que puisque $g = \delta^{x_1} \otimes \mathbf{1}^{x_2}$, alors, pour toute fonction test f, on a

$$< g_\sigma, f >=< g, f_\sigma >= \int_{x_2 \in \mathbf{R}} f(0, -x_2) dx_2 \stackrel{x_2' = -x_2}{=} \int_{x_2' \in \mathbf{R}} f(0, x_2') dx_2 =< g, f >$$

donc $g_\sigma = g$.
D'autre part, au sens des distributions, on a

$$\widehat{g} = \widehat{\delta^{x_1}} \otimes \widehat{\mathbf{1}^{x_2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{1}^{k_1} \right) \otimes \left(\sqrt{2\pi} \delta^{k_2} \right) = \mathbf{1}^{k_1} \otimes \delta^{k_2}$$

Par conséquent, pour toute fonction h appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$,

$$\widehat{(g_\sigma * h)} = 2\pi \left(\mathbf{1}^{k_1} \otimes \delta^{k_2} \right) \hat{h}$$

et la condition d'admissibilité croisée sur g et h s'écrit

$$C_h = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\widehat{(g_\sigma * h)}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k} = 2\pi \int_{\mathbf{R}} \frac{\hat{h}(k_1, 0)}{{k_1}^2} dk_1 < \infty$$

La formule de reconstruction s'écrit alors

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi C_h} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b} \cdot \mathbf{\Theta}) \mathrm{D}_a \mathrm{R}_\theta h(\mathbf{x} - \mathbf{b}) d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3}}$$

avec

$$\boxed{C_h = 2\pi \int_{\mathbf{R}} \frac{\hat{h}(k_1,0)}{|k_1|^2} dk_1 < \infty, \neq 0}$$

Condition de convergence ponctuelle On rappelle qu'on a défini, pour tout $\epsilon > 0$,

$$F_{g,h}(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{|\mathbf{y}| \leq \epsilon} h * g_\sigma(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Ici, g est imposée, et on a :

$$h * g_\sigma(\mathbf{y}) = h * g(\mathbf{y}) = h * \left(\delta^{x_1} \otimes \mathbf{1}^{x_2}\right)(\mathbf{y}) = \int_{x_2 \in \mathbf{R}} \mathbf{1}(x_2) h(y_1, y_2 - x_2) dx_2 = \int_{\mathbf{R}} h(y_1, v) dv$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
F_h(\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon^2} \int_{(y_1,y_2)|\sqrt{y_1^2+y_2^2} \leq \epsilon} h * g_\sigma(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \int_{-\sqrt{\epsilon^2-y_1^2}}^{\sqrt{\epsilon^2-y_1^2}} \left(\int_{\mathbf{R}} h(y_1, v) dv \right) dy_2 dy_1 \\
&= \frac{1}{\epsilon^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left(\int_{\mathbf{R}} h(y_1, v) dv \right) 2\sqrt{\epsilon^2 - y_1^2} dy_1 = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbf{R}} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} 2\sqrt{\epsilon^2 - y_1^2} h(y_1, v) dy_1 dv \\
&\overset{y_1 = \epsilon u}{=} \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbf{R}} \int_{-1}^{1} 2\sqrt{\epsilon^2 - (\epsilon u)^2} h(\epsilon u, v) \epsilon \, du dv = 2 \int_{\mathbf{R}} \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - u^2} h(\epsilon u, v) du dv
\end{aligned}$$

$$\boxed{F_h(\epsilon) = 2 \int_{\mathbf{R}} \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - u^2} h(\epsilon u, v) du dv} \tag{4.6}$$

Les conditions de convergence en norme $\mathbf{L}^p$, et de convergence ponctuelle vues plus haut dans le cas général peuvent alors être appliquées. Nous verrons plus loin comment on peut les calculer pour des ondelettes particulières.

Nous disposons donc ainsi d'une formule d'inversion de la transformée de Radon. Dans la suite, nous allons l'écrire sous une autre forme, pour faire apparaître le lien avec la méthode de rétroprojection filtrée.

Lien avec la formule de rétroprojection filtrée

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi C_h} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b} \cdot \mathbf{\Theta}) \frac{1}{a} h\left(\frac{r_{-\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{b})}{a} \right) d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3} \\
&\overset{\mathbf{b} = s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp}{=} \frac{1}{2\pi C_h} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}_\theta f\left((s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp) \cdot \mathbf{\Theta} \right) \\
&\qquad h\left(\frac{r_{-\theta}\left((\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta})\mathbf{\Theta} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}^\perp)\mathbf{\Theta}^\perp - (s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp) \right)}{a} \right) dt ds d\theta \frac{da}{a^4} \\
&= \frac{1}{2\pi C_h} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}_\theta f(s) h\left(\frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta} - s)\mathbf{e_1} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}^\perp - t)\mathbf{e_2}}{a} \right) dt ds d\theta \frac{da}{a^4} \\
&\overset{u = \mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}^\perp - t}{=} \frac{1}{2\pi C_h} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}_\theta f(s) \int_{\mathbf{R}} h\left(\frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta} - s)\mathbf{e_1} + u\mathbf{e_2}}{a} \right) du ds d\theta \frac{da}{a^4} \\
&= \frac{1}{2\pi C_h} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}_\theta f(s) \int_{\mathbf{R}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{a} h\left(\frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta} - s)\mathbf{e_1} + u\mathbf{e_2}}{a} \right) \frac{da}{a^3} du ds d\theta \qquad (4.7) \\
&= \frac{1}{2\pi C_h} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}_\theta f(s) \left(\int_{\mathbf{R}} H\left((\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta} - s)\mathbf{e_1} + u\mathbf{e_2} \right) du \right) ds d\theta
\end{aligned}$$

où

$$H(\mathbf{x}) = \int_{a>0} \mathrm{D}_a h(\mathbf{x}) \frac{da}{a^3} = \int_{a>0} \frac{1}{a} h\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) \frac{da}{a^3}$$

En reconnaissant une transformée de Radon dans la dernière expression de la formule de reconstruction, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi C_h} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}, s) \mathcal{R}H\left(\mathbf{e_1}, \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s\right) ds d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi C_h} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}_\theta f * \mathcal{R}_0 H\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}\right) d\theta \end{aligned}$$

On voit ainsi apparaître une formule similaire à la rétroprojection filtrée (vue dans la propriété (2.2.2)), dans laquelle le filtre rampe a été remplacé par la transformée de Radon de la fonction H, calculée dans la direction $\theta = 0$ ($\mathbf{\Theta} = \mathbf{e_1}$) :

$$\mathrm{rampe}(s) \longleftrightarrow \frac{1}{C_h} \mathcal{R}H\left(\mathbf{e_1}, s\right) = \frac{1}{C_h} \mathcal{R}_0 H\left(s\right)$$

L'intérêt de cette nouvelle écriture du filtre rampe est le suivant : on dispose ainsi d'une décomposition du filtre rampe échelle par échelle :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 H\left(s\right) &= \int_{\mathbf{R}} H(s,t) dt = \int_{\mathbf{R}} \int_{a>0} \frac{1}{a} h\left(\frac{s}{a}, \frac{t}{a}\right) \frac{da}{a^3} dt \\ &= \int_{a>0} \frac{1}{a} \int_{\mathbf{R}} h\left(\frac{s}{a}, \frac{t}{a}\right) dt \frac{da}{a^3} \overset{u=\frac{t}{a}}{=} \int_{a>0} \left(\int_{\mathbf{R}} h\left(\frac{s}{a}, u\right) du \right) \frac{da}{a^3} = \int_{a>0} \mathcal{R}_0 h\left(\frac{s}{a}\right) \frac{da}{a^3} \end{aligned}$$

soit finalement,

$$\mathrm{rampe}(s) \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi} C_h} \int_{a>0} \mathcal{R}_0 h\left(\frac{s}{a}\right) \frac{da}{a^3}$$

On voit ainsi apparaître une propriété que l'on exploitera pour traiter des données locales : à la différence des méthodes de type rétroprojection filtrée que nous avons présentées dans le chapitre précédent, on filtre la transformée de Radon par des filtres qui ne sont pas des ondelettes modifiées, mais des ondelettes "brutes" : on peut donc contrôler précisément le support des filtres utilisés, indépendamment du nombre de moments nuls pris en compte dans ces méthodes pour anticiper l'élargissement des filtres sous l'action du filtre rampe.

En exploitant la parité de la transformée de Radon, vue dans la propriété (2.1.1), on peut, sous certaines propriétés de la fonction H, réduire le domaine d'intégration pour la variable θ, comme c'est le cas pour la formule classique de rétroprojection filtrée.

Proposition 4.2.1 (Formule d'inversion réduite aux directions comprises entre 0 et π)
Si H est paire en sa première variable, alors la formule d'inversion se réduit à

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi C_h} \int_0^{\pi} \mathcal{R}_\theta f * \mathcal{R}_0 H\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}\right) d\theta$$

Preuve. On peut écrire, en découpant le domaine d'intégration :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi C_h} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}_\theta f * \mathcal{R}_0 H\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi C_h} \left(\int_0^{\pi} \mathcal{R}_\theta f * \mathcal{R}_0 H\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}\right) d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \mathcal{R}_\theta f * \mathcal{R}_0 H\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}\right) d\theta \right) \end{aligned}$$

On peut alors effectuer le changement de variable $\theta' = \theta - \pi$ (soit $\mathbf{\Theta}' = -\mathbf{\Theta}$) dans la deuxième intégrale

$$\begin{aligned}
& \int_{\pi}^{2\pi} \mathcal{R}_\theta f * \mathcal{R}_0 H\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}\right) d\theta = \int_{\pi}^{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}f(\mathbf{\Theta},s)\mathcal{R}H(\mathbf{e_1},\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-s)dsd\theta \\
= & \int_{0}^{\pi}\int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}f(-\mathbf{\Theta}',s)\mathcal{R}H(\mathbf{e_1},-\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}'-s)dsd\theta' \\
\overset{s'=-s}{=} & \int_{0}^{\pi}\int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}f(-\mathbf{\Theta}',-s')\mathcal{R}H(\mathbf{e_1},-\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}'+s')ds'd\theta' \\
= & \int_{0}^{\pi}\int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}',s')\mathcal{R}H(\mathbf{e_1},-\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}'+s')ds'd\theta' \text{ d'après la parité de } \mathcal{R}f \text{ vue dans la propriété (2.1.1)}
\end{aligned}$$

On constate alors que si $\mathcal{R}_0 H = \mathcal{R}H(\mathbf{e_1},.)$ est paire, alors

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\pi}\int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}',s')\mathcal{R}H(\mathbf{e_1},-\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}'+s')ds'd\theta' &= \int_{0}^{\pi}\int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}',s')\mathcal{R}H(\mathbf{e_1},\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}'-s')ds'd\theta' \\
&= \int_{0}^{\pi} \mathcal{R}_{\theta'} f * \mathcal{R}_0 H(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}'-s')d\theta'
\end{aligned}$$

et donc

$$f(\mathbf{x}) = \frac{2}{2\pi C_h}\int_0^{\pi} \mathcal{R}_\theta f * \mathcal{R}_0 H\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}\right) d\theta = \frac{1}{\pi C_h}\int_0^{\pi} \mathcal{R}_\theta f * \mathcal{R}_0 H\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}\right) d\theta$$

Remarquons enfin que la parité de la fonction $\mathcal{R}_0 H = \mathcal{R}H(\mathbf{e_1},.)$ est vérifiée dès lors que la fonction H est elle-même paire en sa première variable ; en effet,

$$\forall s \in \mathbf{R},\ \mathcal{R}_0 H(-s) = \int_{\mathbf{R}} H(-s\mathbf{e_1}+t\mathbf{e_2})dt = \int_{\mathbf{R}} H(-s,t)dt$$

et si H est paire en sa première variable, alors on a

$$\int_{\mathbf{R}} H(-s,t)dt = \int_{\mathbf{R}} H(s,t)dt = \mathcal{R}H(s)$$

Or, par définition,

$$H(s,t) = \int_{a>0} \frac{1}{a} h\left(\frac{s}{a},\frac{t}{a}\right)\frac{da}{a^3}$$

Il suffit donc que l'ondelette de reconstruction h soit paire en sa première variable pour assurer la parité de la fonction H en sa première variable, et donc celle de $\mathcal{R}_0 H$. ■

4.2.3 Discrétisation de la formule d'inversion

On applique ici la formule de discrétisation vue dans la propriété (4.1.1). On s'intéresse ainsi à la quantité

$$\widetilde{C_{g,h}} = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^j}\int_0^{2\pi} \mathrm{R}_\theta \mathrm{D}_{\frac{1}{a_0^j}}(\widehat{g_\sigma * h})d\theta$$

Or ici on a

$$\begin{aligned}
\forall \Phi, \qquad & < \int_0^{2\pi} \mathrm{R}_\theta \mathrm{D}_{\frac{1}{a_0^j}} \widehat{(g_\sigma * h)} d\theta, \Phi >= \int_0^{2\pi} \left\langle \mathrm{R}_\theta \mathrm{D}_{\frac{1}{a_0^j}} \widehat{(g_\sigma * h)}, \Phi \right\rangle d\theta = \int_0^{2\pi} \left\langle \widehat{(g_\sigma * h)}, \mathrm{D}_{a_0^j} \mathrm{R}_{-\theta} \Phi \right\rangle d\theta \\
= & \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{h}(k_1, 0) \left(\mathrm{D}_{a_0^j} \mathrm{R}_{-\theta} \Phi \right) (k_1, 0) dk_1 d\theta = \frac{1}{a_0^j} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{h}(k_1, 0) \Phi \left(\frac{k_1}{a_0^j} \mathbf{\Theta} \right) dk_1 d\theta \\
= & \frac{\alpha_{1,2}}{a_0^j} \int_0^{2\pi} \int_{k_1 > 0} \hat{h}(k_1, 0) \Phi \left(\frac{k_1}{a_0^j} \mathbf{\Theta} \right) dk_1 d\theta \text{ où } \alpha_{1,2} = \begin{cases} 2 & \text{si } \hat{h} \text{ est paire en sa première variable.} \\ 1 & \text{si } \hat{h} \text{ est analytique.} \end{cases} \\
\overset{\mathbf{u} = \frac{k_1}{a_0^j} \mathbf{\Theta}}{=} & \frac{\alpha_{1,2}}{a_0^j} \int_{\mathbf{R}^2} \hat{h}(a_0^j |\mathbf{u}|, 0) \Phi(\mathbf{u}) \frac{a_0^j d\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \alpha_{1,2} \int_{\mathbf{R}^2} \hat{h}(a_0^j |\mathbf{u}|, 0) \Phi(\mathbf{u}) \frac{d\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}
\end{aligned}$$

donc

$$\forall \Phi, \left\langle \sum_{j \in \mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^j} \int_0^{2\pi} \mathrm{R}_\theta \mathrm{D}_{\frac{1}{a_0^j}} \widehat{(g_\sigma * h)} d\theta, \Phi \right\rangle = \alpha_{1,2} \int_{\mathbf{R}^2} \left(\sum_{j \in \mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^j} \frac{\hat{h}(a_0^j |\mathbf{u}|, 0)}{|\mathbf{u}|} \right) \Phi(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$$

et la condition d'admissibilité est donc la suivante :

$$\exists \widetilde{C_h} > 0 \mid \forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^2, \ \alpha_{1,2} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \frac{\hat{h}(a_0^j |\mathbf{u}|, 0)}{a_0^j |\mathbf{u}|} = \widetilde{C_h}$$

c'est-à-dire, **si $\hat{h}$ est paire en sa première variable**,

$$\boxed{\exists \widetilde{C_h} > 0 \mid \forall \rho > 0, \ 2 \sum_{j \in \mathbf{Z}} \frac{\hat{h}(a_0^j \rho, 0)}{a_0^j \rho} = \widetilde{C_h}}$$

et **si h est analytique**

$$\boxed{\exists \widetilde{C_h} > 0 \mid \forall \rho > 0, \sum_{j \in \mathbf{Z}} \frac{\hat{h}(a_0^j \rho, 0)}{a_0^j \rho} = \widetilde{C_h}}$$

La formule de reconstruction qui, dans le cas général, s'écrit

$$f = \frac{1}{2\pi \widetilde{C_{g,h}}} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^{2j}} \int_0^{2\pi} \left(\mathrm{W}_g f(a_0^j, ., \theta) * \mathrm{D}_{a_0^j} \mathrm{R}_\theta h \right) d\theta$$

devient ici

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) \qquad = & \frac{1}{2\pi \widetilde{C_h}} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^{2j}} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b} \cdot \mathbf{\Theta}) \mathrm{D}_{a_0^j} \mathrm{R}_\theta h(\mathbf{x} - \mathbf{b}) d\mathbf{b} d\theta \\
= & \frac{1}{2\pi \widetilde{C_h}} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b} \cdot \mathbf{\Theta}) \sum_{j \in \mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^{3j}} h \left(\frac{\mathrm{r}_{-\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{b})}{a_0^j} \right) d\mathbf{b} d\theta \\
\overset{\mathbf{u} = s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp}{=} & \frac{1}{2\pi \widetilde{C_h}} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}_\theta f(s) \int_{\mathbf{R}} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^{3j}} h \left(\frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta} - s) \mathbf{e_1} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}^\perp - t) \mathbf{e_2}}{a_0^j} \right) dt ds d\theta \\
\overset{t' = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}^\perp - t}{a_0^j}}{=} & \frac{1}{2\pi \widetilde{C_h}} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}_\theta f(s) \int_{\mathbf{R}} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^{2j}} h \left(\frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta} - s)}{a_0^j} \mathbf{e_1} + t' \mathbf{e_2} \right) dt ds d\theta \qquad (4.8) \\
= & \frac{1}{2\pi \widetilde{C_h}} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}_\theta f(s) \mathcal{R}_0 \tilde{H}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta} - s) ds d\theta = \frac{1}{2\pi \widetilde{C_h}} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}_\theta f * \mathcal{R}_0 \tilde{H}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Theta}) d\theta \\
& \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

où on a posé

$$\tilde{H}(\mathbf{x}) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^j} h_{a_0^j}(\mathbf{x}) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^{2j}} h\left(\frac{\mathbf{x}}{a_0^j}\right)$$

Reprenant (4.8), on peut aussi écrire

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\widetilde{C_h}} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}_\theta f(s) \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^{2j}} \mathcal{R}_0 h\left(\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s)}{a_0^j}\right) ds d\theta} \tag{4.10}$$

Remarque : ceci permet d'assurer la validité d'une discrétisation que l'on aurait pu obtenir "naïvement", en faisant le "changement de variable" entre "a" et "j" dans la formule continue (en choisissant un pas suffisamment fin pour obtenir à une constante près une bonne approximation de la condition d'admissibilité continue) :

$$C_h = 4\pi \int_0^{+\infty} \frac{\hat{h}(k_1, 0)}{{k_1}^2} dk_1 \simeq 4\pi \ln(a_0) \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{\hat{h}(\rho a_0^j, 0)}{\rho a_0^j} = 2\pi \ln(a_0) \widetilde{C_h}(\rho)$$

autrement dit a_0 doit permettre de garantir que pour tout ρ,

$$\widetilde{C_h}(a_0, \rho) \simeq \frac{1}{2\pi \ln a_0} C_h \tag{4.11}$$

On peut alors écrire

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\ln a_0}{C_h} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}_\theta f * \left(\sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^{2j}} \mathcal{R}_0 h\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s}{a_0^j}\right)\right) d\theta$$

Pour l'implémentation pratique, on calcule au préalable le filtre 1D analytiquement :

$$\mathcal{R}_0 \tilde{H}(s) = \frac{1}{2\pi\widetilde{C_h}} \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a_0^{2j}} \mathcal{R}_0 h\left(\frac{s}{a_0^j}\right) \tag{4.12}$$

On procède ensuite comme pour l'algorithme de rétroprojection filtrée classique, vue au chapitre 2 : on calcule le filtrage des projections 1D par FFT sur une grille régulière, puis on calcule la rétroprojection sur une grille cartésienne, après interpolation linéaire des projections filtrées (voir (2.27)). Le pas de la grille pour le filtrage 1D est le même que dans la rétroprojection filtrée (il est imposé par les conditions d'échantillonnage).
De la même manière que dans l'algorithme de rétroprojection filtrée le filtre rampe est tronqué à la fréquence de coupure des projections, on applique la même troncature aux filtres 1D que l'on applique 1D, tout au moins aux échelles fines pour lesquelles il existe des composantes dont les fréquences sont supérieures à cette fréquence de coupure.

4.2.4 Choix d'une ondelette de reconstruction admissible pour la transformée de Radon

Dans la suite, nous allons faire des tests avec plusieurs ondelettes qui diffèrent selon leur nombre de moments nuls. Nous appliquons d'abord les résultats qui précèdent dans chacun des trois cas.

Exemple 4.2.1 (Chapeau mexicain)
On choisit l'ondelette appelée chapeau mexicain *(en fait ici, son opposée), qui, a une constante près, est égale au Laplacien d'une gaussienne (on la normalise pour que* $\|h\|_2 = 1$*) :*

$$h(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2+y^2-2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \tag{4.13}$$

Sa transformée de Fourier est réelle, isotrope, paire en sa première variable ; elle est donnée par

$$\hat{h}(k,l) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} h(x,y)e^{-i(kx+ly)}dxdy = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(k^2+l^2\right)e^{-\frac{k^2+l^2}{2}}$$

h *et* $\hat{h}$ *sont représentées en figure (4.1).*

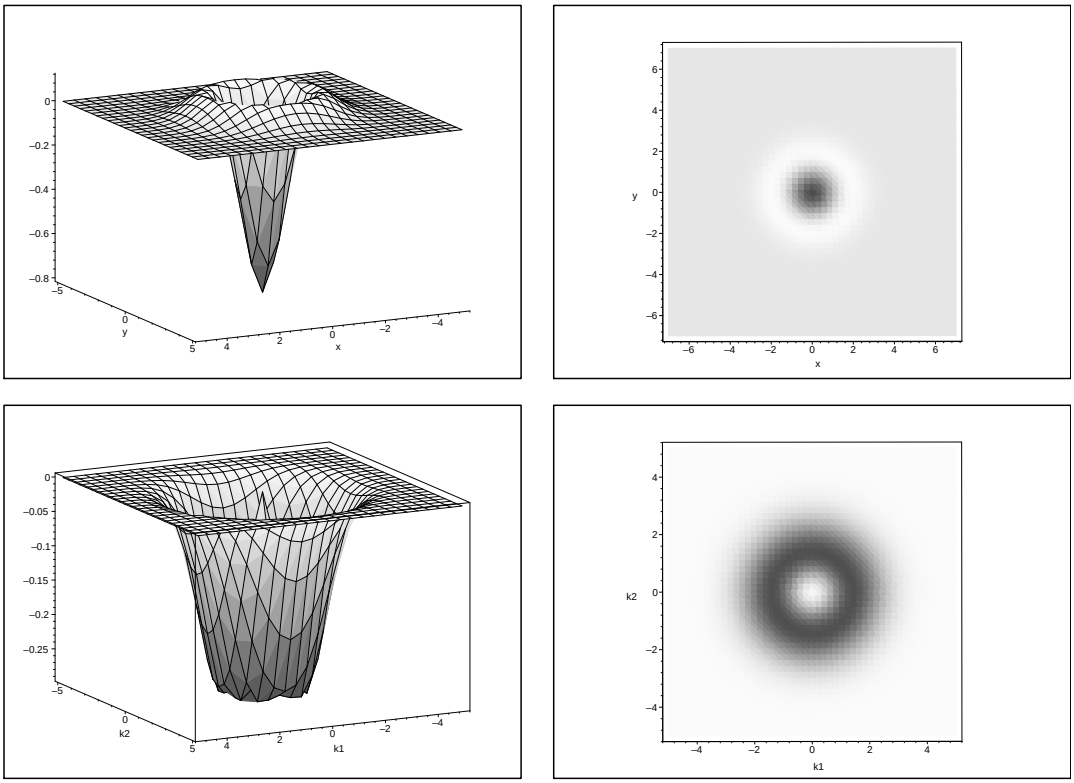


FIG. 4.1 – L'ondelette chapeau mexicain (en haut), et sa transformée de Fourier (en bas) (à gauche, représentation en perspective, et à droite, en projection).

Cette ondelette forme avec la distribution g *définie en (4.4) une paire d'ondelettes admissibles, puisque l'on a :*

$$C_h = 2\pi\int_{\mathbf{R}}\frac{\hat{h}(\lambda,0)}{\lambda^2}d\lambda = -\frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}d\lambda = -\frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = -2\pi$$

Le filtre 1D que l'on applique aux projections s'exprime analytiquement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_0 h(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s,t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (s^2+t^2-2)e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((s^2-2)e^{-\frac{s^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt + e^{-\frac{s^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2\pi}(s^2-2)e^{-\frac{s^2}{2}} + e^{-\frac{s^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (t^2-1)e^{-t^2/2} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \right) \right) \\
&= (s^2-2)e^{-\frac{s^2}{2}} + e^{-\frac{s^2}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-te^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + 1 \right) = e^{-\frac{s^2}{2}}(s^2-1)
\end{aligned}$$

et plus précisément, à l'échelle a, on applique aux projections le filtre suivant

$$\frac{1}{a^2}\mathcal{R}_0 h\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a^2} e^{-\frac{s^2}{2a^2}} \left(\frac{s^2}{a^2} - 1 \right)$$

On constate ainsi que le filtre 1D que l'on applique aux projections n'est autre que le chapeau mexicain 1D (dérivée seconde d'une gaussienne). $\mathcal{R}_0 h$ est représenté en figure (4.2).

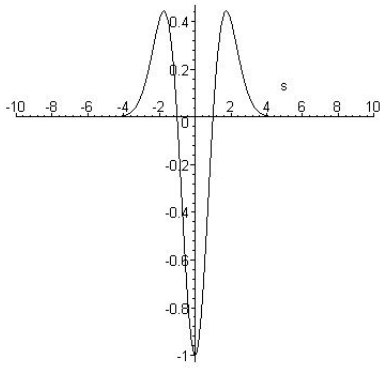


FIG. 4.2 – Filtre 1D associé au chapeau mexicain

***C**ondition de convergence ponctuelle :*

$$F_h(t) = 2\int_{\mathbf{R}} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2} h(tu,v) du dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbf{R}} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}(t^2u^2+v^2-2)e^{-\frac{t^2u^2+v^2}{2}} du dv$$

On obtient

$$F_h(t) = \pi e^{-\frac{t^2}{4}} \left(\mathrm{I}\left(1, \frac{t^2}{4}\right) - \mathrm{I}\left(0, \frac{t^2}{4}\right) \right)$$

où I *désigne la fonction de Bessel modifiée de première espèce, avec [78]*

$$\mathrm{I}(1,x) - \mathrm{I}(0,x) \sim_{x\to+\infty} -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^x \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

On en déduit que

$$F_h(t) \sim_{t\to+\infty} -\frac{2\sqrt{2\pi}}{t^3}$$

Les conditions de convergence ponctuelle sont donc vérifiées.

Condition de discrétisation : comme on l'a vu dans l'approximation (4.11), on cherche un pas a_0 suffisamment fin pour que la quantité

$$\widetilde{C_h}(a_0,\rho)=2\sum_{j\in\mathbf{Z}}\frac{\hat{h}(a_0^j\rho,0)}{a_0^j\rho}=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\rho a_0^j\ e^{-\frac{a_0^{2j}\rho^2}{2}}$$

soit indépendante de ρ, ou, autrement dit pour qu'elle fournisse, quelle que soit la valeur de ρ, une bonne approximation de la condition d'admissibilité continue : on veut que le choix de a_0 permette d'écrire

$$\forall\rho,\widetilde{C_h}(a_0,\rho)\simeq\frac{1}{2\pi\ln a_0}C_h=-\frac{1}{\ln(a_0)}$$

puisque, comme on l'a vu plus haut, pour l'ondelette chapeau mexicain, on a :

$$C_h=-\sqrt{2\pi}\int_{\mathbf{R}}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}d\lambda=-2\pi$$

Numériquement, comme on pourra le visualiser à droite en figure (4.3), on constate que pour $a_0=2^{\frac{1}{4}}$, cette quantité est constante (elle l'est presque pour $a_0=2^{\frac{1}{2}}$, puisque l'amplitude du signal est de l'ordre de 10^{-6}.

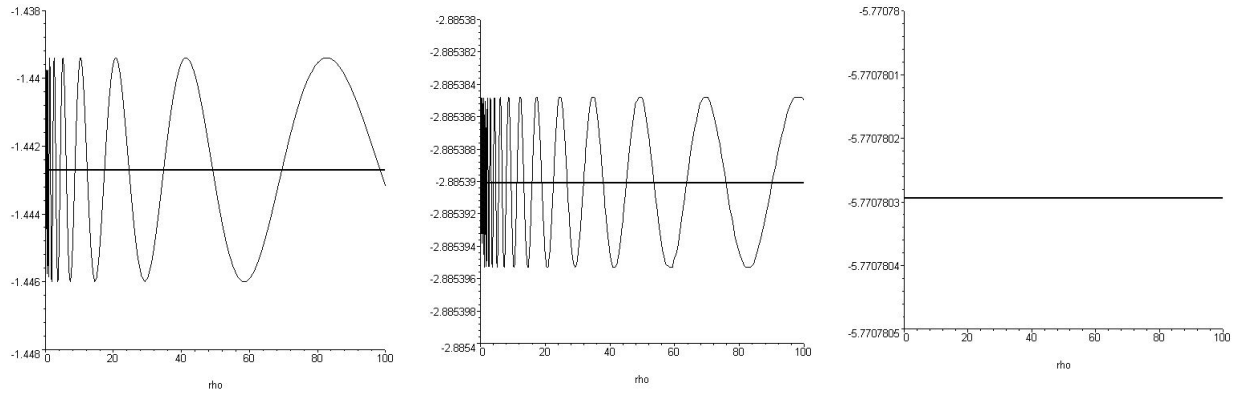


FIG. 4.3 – Recherche d'un pas de discrétisation pour lequel la discrétisation par transformée en ondelettes presque continue est légitime, dans le cas de l'ondelette chapeau mexicain 2D ; on a tracé en trait épais la constante que l'on souhaite approcher, et en trait plus fin, le graphe de la fonction $\widetilde{C_h}(a_0,.)$, et ceci pour $a=2$, puis $a=\sqrt{2}$, puis $a=2^{\frac{1}{4}}$. Numériquement, la fonction peut être considérée comme constante pour $a=2^{\frac{1}{4}}$.

Exemple 4.2.2 (Ondelette créant un filtre à quatre moments nuls.)
On utilise une ondelette construite à partir d'une gaussienne, que l'on dérive 4 fois en x et en y, puis que l'on normalise (pour le chapeau mexicain, on utilisait des dérivées d'ordre 2) ; on obtient ainsi l'ondelette suivante

$$h(x,y)=\frac{2}{\sqrt{57\pi}}(x^4+y^4-6x^2-6y^2+6)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}};$$

dont la transformée de Fourier, est réelle et paire en sa première variable, et s'écrit

$$\hat{h}(k,l)=\frac{2}{\sqrt{57\pi}}(k^4+l^4)e^{-\frac{1}{2}(k^2+l^2)}$$

h et $\hat{h}$ sont représentées en figure (4.4).

h est une ondelette à quatre moments nuls, car on peut vérifier que pour tout couple d'entiers naturels $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$ tels que $\alpha + \beta \leq 3$, on a $\int_{\mathbf{R}^2} x^\alpha y^\beta h(x,y)dxdy = 0$.

Cette ondelette est bien une ondelette admissible pour l'inversion de la transformée de Radon, puisqu'elle vérifie

$$C_h = 2\pi \int_{\mathbf{R}} \frac{\hat{h}(\lambda,0)}{\lambda^2} d\lambda = \frac{4\pi}{\sqrt{57\pi}} \int_{\mathbf{R}} \lambda^2 e^{-\frac{-\lambda^2}{2}} d\lambda = \frac{4\pi}{\sqrt{57\pi}} \sqrt{2\pi} = 4\pi\sqrt{\frac{2}{57}}$$

Le filtre que l'on applique à chacune des projections est une somme de dilatées de la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{R}h(\mathbf{e_1}, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s,t)dt == \frac{2}{\sqrt{57\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (s^4 + t^4 - 6s^2 - 6t^2 + 6) e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{57\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} \left((s^4 - 6s^2 + 6)\sqrt{2\pi} + 3\sqrt{2\pi} - 6\sqrt{2\pi} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{57}} e^{-\frac{s^2}{2}} \left(s^4 - 6s^2 + 3 \right) \end{aligned}$$

Il est représenté en figure (4.5).

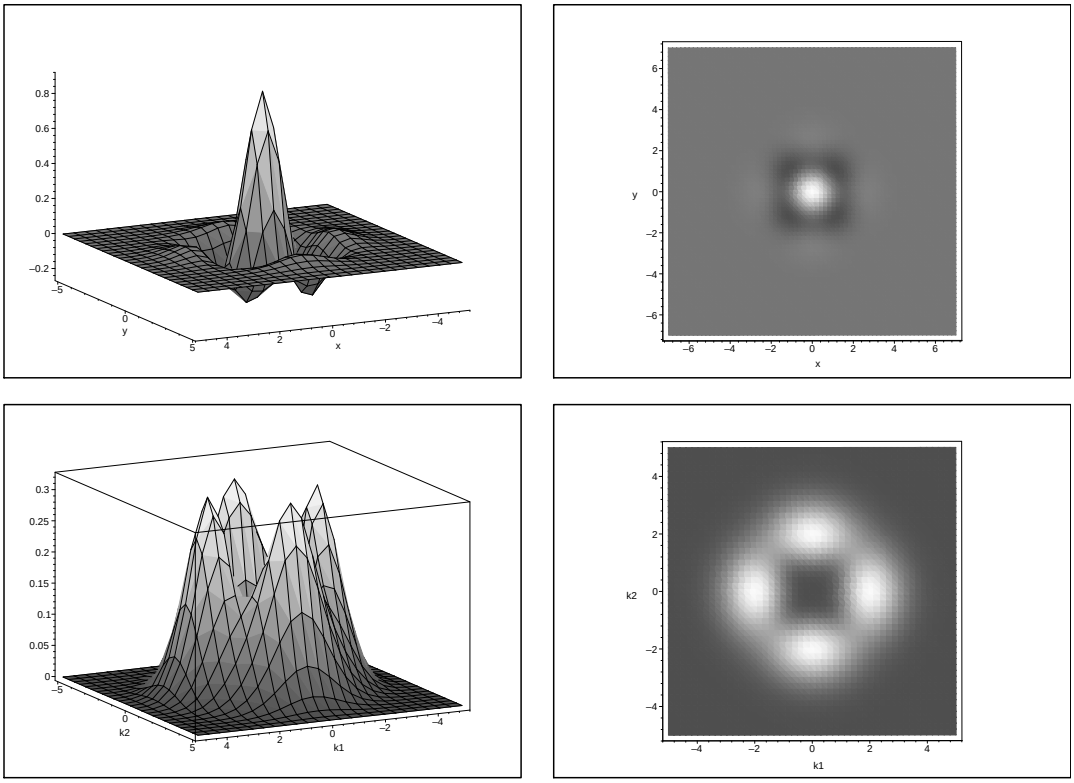


FIG. 4.4 – Ondelette à 4 moments nuls (en haut), et sa transformée de Fourier (en bas).

La condition de convergence en norme $\mathbf{L}^p$, et de convergence ponctuelle aux points de continuité de la fonction s'obtient avec

$$F_h(t) = 2 \int_{\mathbf{R}} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2} h(tu, v) du dv = \frac{2}{\sqrt{57\pi}} \int_{\mathbf{R}} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2} (t^4u^4 + v^4 - 6t^2u^2 - 6v^2 + 6) e^{-\frac{t^2u^2+v^2}{2}} du dv$$

En évaluant cette expression avec le logiciel `Maple`*, on obtient*

$$F_h(t) = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{57}} \pi e^{-\frac{t^2}{4}} \left((1-t^2) \mathrm{I}\left(1, \frac{t^2}{4}\right) - (3-t^2) \mathrm{I}\left(0, \frac{t^2}{4}\right) \right)$$

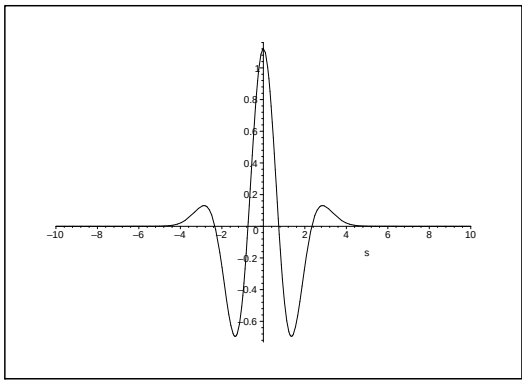


FIG. 4.5 – Filtre 1D associé à l'ondelette à quatre moments nuls présentée en (4.4).

(mêmes notations que dans l'exemple précédent). La fonction `asympt` *de* `Maple` *fournit l'équivalent suivant :*

$$F_h(t) = \mathrm{O}_{t\to+\infty}\left(\frac{e^{-\frac{t^2}{4}}}{t^5}\right)$$

Les conditions de convergence ponctuelle sont donc vérifiées.
***C**ondition de discrétisation : Comme dans l'exemple on cherche un "pas" a_0 suffisamment fin pour que la fonction $\rho \mapsto \widetilde{C_h}(a_0,\rho)$ puisse être considérée comme constante. Ici, cette fonction a la forme suivante :*

$$\widetilde{C_h}(a_0,\rho) = 2\sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{\hat{h}(a_0^j\rho,0)}{a_0^j\rho} = 2\frac{2}{\sqrt{57\pi}}\sum_{j\in\mathbf{Z}} a_0^{3j}\rho^3 e^{-\frac{a_0^{2j}\rho^2}{2}}$$

et, étant donnée la valeur de la constante d'admissibilité continue, on veut donc que

$$\forall\rho, \widetilde{C_h}(a_0,\rho) \simeq \frac{1}{2\pi\ln a_0}C_h = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{57}\ln(a_0)}$$

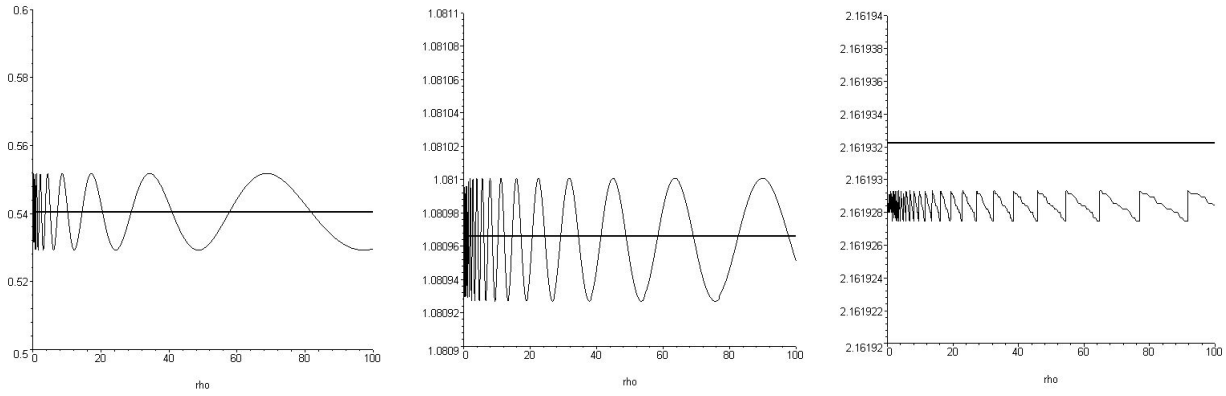


FIG. 4.6 – Recherche d'un pas de discrétisation pour la discrétisation par transformée en ondelettes presque continue, dans le cas de l'ondelette à quatre moments nuls ; on a tracé en trait épais la constante que l'on souhaite approcher, et en trait plus fin, le graphe de la fonction $\widetilde{C_h}(a_0,.)$, et ceci pour $a = 2$, puis $a = \sqrt{2}$, puis $a = 2^{\frac{1}{4}}$. Numériquement, la fonction peut être considérée comme constante pour $a = 2^{\frac{1}{4}}$.

Exemple 4.2.3 (Ondelette engendrant un filtre avec un grand nombre de moments nuls)
On part d'une ondelette de Morlet 2D, définie par

$$m(x,y) = e^{6ix} e^{-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{2}}$$

dont la transformée de Fourier est égale à

$$\widehat{m}(k,l) = e^{-\frac{(k-6)^2+l^2}{2}}$$

Cette fonction n'est pas exactement de moyenne nulle, mais on a coutume de considérer qu'elle l'est approximativement. Néanmoins, ici, en l'état, elle n'est pas admissible pour l'inversion de la transformée de Radon (en effet, $k \mapsto \dfrac{e^{-\frac{(k-6)^2}{2}}}{k^2}$ n'est pas intégrable en 0). On peut cependant la modifier, pour la rendre admissible. Il suffit pour cela d'introduire par exemple la fonction suivante, comme le font Antoine et Murenzi dans [2] :

$$-\frac{\partial m}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial m}{\partial y^2}(x,y) = e^{6ix} e^{-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{2}} (2 - (x-6i)^2 - y^2)$$

Après normalisation, on obtient

$$h(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1442\pi}} e^{6ix} e^{-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{2}} (2 - (x-6i)^2 - y^2)$$

Sa transformée de Fourier est égale à

$$\widehat{h}(k,l) = \frac{1}{\sqrt{1442\pi}} e^{-\frac{(k-6)^2+l^2}{2}} (k^2+l^2)$$

Ainsi modifiée, cette fonction a été rendue admissible pour la transformée de Radon :

$$C_h = 2\pi \int_{\mathbf{R}} \frac{\widehat{h}(\lambda,0)}{\lambda^2} d\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{1442\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{(\lambda-6)^2}{2}} d\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{1442\pi}} \sqrt{2\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{721}}$$

La fonction h est une ondelette complexe, analytique en sa première variable, car sa transformée de Fourier peut être considérée comme numériquement nulle pour $k < 0$.

Le filtre 1D appliqué aux projections est égal à :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 h(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s,t)dt = \frac{1}{\sqrt{1442\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{6is} e^{-\frac{\left(s^2+t^2\right)}{2}} (2 - (s-6i)^2 - t^2) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{721}} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{6is} (1 - (s-6i)^2) \end{aligned}$$

avec des calculs d'intégrales similaires à ceux que l'on a effectués dans les exemples précédents.

***C**ondition de discrétisation : Comme dans les exemples précédents, on cherche un "pas" a_0 suffisamment fin pour que la fonction $\rho \mapsto \widetilde{C_h}(a_0,\rho)$ puisse être considérée comme constante. Ici, cette fonction a la forme suivante (puisque l'ondelette est analytique en sa première variable)*

$$\widetilde{C_h}(a_0,\rho) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{\hat{h}(a_0^j\rho,0)}{a_0^j\rho} = \frac{1}{\sqrt{1442\pi}} \sum_{j\in\mathbf{Z}} e^{-\frac{(a_0^j\rho-6)^2}{2}} (a_0^j\rho)$$

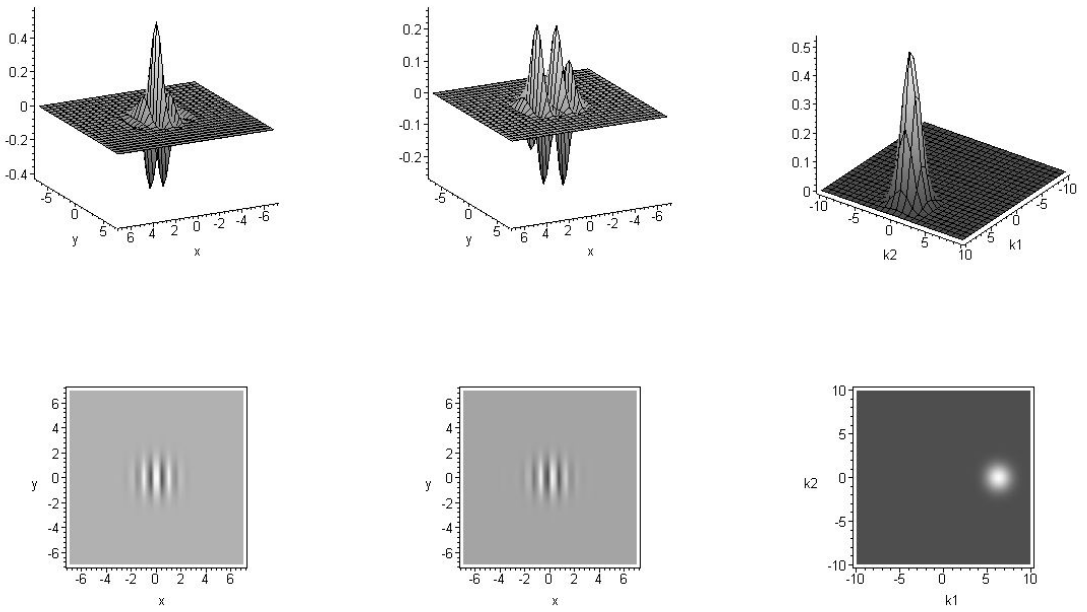


FIG. 4.7 – Ondelette directionnelle complexe (ondelette de Morlet modifiée) : sa partie réelle, sa partie imaginaire et sa transformée de Fourier.

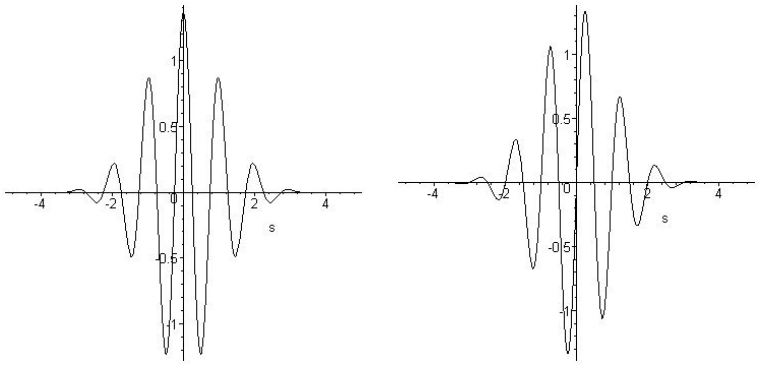


FIG. 4.8 – Filtre 1D associé à l'ondelette de Morlet modifiée (partie réelle et partie imaginaire)

et, étant donnée la valeur de la constante d'admissibilité continue, on veut donc que

$$\forall \rho, \widetilde{C_h}(a_0, \rho) \simeq \frac{1}{\pi \ln a_0} C_h = \frac{2}{\sqrt{721}\ln(a_0)}$$

***C**ondition de convergence :*

$$\begin{aligned}
F_h(t) &= 2\int_{\mathbf{R}}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}h(tu,v)dudv \\
&= \frac{2}{\sqrt{1442\pi}}\int_{\mathbf{R}}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}e^{6itu}e^{-\frac{\left(t^2u^2+v^2\right)}{2}}(38+12itu--t^2u^2-v^2)dudv \\
&= \frac{2}{\sqrt{1442\pi}}\int_{\mathbf{R}}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}e^{-\frac{\left(t^2u^2+v^2\right)}{2}}\left(\cos(6tu)\left(38-t^2u^2-v^2\right)-12\sin(6tu)tu\right)dudv \\
&\quad (\textit{seule la partie réelle subsiste, la partie imaginaire est nulle}) \\
&= \frac{8}{\sqrt{1442\pi}}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{1} \sqrt{1-u^2}e^{-\frac{\left(t^2u^2+v^2\right)}{2}}\left(\cos(6tu)\left(38-t^2u^2-v^2\right)-12\sin(6tu)tu\right)dudv
\end{aligned}$$

Nous ne sommes pas parvenus à une expression explicite de F_h ; néanmoins, par la méthode des rectangles, on peut se convaincre que les intégrales $t \mapsto |F_h(t)|$ et $t \mapsto t\,|F_h(t)|$ sont intégrables sur $\mathbf{R}^+$ - nous avons obtenu $\int_0^\infty |F_h(t)|\,dt \simeq 1,9$ et $\int_0^\infty t\,|F_h(t)|\,dt \simeq 0,5$ (dans les deux cas à 10^{-1} près).

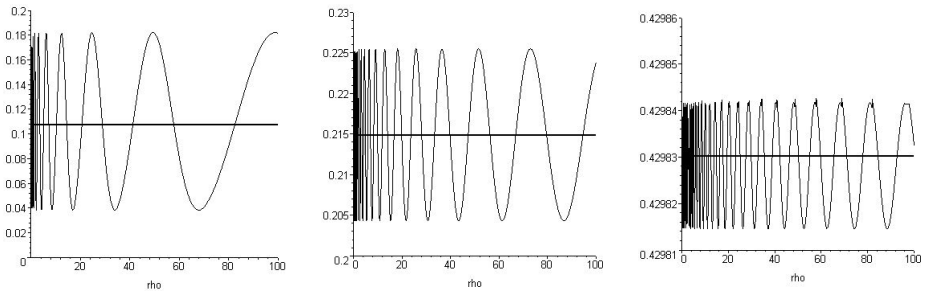


FIG. 4.9 – Recherche d'un pas de discrétisation pour la discrétisation par transformée en ondelettes presque continue, dans le cas de l'ondelette de Morlet modifiée ; on a tracé en trait épais la constante que l'on souhaite approcher, et en trait plus fin, le graphe de la fonction $\widetilde{C_h}(a_0, .)$, et ceci pour $a = 2$, puis $a = \sqrt{2}$, puis $a = 2^{\frac{1}{4}}$. Numériquement, la fonction peut être considérée comme constante pour $a = 2^{\frac{1}{4}}$.

4.2.5 Tests de reconstruction à partir de données globales

Nous avons implémenté la formule (4.10) pour les trois ondelettes présentées dans le paragraphe précédent. Nous présentons les résultats obtenus pour l'ondelette chapeau mexicain en figure (4.10) et pour l'ondelette de Morlet modifiée en figure (4.11) : les reconstructions obtenues (dans la colonne de gauche) sont tout à fait satisfaisantes, et en tout cas comparables aux résultats obtenus avec la méthode classique de rétroprojection filtrée (dans la colonne de droite). Elles sont similaires pour les deux choix d'ondelettes.

Dans tous les cas, on se place dans les conditions d'échantillonnage de la transformée de Radon énoncées dans le chapitre 2, c'est-à-dire que pour des images de taille 256×256, le pas en s est égal à 1 (unité : pixel), et on utilise 450 projections sur $[0, \pi[$.

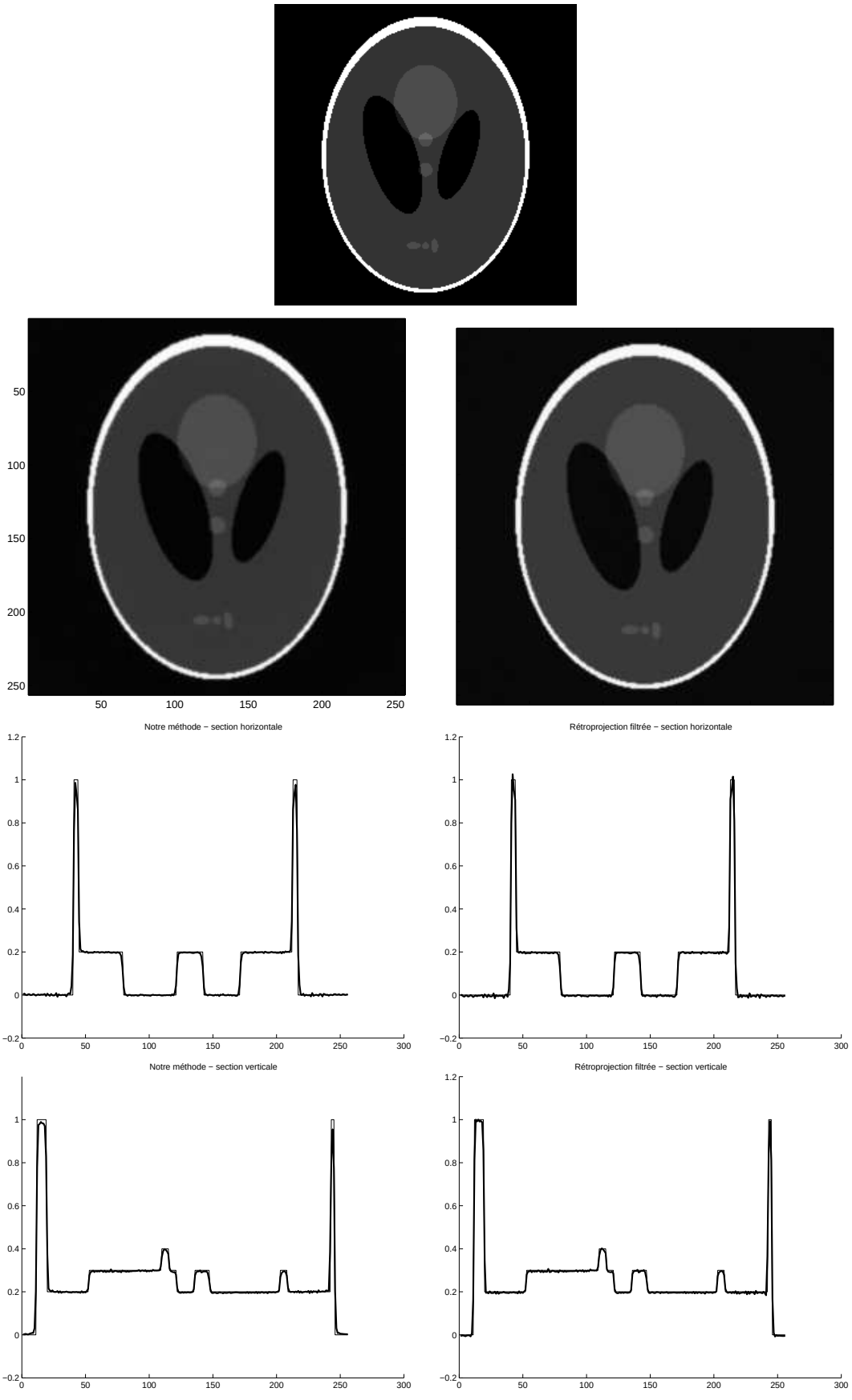


FIG. 4.10 – Reconstruction à partir de données globales - Ondelette chapeau mexicain (pour le filtre, les échelles extrêmes choisies sont $2^{-\frac{11}{4}}$ et $2^{\frac{32}{4}}$).

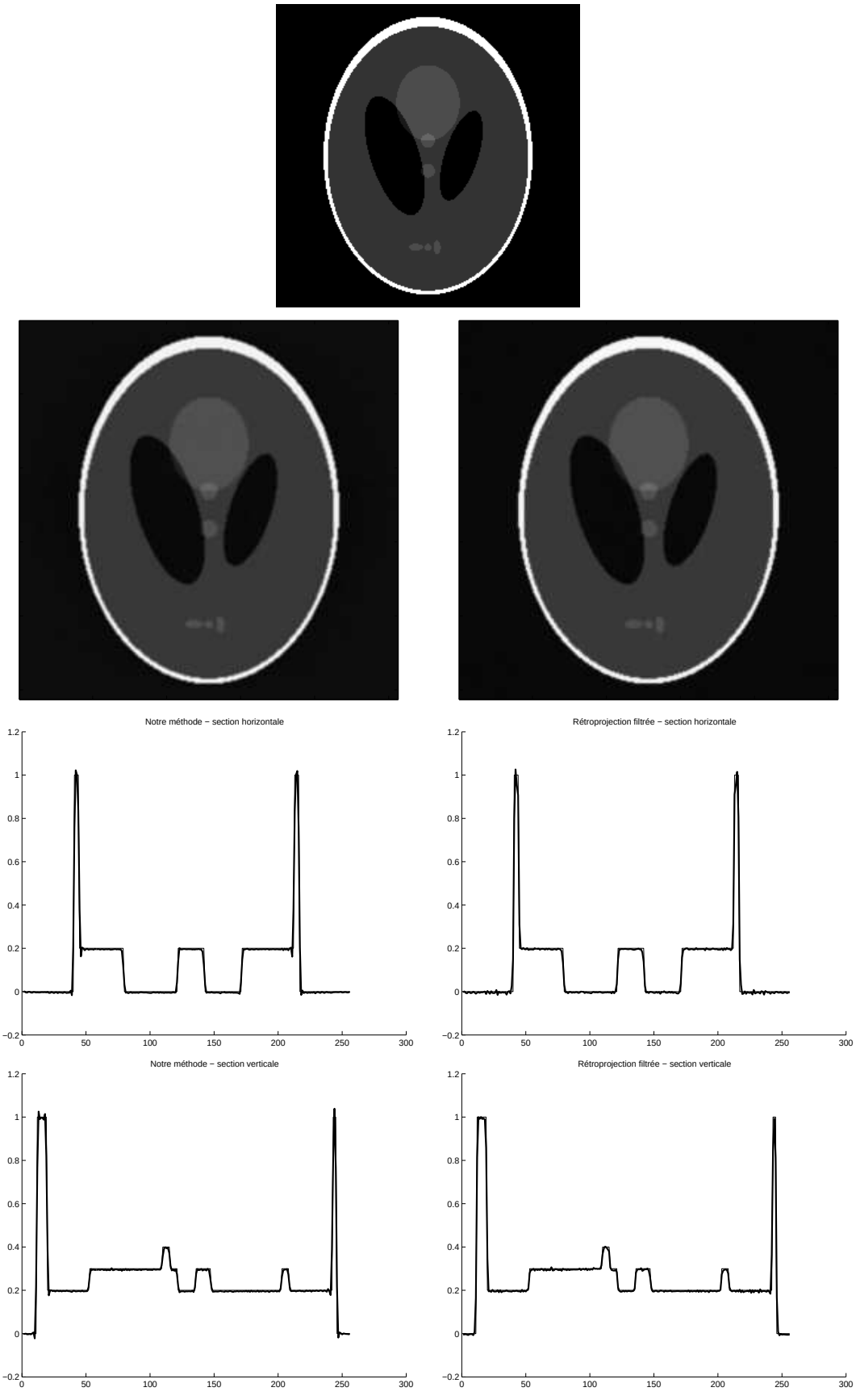


FIG. 4.11 – Reconstruction à partir de données globales - Ondelette de Morlet modifiée (pour le filtre, les échelles extrêmes choisies sont $2^{\frac{6}{4}}$ et $2^{\frac{45}{4}}$).

Vers la méthode locale : reconstructions à partir de données globales à différentes échelles Nous avons représenté en figure (4.12) la reconstruction du fantôme de Shepp et Logan à partir de données globales, en ajoutant progressivement des échelles. On peut visualiser la convergence ponctuelle de la reconstruction vers la fonction initiale en tout point où la fonction initiale est continue.

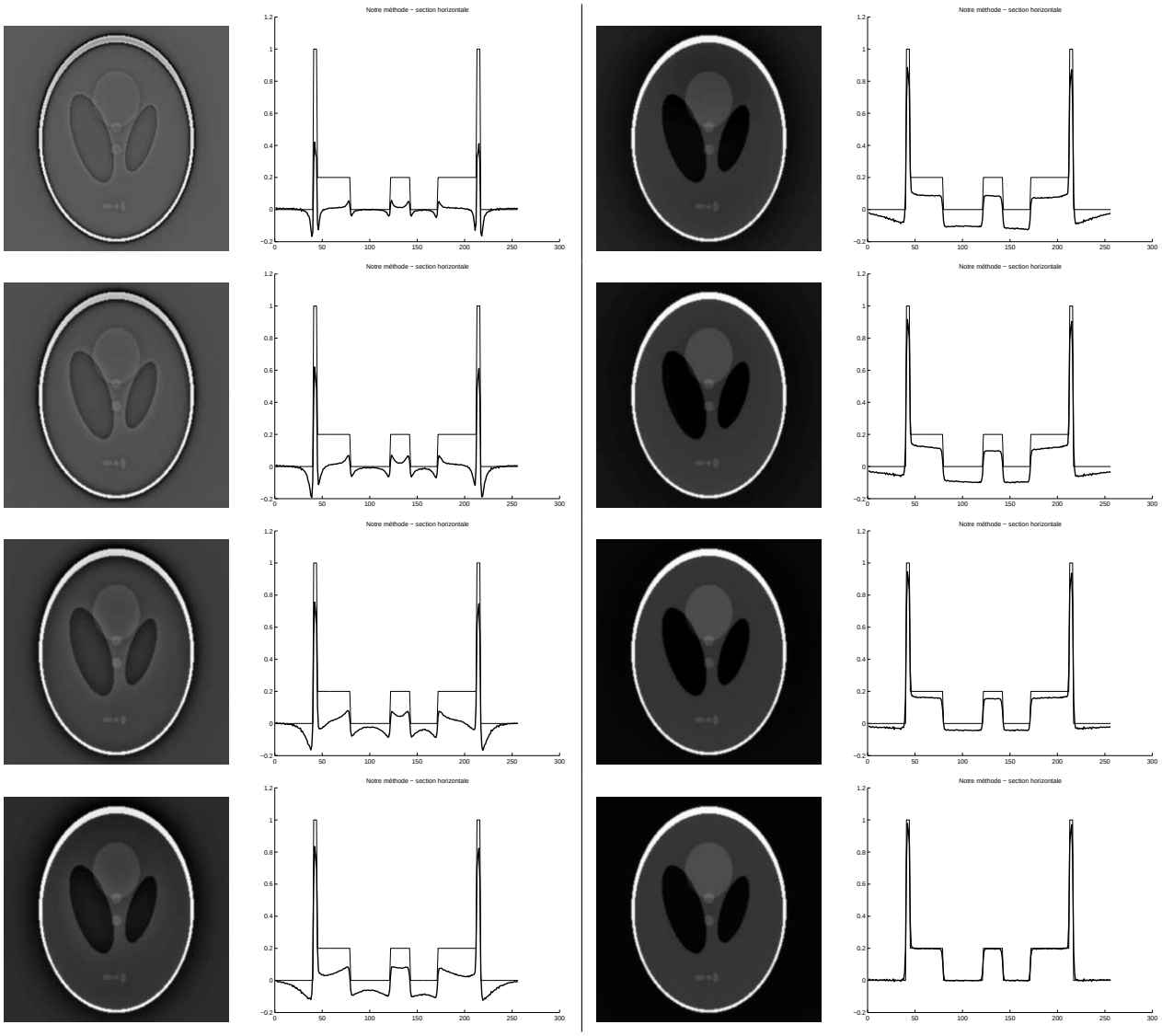


FIG. 4.12 – Convergence de la reconstruction au fil des échelles (chapeau mexicain ; échelle minimale : $2^{-\frac{11}{4}}$; échelles maximales : de haut en bas sur la colonne de gauche : $2^{-\frac{2}{4}}$,$2^{-\frac{6}{4}}$,$2^{-\frac{10}{4}}$,$2^{-\frac{14}{4}}$, puis de haut en bas sur la colonne de droite : $2^{-\frac{18}{4}}$,$2^{-\frac{22}{4}}$,$2^{-\frac{26}{4}}$,$2^{-\frac{32}{4}}$. Les reconstructions ont été normalisées entre 0 et 1, mais pour les sections, les valeurs exactes ont été préservées, de telle sorte que la convergence puisse être visualisée.

4.3 Formule d'inversion locale de la transformée de Radon

4.3.1 Le problème intérieur

La formule continue établie dans le cas de données globales est la suivante :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi C_h}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta})\frac{1}{a}h\left(\frac{r_{-\theta}(\mathbf{x}-\mathbf{b})}{a}\right)d\mathbf{b}d\theta\frac{da}{a^3}$$

Nous allons maintenant étudier comment elle peut s'adapter à l'exploitation de données locales. L'idée que nous allons mettre en oeuvre ici consiste à reconstruire partiellement la fonction f en ne reconstruisant dans la région d'intérêt que les composantes de f à certaines échelles, à savoir celles qui auraient été reconstruites de manière similaire si l'on avait disposé de toutes les données.
Il y a alors deux manières d'appréhender la troncature : soit en tronquant la décomposition de f en ondelettes $2D$ dans le domaine direct, soit en appliquant un filtre tronqué aux projections. Nous allons les exposer l'une après l'autre.

4.3.1.1 Problème intérieur et troncature de la formule dans le domaine direct

On suppose que l'on connaît $\mathcal{R}f(\mathbf{\Theta}, s)$ pour tous les angles θ, mais seulement pour les abscisses s tel que $|s| \leq \rho_0$. Une direction $\mathbf{\Theta}$ étant fixée, on dispose donc de $\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta})$ en tous les $\mathbf{b}$ tels que $|\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}| \leq \rho_0$. On dispose en particulier des valeurs $\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta})$ en tous les points $\mathbf{b}$ tels que $|\mathbf{b}| \leq \rho_0$ (car alors, quelle que soit la valeur de θ dans $[0,\pi]$, $|\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}| \leq |\mathbf{b}|\ \ |\mathbf{\Theta}| = |\mathbf{b}| \leq \rho_0$).

On fixe une échelle a et une direction $\mathbf{\Theta}$; on isole dans la formule de reconstruction la composante associée :

$$f_{\mathrm{recons},a,\theta}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^2}\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta})\frac{1}{a}h\left(\frac{r_{-\theta}(\mathbf{x}-\mathbf{b})}{a}\right)d\mathbf{b} = \int_{\mathbf{R}^2}\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta})h_{a,\theta}\left(\mathbf{x}-\mathbf{b}\right)d\mathbf{b}$$

On suppose que le support de h est inclus dans le disque de rayon M, où $M > 0$.
Pour $\theta \in [0,\pi[$ et $a > 0$, le support de $h_{a,\theta}$ est donc inclus dans le disque de rayon aM.

On cherche alors les points $\mathbf{b}$ qui vont avoir une contribution non nulle dans le calcul de $f_{\mathrm{recons},a,\theta}(\mathbf{x})$.

$$h_{a,\theta}\left(\mathbf{x}-\mathbf{b}\right) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x}-\mathbf{b} \in \mathrm{supp}(h_{a,\theta}) \Rightarrow |\mathbf{x}-\mathbf{b}| \leq aM$$

ce qui permet d'écrire, en utilisant l'inégalité $|\mathbf{b}| \leq |\mathbf{b}-\mathbf{x}| + |\mathbf{x}|$, l'implication suivante :

$$h_{a,\theta}\left(\mathbf{x}-\mathbf{b}\right) \neq 0 \Rightarrow |\mathbf{b}| \leq aM + |\mathbf{x}|$$

Par conséquent, on constate que si l'on se place en un point $\mathbf{x}$ du domaine direct à l'intérieur du disque de rayon $\rho_0 - aM$ ($|\mathbf{x}| \leq \rho_0 - aM$), alors on est assuré de l'implication

$$h_{a,\theta}\left(\mathbf{x}-\mathbf{b}\right) \neq 0 \Rightarrow |\mathbf{b}| \leq \rho_0$$

c'est-à-dire que les points $\mathbf{b}$ qui apportent une contribution non nulle au calcul de $f_{\mathrm{recons},a,\theta}(\mathbf{x})$ sont des points où les coefficients associés, à savoir $\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta})$, sont connus quelle que soit la valeur de θ ; autrement dit, **en se restreignant à la région des $\mathbf{x}$ tels que $|\mathbf{x}| \leq \rho_0 - aM$, alors à partir des données locales disponibles, on peut reconstruire $f_{\mathrm{recons},a,\theta}(\mathbf{x})$ dans les mêmes conditions que si l'on avait disposé de toutes les données**. La région d'exposition de rayon ρ_0 étant fixée, on a défini en la périphérie de son intérieur des marges de rayon aM (donc de largeur croissante quand l'échelle devient plus grossière) à l'intérieur desquelles on peut reconstruire $f_{\mathrm{recons},a,\theta}$ comme si l'on avait eu des

données globales.
On a donc

$$\forall \mathbf{x}, |\mathbf{x}| \leq \rho_0 - aM \Rightarrow f_{\text{recons},a,\theta}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^2} \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}) h_{a,\theta}(\mathbf{x}-\mathbf{b})\, d\mathbf{b} = \int_{\mathbf{b};|\mathbf{b}|\leq\rho_0} \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}) h_{a,\theta}(\mathbf{x}-\mathbf{b})\, d\mathbf{b}$$

4.3.1.2 Problème intérieur et troncature du filtre 1D

Comme on l'a vu plus haut quand on a fait le lien avec la formule de rétroprojection filtrée, en conservant $\mathbf{R}^2$ comme domaine d'intégration et en faisant le changement de variables $\mathbf{b} = s\mathbf{\Theta} + t\mathbf{\Theta}^\perp$, $\mathbf{\Theta}$ étant fixé, on sait que

$$f_{\text{recons},a,\theta}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^2} \mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}) h_{a,\theta}(\mathbf{x}-\mathbf{b})\, d\mathbf{b} = \int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}_\theta f(s) a\mathcal{R}h_a(\mathbf{e_1}, \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s)\, ds$$

En utilisant une généralisation de la propriété vue dans la propriété (2.1.2) sur le support de la transformée de Radon, on sait que supposer le support de h_a inclus dans la boule de rayon aM permet de dire que le support de sa transformée de Radon dans la direction $\mathbf{e_1}$ $\mathcal{R}h_a(\mathbf{e_1}, .)$ est inclus dans l'intervalle $[-aM, aM]$. Comme plus haut, si l'on cherche à identifier les s qui vont apporter une contribution non nulle à la reconstruction $f_{\text{recons},a,\theta}(\mathbf{x})$ dans cette formulation, on peut écrire les implications :

$$\mathcal{R}h_a(\mathbf{e_1}, \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s \in [-aM, aM] \Rightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - aM \leq s \leq \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} + aM$$

et si l'on restreint les points $\mathbf{x}$ où l'on garantit la reconstruction aux points $\mathbf{x}$ tels que $|\mathbf{x}| \leq \rho_0 - aM$, alors quelle que soit la valeur de $\mathbf{\Theta}$, on a

$$aM - \rho_0 \leq \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} \leq \rho_0 - aM$$

et donc

$$\mathcal{R}h_a(\mathbf{e_1}, \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s) \neq 0 \Rightarrow -\rho_0 \leq s \leq \rho_0$$

Ainsi, on peut aussi écrire

$$\forall \mathbf{x},\ |\mathbf{x}| \leq \rho_0 - aM \Rightarrow f_{\text{recons},a,\theta}(\mathbf{x}) \quad = \quad \int_{-\rho_0}^{\rho_0} \mathcal{R}_\theta f(s) a\mathcal{R}h_a(\mathbf{e_1}, \mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta} - s)\, ds$$

Remarque : à la différence des méthodes de type rétroprojection filtrée vues dans le chapitre précédent, les filtres 1D ne sont pas modifiés par le filtre rampe, et ils ont un support dont l'étendue est parfaitement connue à chaque échelle.

C'est cette dernière approche que nous avons mise en oeuvre dans notre implémentation de la formule de reconstruction locale : en effet, l'adaptation de la méthode utilisée pour les données locales est immédiate : il suffit de tronquer convenablement en échelles le filtre 1D, vu en (4.12), que l'on précalcule, les autres étapes (filtrage et rétroprojection) étant inchangées. Notons toutefois que, comme nous l'avons mentionné en (2.45), il est connu en tomographie locale que prolonger les projections tronquées par continuité permet de réduire les artefacts au bord de la région d'expsoition : nous l'appliquons ici.

4.3.1.3 Tests de reconstruction locale

Tests sur le fantôme de Shepp et Logan Reconstruction de la région centrale du fantôme de Shepp et Logan avec l'ondelette chapeau mexicain.
Nous avons d'abord réalisé les tests classiques des méthodes pour le problème intérieur, à savoir la reconstruction de la région centrale du fantôme de Shepp et Logan.
Dans ces tests,

- le rayon du support de l'ondelette chapeau mexicain peut numériquement être considéré égal à $M = 6$;
- nous avons choisi, comme dans les exemples donnés dans le chapitre précédent, de fixer le rayon de la région d'exposition 32 pixels : $RE = 32$;
- supposons qu'un rayon de région d'intérêt ait été fixé, par exemple $RI = 23$: alors on peut garantir une reconstruction de la fonction jusqu'à l'échelle $j_{\max}$ telle que $6a_0^{j_{\max}} = 9$ (6 est le rayon M, 9 la marge entre RI et RE), soit $j_{\max} = \lfloor \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln a_0} \rfloor$, soit, pour $a_0 = 2^{\frac{1}{4}}$, $j_{\max} = 2$.

La figure (4.13) présente les résultats obtenus avec ces paramètres.

Reconstruction d'une région décentrée du fantôme de Shepp et Logan avec l'ondelette chapeau mexicain.
Nous complétons le test classique présenté ci-dessus par une reconstruction locale d'une région décentrée du fantôme de Shepp et Logan.
On a toujours $M = 6$; $RE = 32$; $RI = 23$; $a_0 = 2^{\frac{1}{4}}$, $j_{\max} = 2$. La région d'exposition est centrée autour du point de coordonnées $(206, 128)$.
La figure (4.14) présente les résultats obtenus avec ces paramètres.

Mise en défaut de la méthode de rétroprojection filtrée tronquée dans le cas du problème intérieur, et application de notre méthode. Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 2, nous avons constaté, dans les expériences que nous avons réalisées pour ce travail, que très souvent la méthode de rétroprojection filtrée a un comportement très satisfaisant en présence de données locales ; par conséquent, il nous semble que chercher à développer de nouvelles méthodes locales ne se justifie que si les méthodes nouvelles proposées se comportent "au moins aussi bien" que la rétroprojection filtrée quand celle-ci a un comportement satisfaisant, et si elles présentent des résultats meilleurs quand la rétroprojection filtrée est mise en défaut.

Nous revenons ici à l'exemple que nous avions présenté dans le chapitre 2 (figure 2.31), pour lequel nous avions dit que la rétroprojection filtrée n'était pas satisfaisante car, du fait de la présence de structures extérieures à la région d'intérêt, des structures identiques dans la région d'intérêt dans le fantôme initial n'étaient pas reconstruites de manière similaire dans la reconstruction finale ; de plus les discontinuités présentes en périphérie de la région d'intérêt étaient difficilement visibles dans la reconstruction. Nous présentons les résultats obtenus avec notre méthode en figure (4.15) : en restreignant les échelles utilisées dans la reconstruction aux échelles fines (ici $2^{\frac{2}{4}}$), on arrive à reconstruire les mêmes coefficients que ceux que l'on aurait reconstruits avec des données globales (cf. exemple précédent, avec la figure (4.14)), et la symétrie de l'image initiale est respectée dans la reconstruction obtenue. De plus, dans l'image obtenue, les discontinuités sont clairement visibles (frontière entre les deux cercles les plus extérieurs comprise).

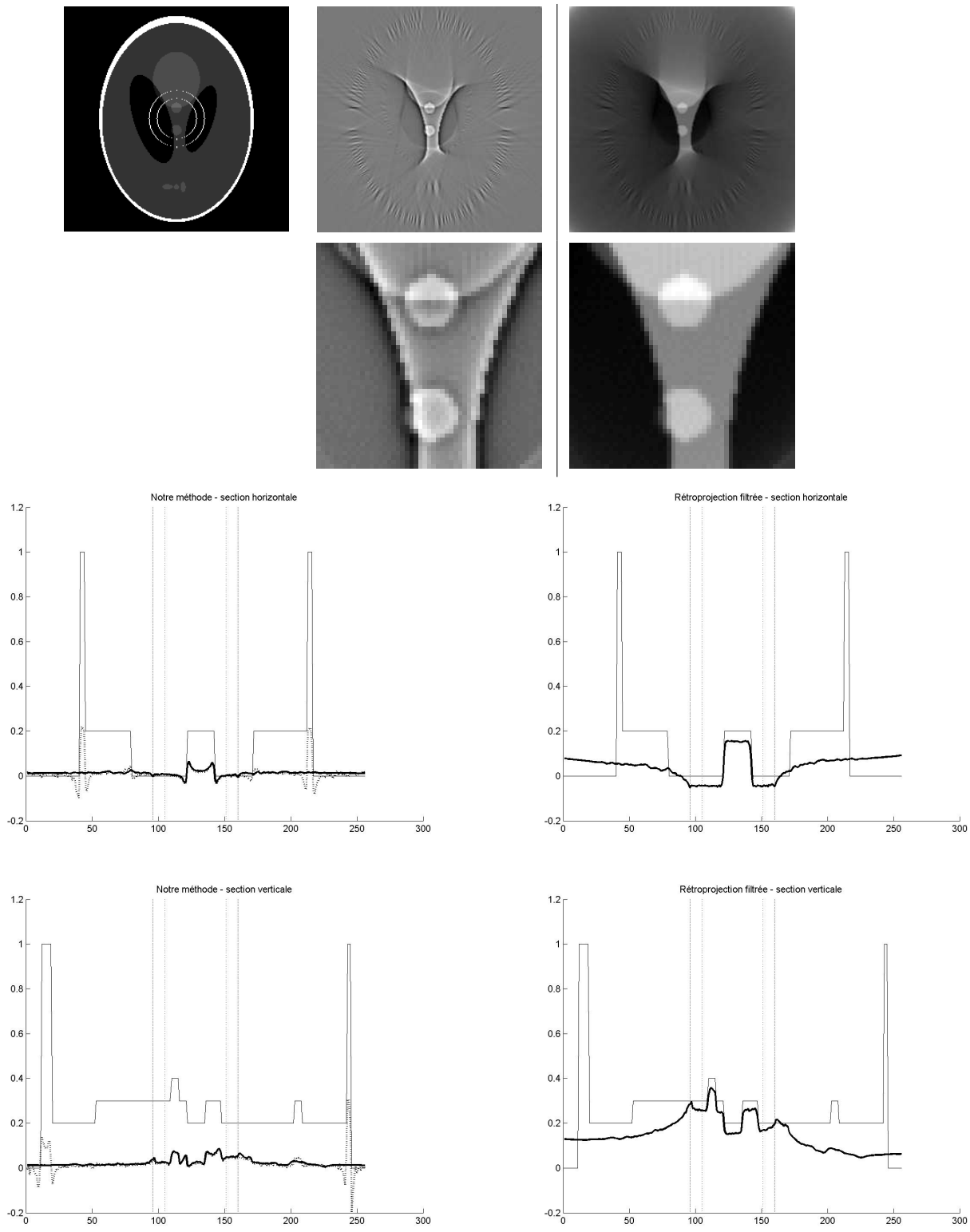


FIG. 4.13 – Reconstruction de la région centrale du fantôme de Shepp et Logan à partir de données locales (les limites des régions d'intérêt et d'exposition sont matérialisées par des pointillés verticaux). Comparaison entre notre méthode (à gauche), et la méthode de rétroprojection filtrée appliquée naïvement aux données tronquées (à droite) ; à gauche, on a représenté également, en pointillés épais, la reconstruction obtenue avec notre méthode, pour la même gamme d'échelle, mais avec des données complètes (paramètres de reconstruction donnés dans le texte).

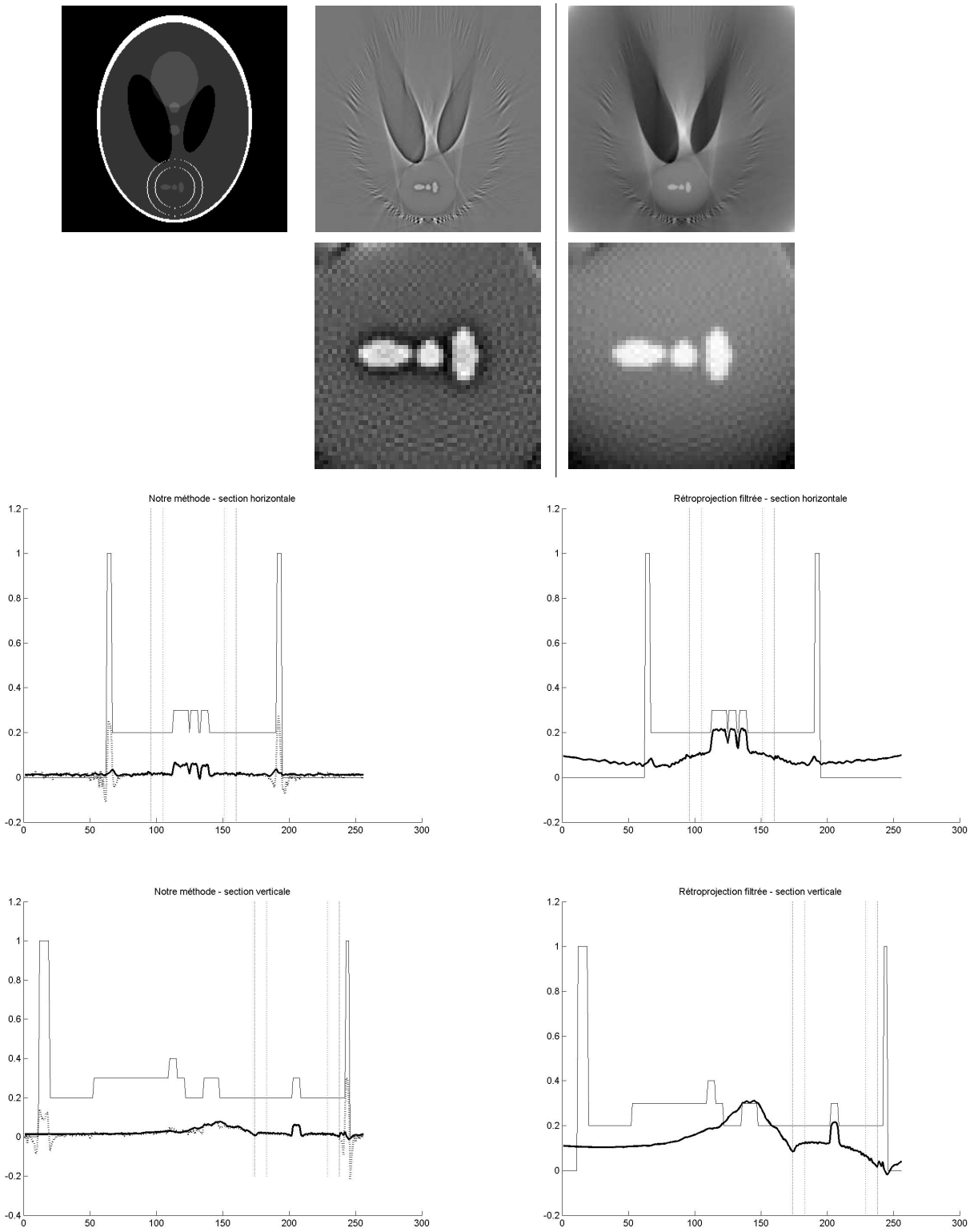


FIG. 4.14 – Reconstruction d'une région décentrée du fantôme de Shepp et Logan à partir de données locales. Comparaison entre notre méthode (à gauche), et la méthode de rétroprojection filtrée (à droite) (mêmes conventions que dans la figure précédente).

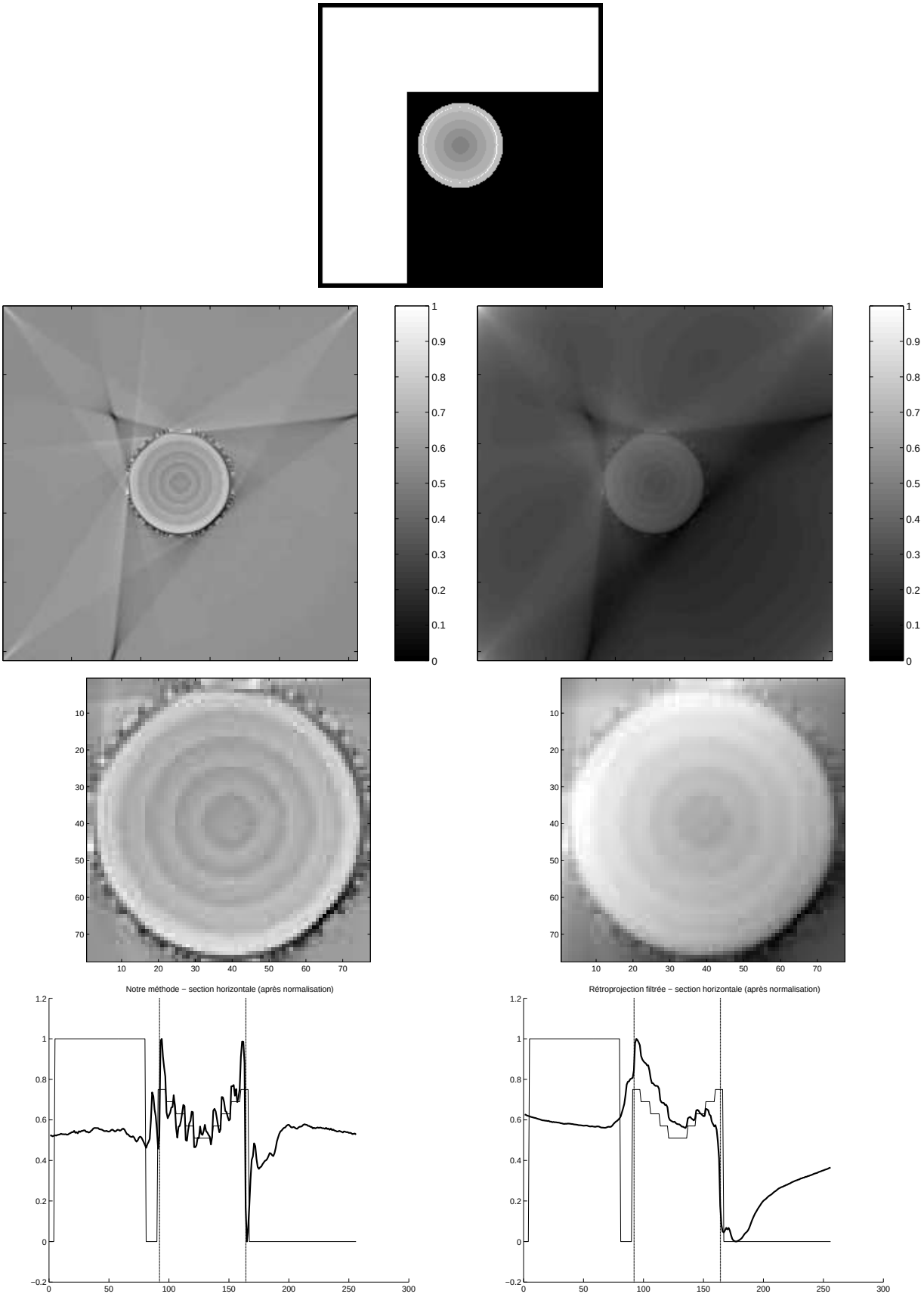


FIG. 4.15 – Un exemple où, sur des données locales, notre méthode (à gauche) a un comportement plus satisfaisant que la rétroprojection filtrée (à droite) : comme on peut le constater sur les reconstructions (en 2ème ligne), et les zooms sur la région d'intérêt (en 3ème ligne), les discontinuités sont plus nettes, même en périphérie de la région d'intérêt ; de plus, comme on peut le voir sur les sections des reconstructions, la symétrie initiale de l'image est préservée, ce qui n'est pas le cas avec la rétroprojection filtrée. L'ondelette utilisée est l'ondelette chapeau mexicain, et l'échelle maximale est $2^{\frac{2}{4}}$.

4.3.2 Tomographie 2D à angle limité

On connait la transformée de Radon pour un intervalle d'angles $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ (ou une réunion finie d'intervalles de ce type). Dans la formule de reconstruction globale, ne sont donc identifiables que les composantes utilisées dans la formule suivante :

$$f_{\text{recons},\theta_{\min},\theta_{\max}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi C_h}\int_0^{+\infty}\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}}\int_{\mathbf{R}^2}\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta})\frac{1}{a}h\left(\frac{r_{-\theta}(\mathbf{x}-\mathbf{b})}{a}\right)d\mathbf{b}d\theta\frac{da}{a^3} \quad (4.14)$$

On pourrait se contenter de tronquer ainsi la formule : toute l'information disponible sur la transformée de Radon serait mobilisée, mais alors on reconstruirait exactement la même fonction qu'avec la méthode de rétroprojection filtrée tronquée, dont on sait qu'elle entraîne des artefacts que l'on voudrait éviter ; ces artefacts sont situés au voisinage des tangentes aux structures présentes dans l'image, tangentes dans les directions $\theta_{\min}$ et $\theta_{\max}$.

On peut expliquer brièvement l'origine des artefacts de la manière suivante : la présence, en un point $\mathbf{y}$ du domaine direct, d'une singularité dirigée selon une direction $\mathbf{\Theta}$, engendre, après filtrage de $\mathcal{R}_\theta f$ par le filtre rampe, des valeurs non nulles au voisinage du point d'abscisse $\mathbf{y}\cdot\mathbf{\Theta}$ (dans le domaine de Radon, sur le détecteur associé à la direction $\mathbf{\Theta}$) . Si l'on se place ensuite en un point $\mathbf{x}$ du domaine direct, tel que $\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}$ est proche de $\mathbf{y}\cdot\mathbf{\Theta}$, alors, lors de la rétroprojection dans la direction $\mathbf{\Theta}$, une contribution significative est ainsi apportée dans la reconstruction au point $\mathbf{x}$, et ceci du seul fait de la présence de la singularité en $\mathbf{y}$, ... et donc en particiulier même s'il n'y a pas en ce point $\mathbf{x}$ de singularité dans la direction $\mathbf{\Theta}$. En présence de données complètes, cette contribution est annulée par les rétroprojections en $\mathbf{x}$ selon les autres directions ; mais s'il manque des directions de rétroprojection, alors cette compensation n'est plus accomplie, d'où des artefacts.

A la différence de la rétroprojection filtrée, la formule que nous utilisons ici présente l'avantage de pouvoir également être tronquée en échelle ; par conséquent, le filtrage (par des filtres $\mathcal{R}_0 h_a$, limités aux échelles a fines) que l'on applique aux projections devient local, et les coefficients qui apparaissent dans le filtrage de $\mathcal{R}_\theta f$ du fait de la singularité en $\mathbf{x}$ sont concentrés autour du point d'abscisse $\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}$, la concentration étant d'autant plus forte que les échelles utilisées sont fines. Lors de la rétroprojection dans la direction $\mathbf{\Theta}$, l'influence de la singularité en $\mathbf{x}$ est donc réduite à une bande de largeur d'autant plus étroite que les échelles utilisées sont fines. On pourra visualiser ce phénomène en figure (4.17) : les artefacts dans la direction horizontale présents avec la rétroprojection filtrée (bandes homogènes verticales, sur l'image à droite en première ligne) sont quasiment éliminés avec notre méthode (résultats présentés pour trois types d'ondelettes, en deuxième ligne).

Le caractère local du filtrage par ondelettes permet donc de réduire les artefacts ; on peut tirer parti de l'utilisation des ondelettes en jouant sur un autre aspect : les moments nuls. Comme on peut le voir sur la deuxième ligne de la figure(4.17), les résultats obtenus diffèrent selon l'ondelette de reconstruction choisie ; or ces dernières diffèrent par leur nombre de moments, croissant de gauche à droite ; les effets sont cette fois-ci visibles dans la direction verticale : il apparaît que plus il y a de moments nuls, meilleure est la localisation des singularités. La conjecture que nous faisons est la suivante : plus l'ondelette de reconstruction présente de moments nuls, plus précise est la détection des singularités 1D dans le filtrage des projections (celles-ci sont localisées de manière plus précise), plus étroite est la bande des directions voisines de la direction de la singularité affectées par cette singularité, plus efficace est la compensation lors de la rétroprojection aux points qui ne présentent pas de singularité. Pour illustrer ceci, on a inséré en figure (4.16) les sinogrammes filtrés dans le cas de l'ondelette chapeau mexicain et de l'ondelette de Morlet. Dans le deuxième cas, les effets des singularités verticales sont beaucoup moins étendus.

Remarque : on aurait *a priori* pu penser que le comportement différent de l'ondelette de Morlet pouvait s'expliquer par le fait que celle-ci est une ondelette directionnelle. En fait, il n'en est rien, car lorsqu'on

applique aux projections le filtre 1D associé, le caractère directionnel de l'ondelette 2D n'apparaît pas. En revanche, les moments nuls, eux, sont transmis de l'ondelette 2D au filtre 1D.

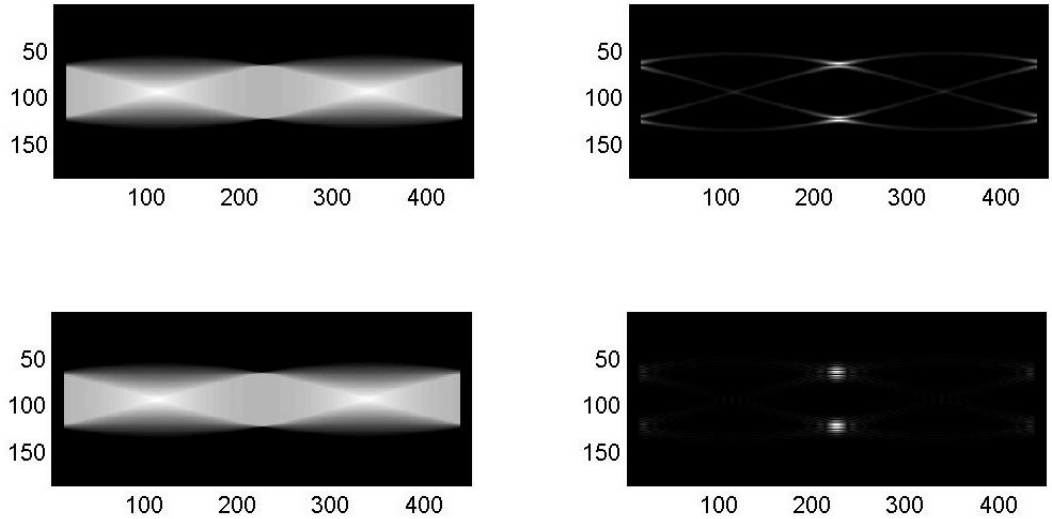


FIG. 4.16 – Sinogrammes avant et après filtrage par le filtre $\mathcal{R}_0 h_a$ pour une échelle a très fine, dans le cas des reconstructions à angle limité présentées en figure (4.17), avec sur la première ligne l'ondelette chapeau mexicain (seule échelle utilisée : $2^{\frac{2}{4}}$) et sur la deuxième l'ondelette de Morlet (échelle : $2^{\frac{9}{4}}$) : les effets des singularités verticales sont plus concentrés dans le deuxième cas (où le nombre de moments nuls est plus important) que dans le premier.

Nous avons appliqué notre méthode de reconstruction tronquée en angles et en échelles à un fantôme inspiré du fantôme utilisé par Natterer dans [78] pour le problème à angle limité. Les résultats sont présentés en figure (4.18) pour une gamme d'angles fixée (on a seulement conservé les projections associées à $\theta \in [15, 165]$), puis pour plusieurs gammes d'angles, de manière à visualiser le comportement de notre méthode en fonction de la quantité de données disponibles (figure 4.18).

Nous présentons enfin un dernier test dans ce paragraphe, en adoptant un point de vue différent du précédent : on peut aussi imaginer que l'on fixe une direction, et que l'on souhaite reconstruire dans une image seulement les singularités dirigées selon cette direction. Dans ce cas, notre méthode peut être utilisée, en tronquant la reconstruction aux échelles très fines, et en ne conservant dans la reconstruction que les angles au voisinage de la direction visée : c'est ce qui a été fait en figure (4.20) : on a construit un fantôme avec des rectangles dont les côtés avaient des directions fixées (verticale et horizontale pour le carré en haut à gauche, à 60° et 150° pour le carré à droite, et à 45° et 135° pour le rectangle en bas à gauche).

Dans le premier cas (première ligne), nous avons effectué une reconstruction où seules les directions entre 85° et 95° ont été conservées ; dans ce cas, c'est la reconstruction des bords horizontaux qui est visée. Pour évaluer la qualité de la reconstruction, nous avons appliqué un détecteur de contours simple [1] à l'image initiale (en clair), puis à l'image reconstruite (en foncé). Conformément aux constatations faites préalablement, on constate que dans la direction de la singularité, le bord est d'autant mieux localisé que l'ondelette présente un grand nombre de moments nuls (quatrième colonne par rapport à la troisième) ;

[1] Nous avons utilisé comme détecteur de contours la fonction `edge` du logiciel `Matlab`, pour le filtre de Sobel.

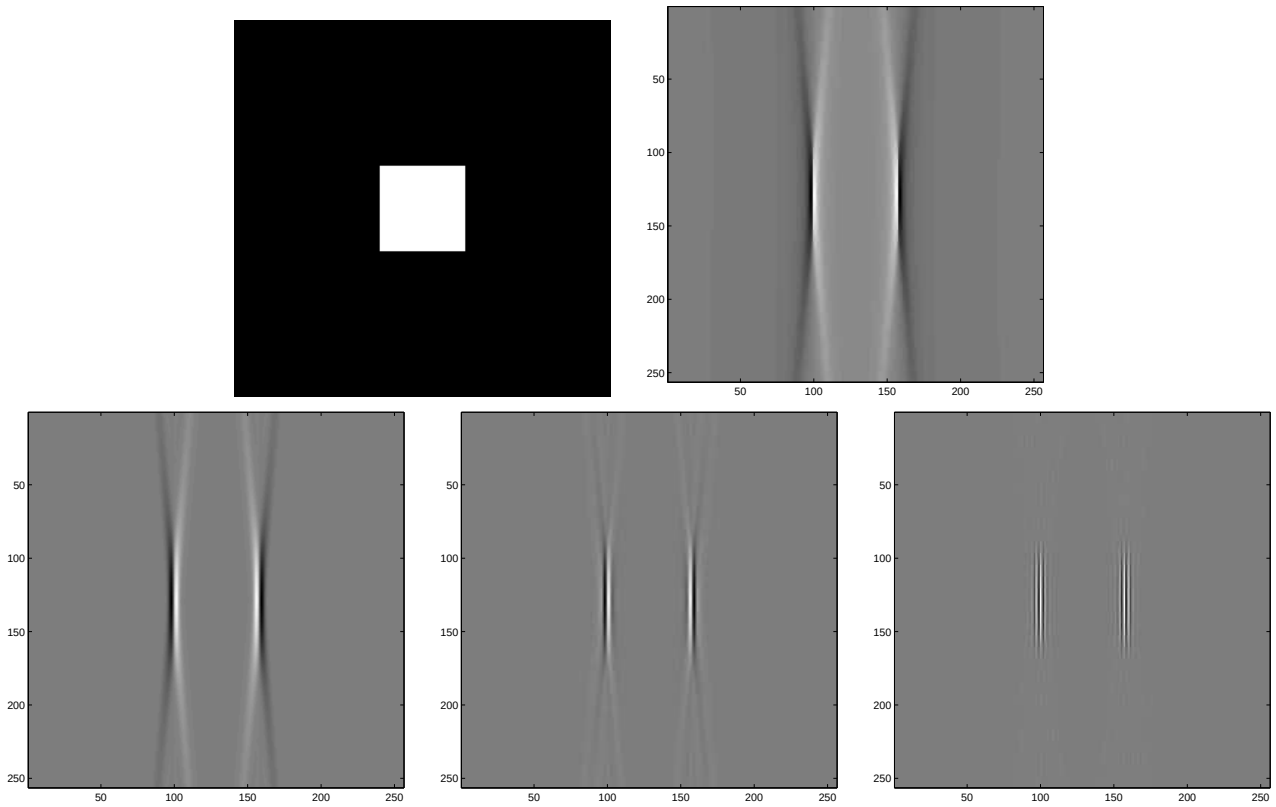


FIG. 4.17 – Comparaison entre trois ondelettes. Reconstruction effectuée avec une seule échelle, très fine. On mesure seulement sur 0°-5° et 175°-180° ; rétroprojection filtrée, puis, de gauche à droite, reconstruction avec l'ondelette chapeau mexicain (échelle : $2^{\frac{2}{4}}$), l'ondelette à quatre moments nuls (échelle : $2^{\frac{2}{4}}$), puis l'ondelette de Morlet modifiée (échelle : $2^{\frac{9}{4}}$).

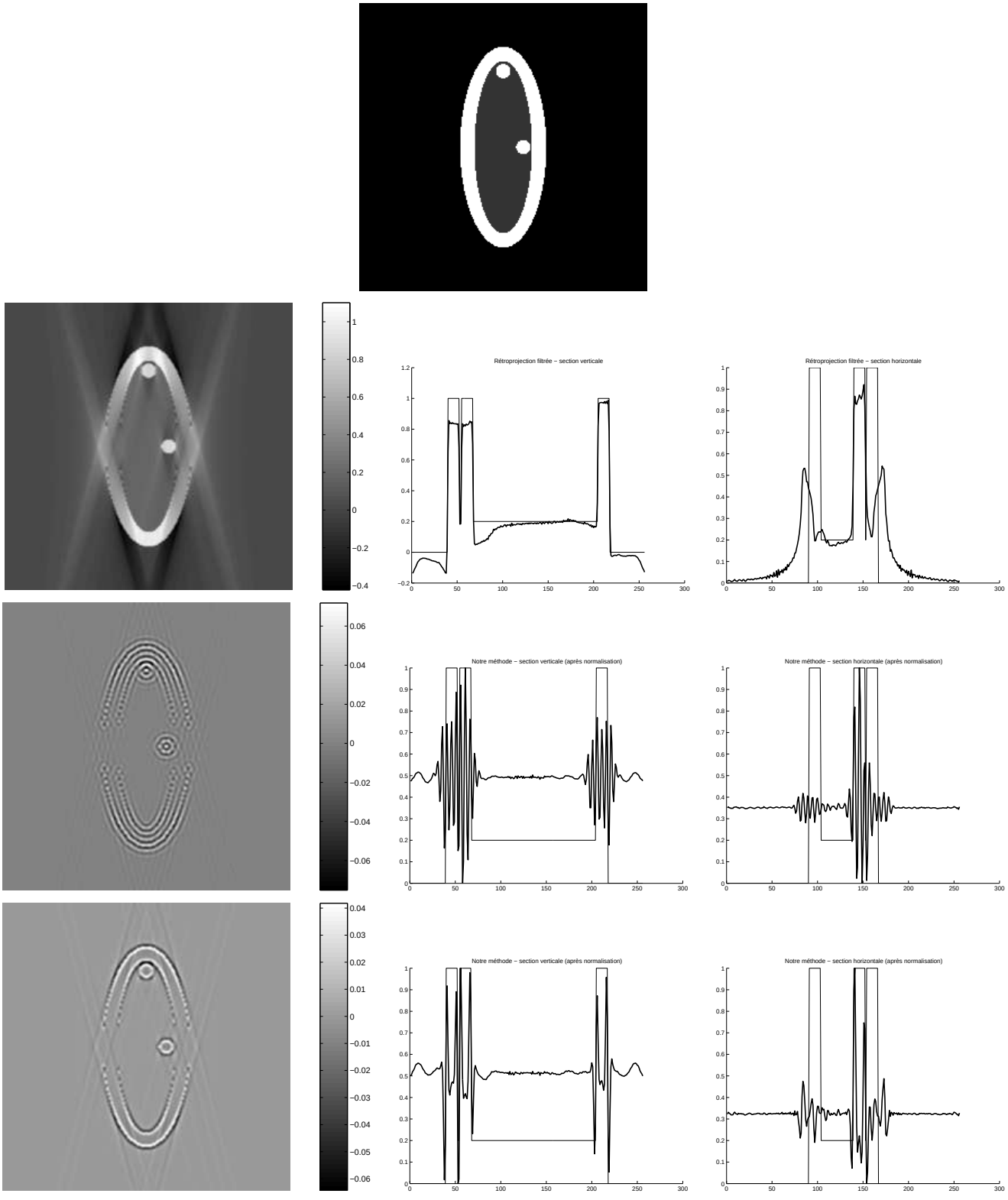


FIG. 4.18 – Visualisation de la réduction des artefacts procurée par l'utilisation de notre méthode. Reconstruction dans le cas du problème à angle limité [image 256×256 ; seules les mesures effectuées pour $\theta \in [15, 165]$ sont conservées]. Première ligne : le fantôme, similaire au fantôme utilisé par Natterer dans [78] (V.2), puis des reconstructions, avec les traces des sections verticale puis horizontale : deuxième ligne : par rétroprojection filtrée ; troisième ligne : ondelette de Morlet modifiée (échelle : $2^{\frac{9}{4}}$) ; quatrième ligne : avec une ondelette à quatre moments nuls (échelle : $2^{\frac{2}{4}}$).

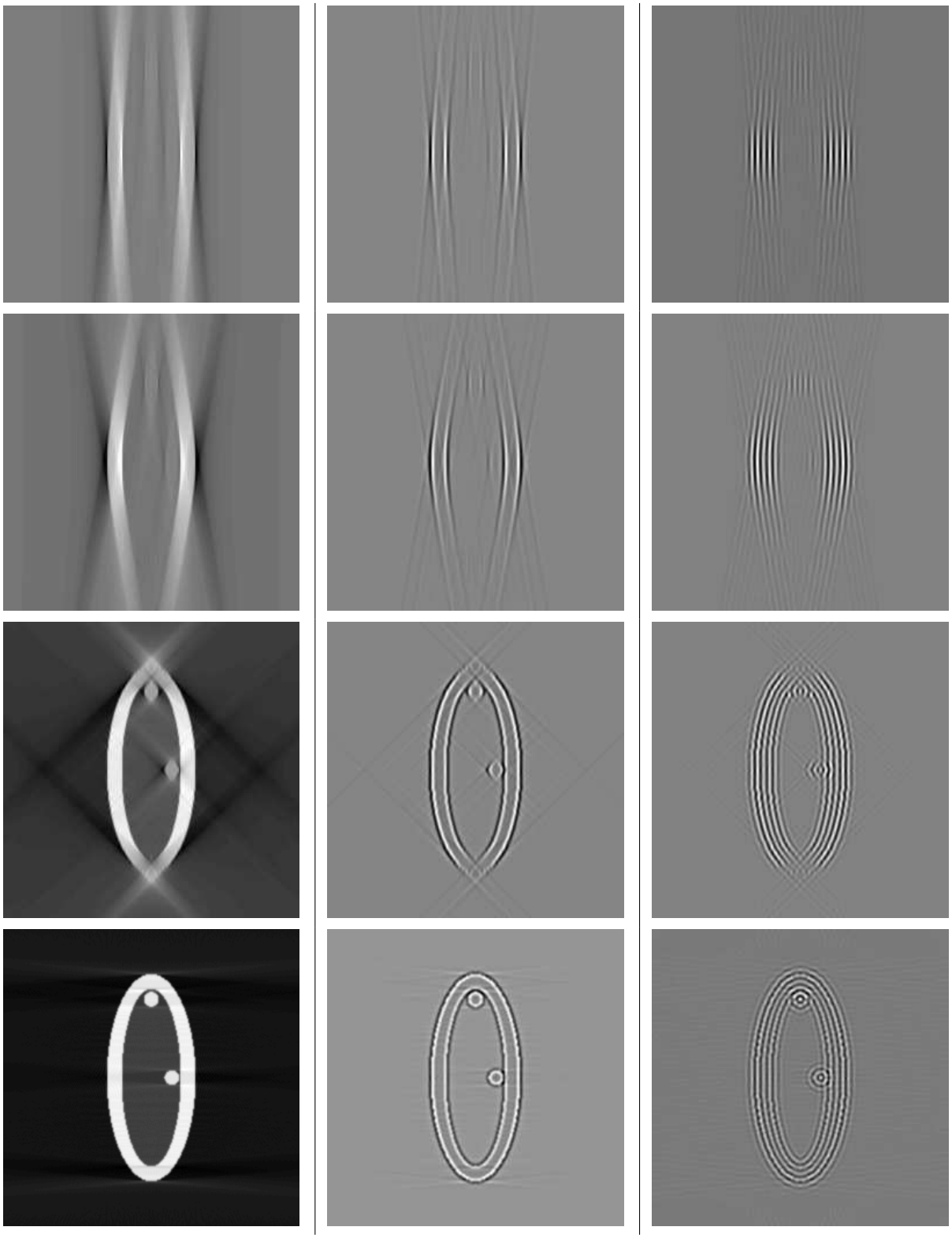


FIG. 4.19 – Comparaison de notre méthode avec la rétroprojection filtrée dans le cas du problème à angle limité ; de gauche à droite, la méthode de rétroprojection filtrée, notre méthode avec une ondelette à quatre moments nuls (échelle : $2^{\frac{2}{4}}$), et notre méthode avec l'ondelette de Morlet modifiée (échelle : $2^{\frac{9}{4}}$). De haut en bas, sont mises à zéro les projections correspondant aux angles [5° 175°], [10°,170°], [45°,135°], et [85° 95°].

cependant, dans la direction orthogonale, l'effet est inverse : plus l'ondelette a de moments nuls, plus elle oscille, et moindre est la précision de la localisation. Néanmoins, les résultats de localisation sont indéniablement meilleurs qu'avec la rétroprojection filtrée (présentés en deuxième colonne).
Dans le deuxième cas (deuxième ligne du tableau), nous avons seulement conservé les projections effectuées entre 55° et 65°. Les conclusions sont similaires.

Dans le troisième cas, nous avons supprimé le carré de droite : il n'y a donc plus de bords à 60° dans l'image. L'objectif est alors que la méthode de reconstruction ne détecte pas de bord. Avec notre méthode, des singularités sont certes détectées, mais restent concentrées aux sommets des carrés, alors qu'avec la rétroprojection filtrée, on retrouve l'influence des sommets, mais diffusée sur toute l'image.

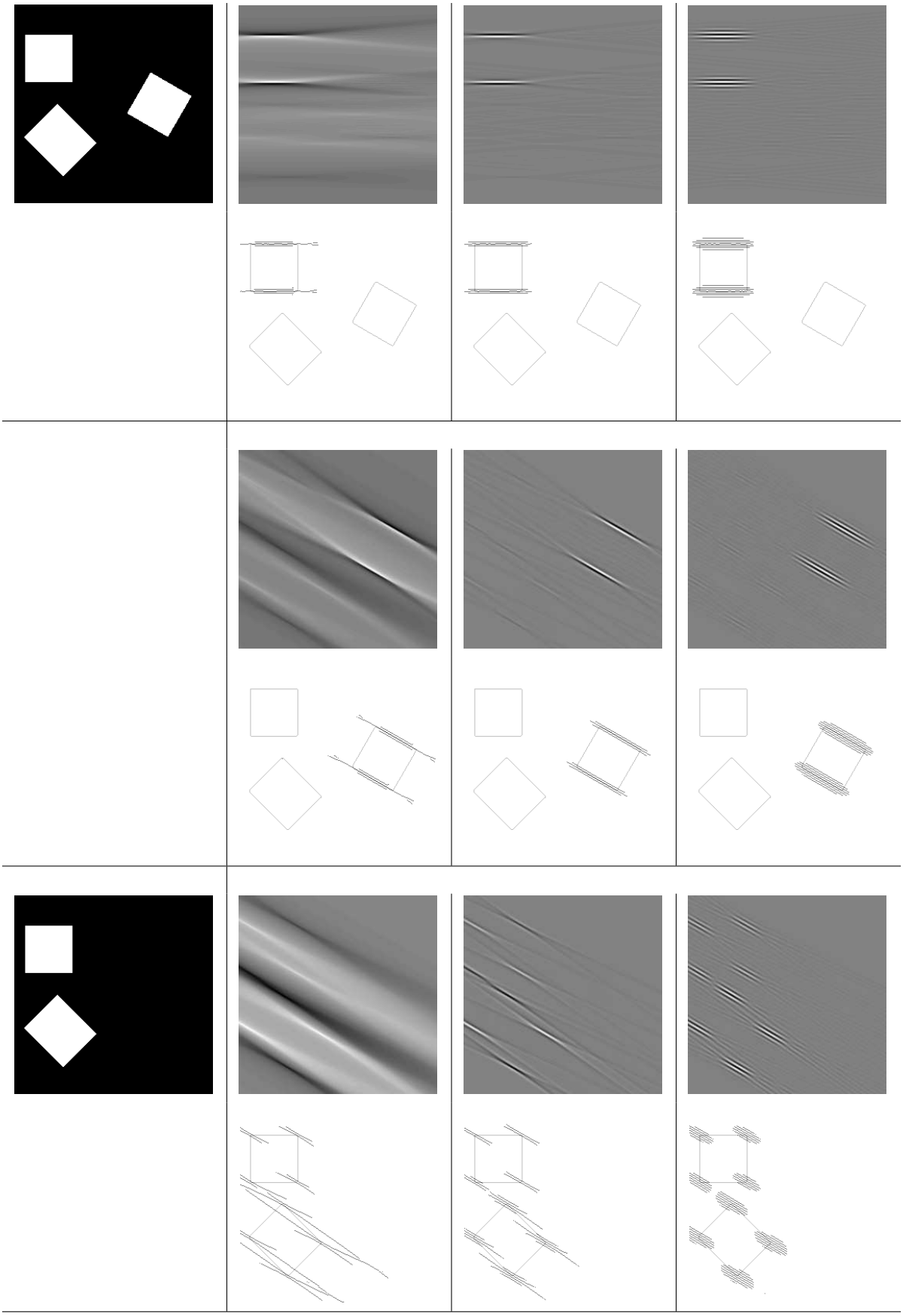


FIG. 4.20 – Reconstructions avec sélection de direction : de haut en bas, autour de 90° ([85°-95°]), autour de 60° ([55°-65°]), autour de 60° après avoir enlevé un carré.) ; de gauche à droite, on peut comparer la méthode de rétroprojection filtrée, notre méthode avec une ondelette à quatre moments nuls (échelle : $2^{\frac{2}{4}}$), et notre méthode avec l'ondelette de Morlet modifiée (échelle : $2^{\frac{9}{4}}$).

4.3.3 D'autres problèmes locaux

4.3.3.1 Problème intérieur à angle limité

Nous avons vu dans les deux paragraphes précédents deux adaptations de la formule d'inversion de la transformée de Radon (4.10) : la prise en compte de données tronquées selon la variable s, ou selon la variable θ. Nous proposons ici un test où le sinogramme est simultanément tronqué en ces deux variables ; l'objectif est alors de reconstruire dans une région intérieure les discontinuités placées selon les directions préservées. Les résultats sont présentés en figure (4.21), pour l'ondelette à quatre moments nuls, et pour l'ondelette de Morlet modifiée.

4.3.3.2 Reconstruction en présence du bruit

L'objectif de notre travail était de proposer une méthode permettant le traitement de données locales, non corrompues par du bruit. Le traitement de données tomographiques bruitées fait l'objet de la transformée en ondelettes vaguelettes, et des transformées en curvelets et bandelettes évoquées dans le chapitre précédent : nous n'avons donc pas l'ambition de nous positionner face à ces méthodes en présence de données bruitées. Néanmoins, nous avons voulu vérifier qu'en présence de bruits, notre méthode n'adoptait pas un comportement aberrant. Nous n'avons pas fait d'étude théorique sur ce point, mais nous l'illustrons par quelques exemples.

Nous avons d'abord testé le comportement de notre algorithme en présence de données complètes et bruitées, corrompues par un bruit blanc gaussien dont l'écart-type est égal à 1% du maximum de la transformée de Radon, dans le cas du fantôme de Shepp et Logan. Les résultats sont présentés à gauche sur la deuxième ligne de la figure (4.22), où on a utilisé l'ondelette chapeau mexicain, en supprimant les échelles les plus fines utilisées pour une reconstruction à partir de données complètes non bruitées. La qualité de la reconstruction est comparable à celle obtenue avec la méthode de rétroprojection filtrée (à droite), tout en étant moins granuleuse.

Nous avons ensuite considéré des données bruitées et tronquées, dans le cas du problème intérieur (mêmes paramètres de bruit que pour les données complètes, avec $RE = 40$) ; le principal problème qui se pose alors est celui du prolongement des projections : ici, nous avons choisi de maintenir les projections non mesurées à zéro (pour ne pas prolonger des données bruitées). Les résultats obtenus sont sur la troisième ligne de la figure (4.22), avec un zoom de la région d'intérêt en quatrième ligne. Il reste possible de localiser les bords des structures dans la région d'intérêt, même si la qualité est dégradée par rapport au cas où les données ne sont pas bruitées (cf. figure 4.13).

Enfin, nous avons effectué des tests dans le cas du problème à angle limité. Les résultats sont présentés en figure (4.23). Le bruit est le même que dans les tests précédents ; sur la deuxième ligne, les données sont complètes ; sur la troisième, on a conservé les incidences comprises entre 45° et 135° ; enfin, sur la dernière ligne, on a seulement conservé les incidences comprises entre 55° et 65°. L'ondelette utilisée est l'ondelette à quatre moments nuls présentée plus haut, et on a conservé une seule échelle dans la reconstruction (la même que celle que l'on avait utilisée pour les tests avec données non bruitées). On constate ici que les bords sont clairement identifiables (et en tout cas beaucoup mieux qu'avec la rétroprojection filtrée).

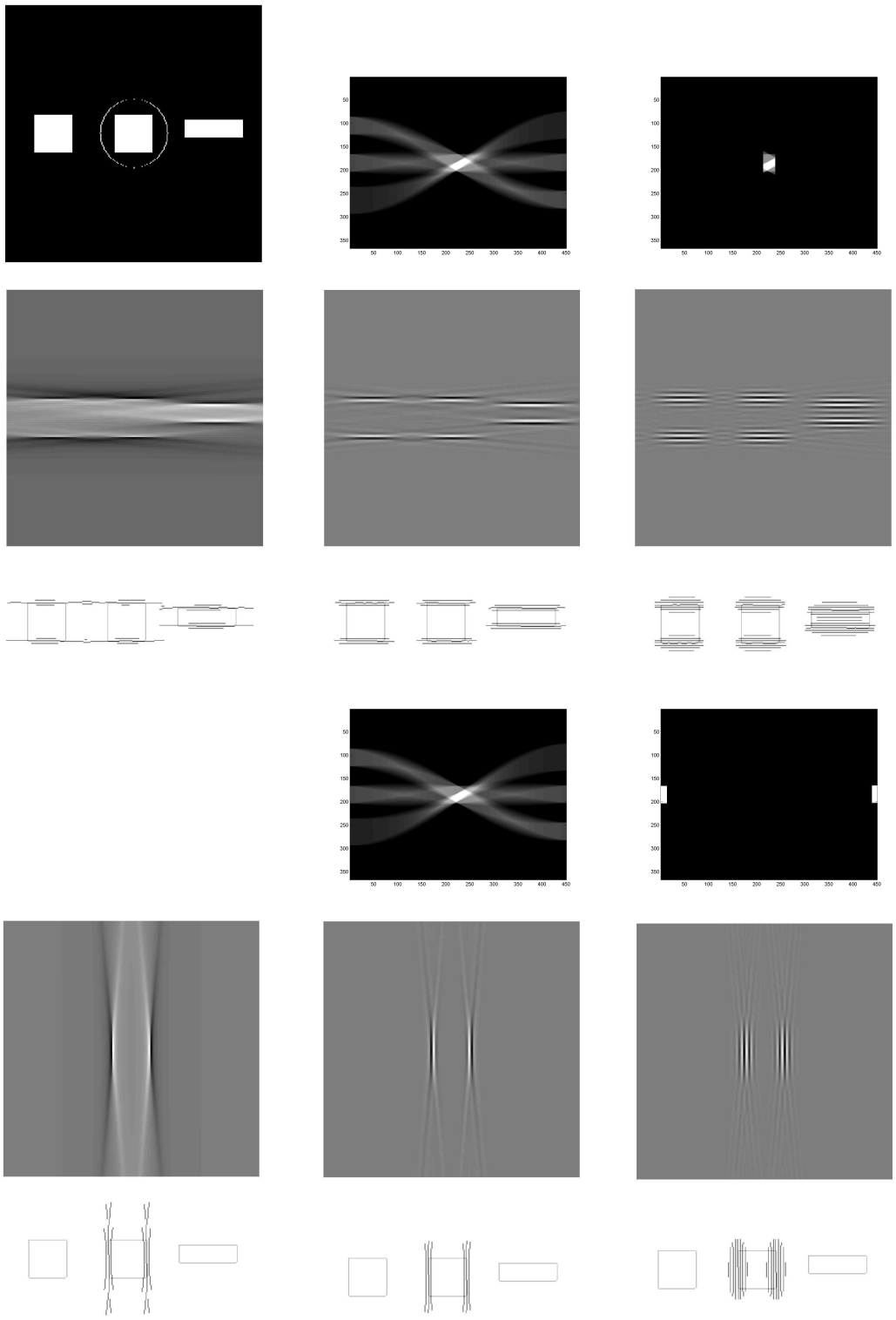


FIG. 4.21 – Reconstructions obtenues dans le cas de données tronquées en s et en θ : dans les deux cas $RE = 34$; dans le premier (deuxième et troisième lignes) seuls les angles compris entre 85° et 95° sont conservés ; dans le deuxième cas (quatrième et cinquième lignes), seuls les angles compris entre 0° et 5°, et 175°et 180° sont conservés ; de gauche à droite, on peut comparer la méthode de rétroprojection filtrée, notre méthode avec une ondelette à quatre moments nuls (échelle : $2^{\frac{2}{4}}$), et notre méthode avec l'ondelette de Morlet modifiée (échelle : $2^{\frac{9}{4}}$).

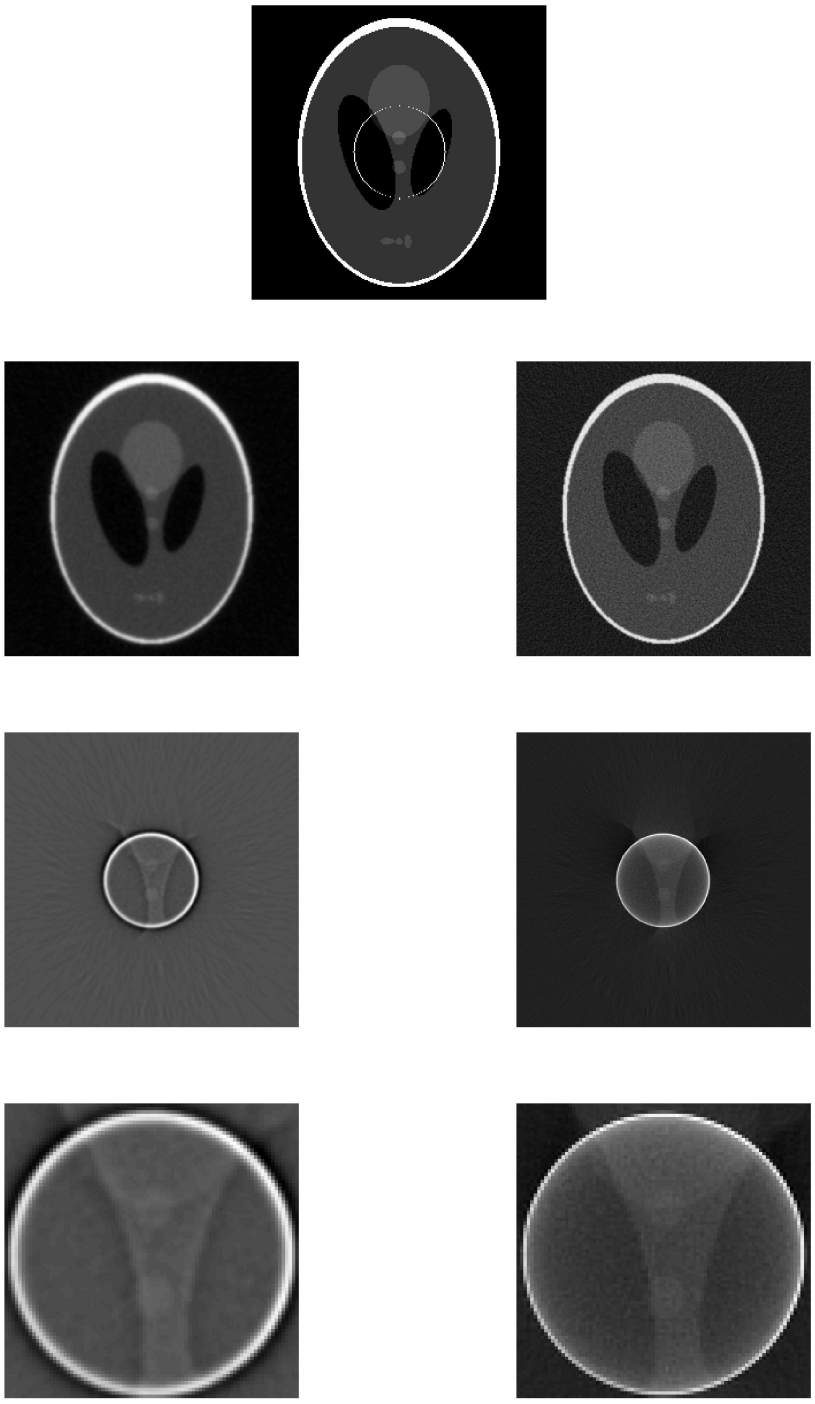


FIG. 4.22 – Problème intérieur et données bruitées : reconstruction du fantôme de Shepp et Logan, par notre méthode (à gauche) et par rétroprojection filtrée (à droite), en présence de données bruitées. Sur la deuxième ligne, les reconstructions sont obtenues à partir de données complètes ; sur la troisième ligne, les reconstructions sont obtenues à partir des données acquises au travers de la région indiquée sur le fantôme (première ligne) ; en 4ème ligne, on propose un zoom sur la région d'intérêt dans les reconstructions obtenues. L'ondelette utilisée est le chapeau mexicain (entre les échelles $2^{\frac{0}{4}}$ et $2^{\frac{32}{4}}$ sur la première ligne, entre $2^{\frac{0}{4}}$ et $2^{\frac{4}{4}}$ ensuite).

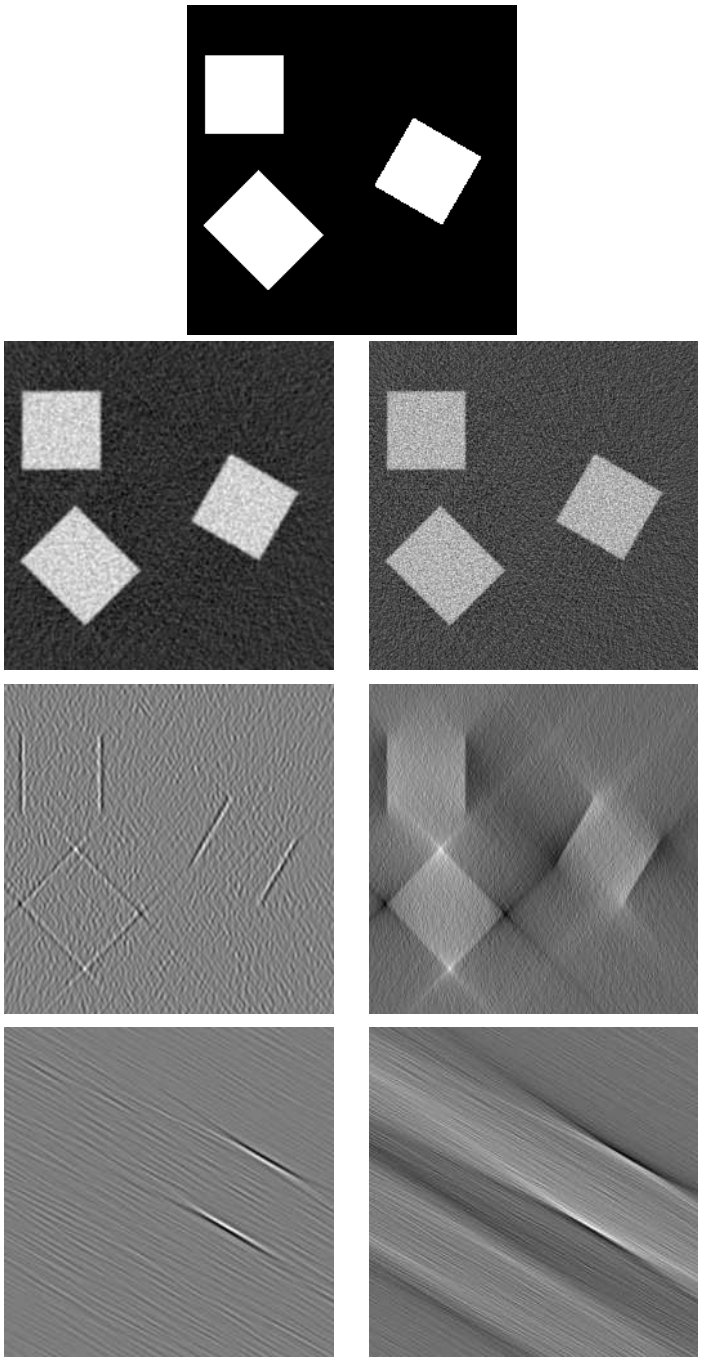


FIG. 4.23 – Problème à angle limité et données bruitées : reconstructions par notre méthode (à gauche) et par rétroprojection filtrée (à droite), en présence de données bruitées. Sur la deuxième ligne, les reconstructions sont obtenues à partir de données complètes ; sur la troisième ligne, les reconstructions sont obtenues à partir des données réduites aux incidences [45°-135°] ; en 4ème ligne, les données sont réduites aux incidences [55°-65°]. L'ondelette utilisée est le chapeau mexicain, à l'échelle $2^{\frac{2}{4}}$.

4.3.4 Liens entre notre méthode et les méthodes existantes

Pour conclure ce chapitre, nous souhaitons expliciter des liens entre notre méthode et les méthodes existantes.

Le lien le plus naturel peut se faire avec les méthodes de type rétroprojection filtrée pour lesquelles on fixe une ondelette admissible Ψ 2D : on reconstruit les coefficients en ondelettes 2D associés à partir de coefficients en ondelettes 1D calculés dans le domaine de Radon par rapport aux ondelettes 1D de la forme $\Lambda\mathcal{R}_\theta\Psi$. Dans notre méthode, nous nous plaçons dans le cadre d'une transformée en ondelettes 2D directionnelle, dans laquelle les ondelettes choisies pour l'analyse et la synthèse sont différentes. Nous fixons une ondelette 2D, *singulière*, et nous reconstruisons les coefficients d'ondelette à partir du domaine de Radon, mais sans calcul supplémentaire : les coefficients sont directement les valeurs de la transformée de Radon.

On peut également faire un lien avec la transformée en ridgelets continue. En effet, nous avons vu que si l'on fixe une ondelette ψ 1D, alors la formule de reconstruction peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi C_\psi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} < \psi_{a,b}, \mathcal{R}_\theta f > \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-b}{a}\right)\frac{da}{a^3}dbd\theta \tag{4.15}$$

Or, comme on l'a vu, la formule de reconstruction obtenue par la méthode de M. Holschneider s'écrit

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi C_h}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta})\frac{1}{a}h\left(\frac{\mathrm{r}_{-\theta}(\mathbf{x}-\mathbf{b})}{a}\right)d\mathbf{b}d\theta\frac{da}{a^3}$$

et donc, si l'on choisit une ondelette de reconstruction sous la forme $h(x_1,x_2)=\psi(x_1)\phi(x_2)$, où ψ est une ondelette 1D vérifiant la condition d'admissibilité

$$\int_{\mathbf{R}}\frac{\hat{\psi}(k)}{k^2}dk \neq 0, < +\infty$$

et où ϕ est normalisée de telle sorte que $\int_{\mathbf{R}}\phi = 1$, alors la formule de reconstruction s'écrit

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi C_h}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta})\frac{1}{a}\psi\left(\left(\frac{\mathrm{r}_{-\theta}(\mathbf{x}-\mathbf{b})}{a}\right)\cdot\mathbf{e_1}\right)\phi\left(\left(\frac{\mathrm{r}_{-\theta}(\mathbf{x}-\mathbf{b})}{a}\right)\cdot\mathbf{e_2}\right)d\mathbf{b}d\theta\frac{da}{a^3} \\ &= \frac{1}{2\pi C_h}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\mathcal{R}_\theta f(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta})\frac{1}{a}\psi\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}}{a}\right)\phi\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}^\perp-\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Theta}^\perp}{a}\right)d\mathbf{b}d\theta\frac{da}{a^3} \\ &\overset{\mathbf{b}=s\mathbf{\Theta}+t\mathbf{\Theta}^\perp}{=} \frac{1}{2\pi C_h}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\mathcal{R}_\theta f(s)\frac{1}{a}\psi\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-s}{a}\right)\phi\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}^\perp-t}{a}\right)dtdsd\theta\frac{da}{a^3} \end{aligned}$$

avec

$$\int_{\mathbf{R}}\phi\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}^\perp-t}{a}\right)dt \overset{u=\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}^\perp-t}{a}}{=} a\int_{\mathbf{R}}\phi(u)du = a$$

ce qui permet de réécrire l'expression précédente sous la forme

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi C_h}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\mathcal{R}_\theta f(s)\psi\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Theta}-s}{a}\right)dsd\theta\frac{da}{a^3}$$

En comparant avec la formule (4.15), nous pouvons constater que, sous des conditions supplémentaires sur l'ondelette de reconstruction, nous obtenons une formule de type décomposition en ridgelets, dans laquelle on utiliserait une ridgelet singulière pour l'analyse (un pic de Dirac), et une ridgelet régulière pour la synthèse - c'est-à-dire exactement comme pour l'interprétation que nous avons donnée ci-dessus, mais où ici les ridgelets remplacent les ondelettes.

Chapitre 5

Méthode géométrique

Le travail que nous présenterons à la fin de ce chapitre s'inscrit dans la lignée de la thèse de Markus Fleute [41], où une méthode d'identification de la surface d'une vertèbre à partir d'images fluoroscopiques était proposée ; l'idée était de se dispenser du recours à des images préopératoires, et de compenser le manque d'information 3D (que l'on aurait pu apporter avec un scanner préoperatoire) par un modèle statistique de surface de vertèbre.

Nous allons tout d'abord rappeler les grandes lignes de la méthode de reconstruction (on pourra se reporter à [41] pour plus de détails), puis nous préciserons notre contribution dans ce travail, relative à l'intégration d'une étape semi-automatique de détections de contours de vertèbres dans les images fluoroscopiques.

5.1 Reconstruction de surfaces par recalage élastique

Comme on vient de le dire, l'idée de la méthode de reconstruction mise en oeuvre ici est la suivante : au bloc opératoire, au début de l'intervention, on effectue quelques images fluoroscopiques de la vertèbre que l'on veut instrumenter, sous différents angles (en pratique deux dans la mise en application actuelle) : une antéro-postérieure, c'est-à-dire de face, et une latérale, c'est-à-dire de profil. La méthode consiste alors à reconstruire une image 3D de la surface de la vertèbre en déformant un modèle générique de surface de vertèbre, de manière à le faire coïncider, en projection, avec les deux images fluoroscopiques.

5.1.1 Le modèle statistique de surface de vertèbre

Le modèle que nous utilisons ici est celui qui a été construit par M. Fleute pendant sa thèse ; il a été élaboré à partir d'une base de données d'examens scanners de vertèbres, traités de la manière suivante :

- Chacun des N examens scanner de la base est segmenté pour en extraire la surface de la vertèbre concernée, selon un algorithme développé dans [41].

- On plaque un maillage triangulaire sur chacune des surfaces (tous les maillages issus de cette phase comportent le même nombre de sommets et le même nombre de facettes).

- On calcule une surface moyenne ; pour cela, on calcule, pour chaque sommet du maillage, ses coordonnées moyennes au sein de la population de maillages : chaque surface S_i est représentée par M points ($S_i = (x_{i,1}, y_{i,1}, z_{i,1}, ..., x_{i,M}, y_{i,M}, z_{i,M})$). Ces surfaces sont alignées, permettant

ainsi de construire une *surface moyenne* de vertèbre :

$$\bar{S} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i$$

Cette surface moyenne constitue la première information consignée dans le modèle statistique utilisé ensuite.

– On complète l'information statistique du premier ordre qu'est la surface moyenne par une information statistique du deuxième ordre, en effectuant une *analyse en composantes principales* sur la famille de maillages ; pour cela, on calcule la matrice de covariance des échantillons par rapport à cette moyenne :

$$C = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (S_i - \bar{S})(S_i - \bar{S})^T$$

Ainsi construite, cette matrice est symétrique, réelle et positive ($\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^T C \mathbf{x} \geq 0$), donc diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbf{R}^{3M}$ formée de vecteurs propres de C, $(\mathbf{e_i})_{i=1..3M}$; les $3M$ valeurs propres associées réelles, positives ou nulles, peuvent être rangées par ordre décroissant $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_{3M} \geq 0$.
Les vecteurs propres sont les directions principales de déformation observées dans les échantillons, appelés aussi *modes principaux de déformations* : concrètement, ils définissent les axes de déformation autorisés à partir de la surface moyenne d'une vertèbre.

On fait alors l'hypothèse que l'on dispose ainsi d'un modèle permettant de décrire l'éventail des vertèbres naturelles, une surface de vertèbre s'écrivant sous la forme

$$S = \bar{S} + \sum_{i=1}^{3M} \omega_i \mathbf{e_i} \tag{5.1}$$

Chaque surface de vertèbre autorisée dans le modèle est ainsi paramétrée par la famille de coefficients $(\omega_i)_{i=1\cdots 3M} \in \mathbf{R}^{3M}$. L'amplitude des poids ω_i possibles est en pratique bornée en fonction de l'amplitude des valeurs propres λ_i (par exemple, dans l'algorithme que nous avons utilisé, la majoration $\omega_i < 2\sqrt{\lambda_i}$ était imposée).

En pratique, seules N (où $N << M$) valeurs propres de C sont non nulles , et par conséquent, seuls N modes de déformation autour de la surface moyenne sont autorisés. Il s'avère en plus que les tous premiers modes de déformation suffisent à décrire un fort pourcentage des variations de formes observées dans la population : on peut donc décrire le modèle avec un nombre faible de paramètres. L'image 5.1 présente le modèle utilisé, pour la forme moyenne et les cinq principaux modes de déformations.

5.1.2 Algorithme de recalage du modèle déformable avec les images fluoroscopiques.

Nous allons décrire ici les grandes lignes de la méthode de reconstruction. Ici aussi, on pourra se reporter aux travaux initiaux de M. Fleute [42, 43] pour plus de détails.

Idée Générale L'idée consiste à trouver parmi les vertèbres possibles dans le domaine du modèle celle qui, si elle avait été projetée dans les mêmes conditions que les conditions per-opératoires, aurait donné les images fluoroscopiques dont on dispose, ou, plus précisément, dont la projection de la surface aurait donné les contours détectés sur les radiographies.

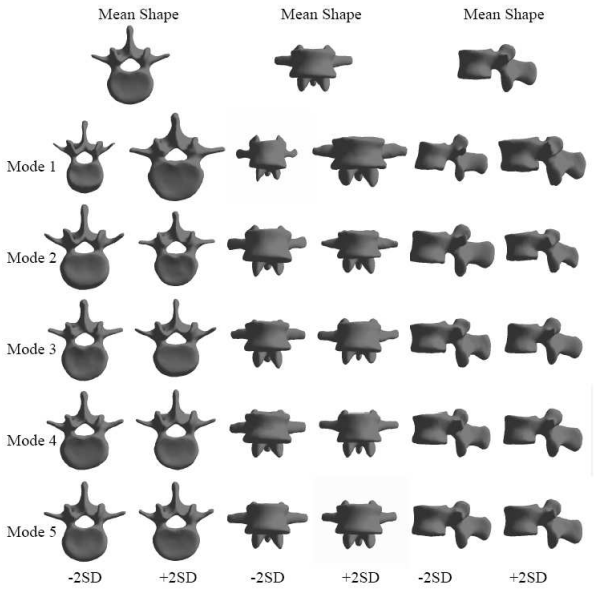


FIG. 5.1 – Le modèle statistique de surface de vertèbre : la forme moyenne (vue supérieure, de face et de profil) et les formes extrêmes autorisées par les cinq principaux modes de déformation.

Une fois les deux radiographies acquises, on les calibre (*ie* on les replace dans un référentiel commun à celui du patient), et on isole les contours (là est l'étape actuellement critique, qui fera l'objet de notre contribution explicitée plus loin). On "dépose" alors virtuellement la surface moyenne du modèle dans la scène, et, par un algorithme d'optimisation, on la déplace et la déforme jusqu'à converger vers une position dans laquelle théoriquement, si on acquiert à nouveau deux images fluoroscopiques, on retrouve les deux projections initiales. En pratique, on cherche la position du modèle (en translation et en rotation), ainsi que les poids de la décomposition (5.1), qui permettent de minimiser la distance de cette surface aux faisceaux de rétroprojection issus des deux images fluoroscopiques.

La figure 5.2 montre en haut, la scène où a lieu le recalage, le modèle déformable par rapport aux faisceaux de rétroprojection, avant et après recalage, et sur les deux lignes suivantes, comment, sur une simulation, au fil de quelques étapes de l'algorithme, la vertèbre déformable -en vert - vient se fondre dans la vertèbre à reconstruire (en jaune, et en pratique inconnue).

L'algorithme d'optimisation Nous explicitons ici l'algorithme d'optimisation mobilisé dans cette méthode. Rappelons que le but de cette phase est de mettre en correspondance le modèle déformable d'une part, le faisceau de rayons de rétroprojection d'autre part.

Pour cela, M. Fleute a eu recours a un algorithme itératif, dont chaque étape est découplée en deux phases : une phase de *recalage rigide* au cours de laquelle on cherche à définir la translation et la rotation optimales à appliquer au modèle, puis une phase de *recalage élastique*, au cours de laquelle, une position du modèle étant fixée, on le déforme sous les contraintes de déformation du modèle statistique définies plus haut.

Avant de détailler chacune des deux phases, nous précisons le critère de minimisation utilisé ; à chaque itération, on minimise la distance entre deux faisceaux de droites, à savoir :

– d'une part le faisceau des rayons, issus des différentes radios ; on note ces droites (qui constituent

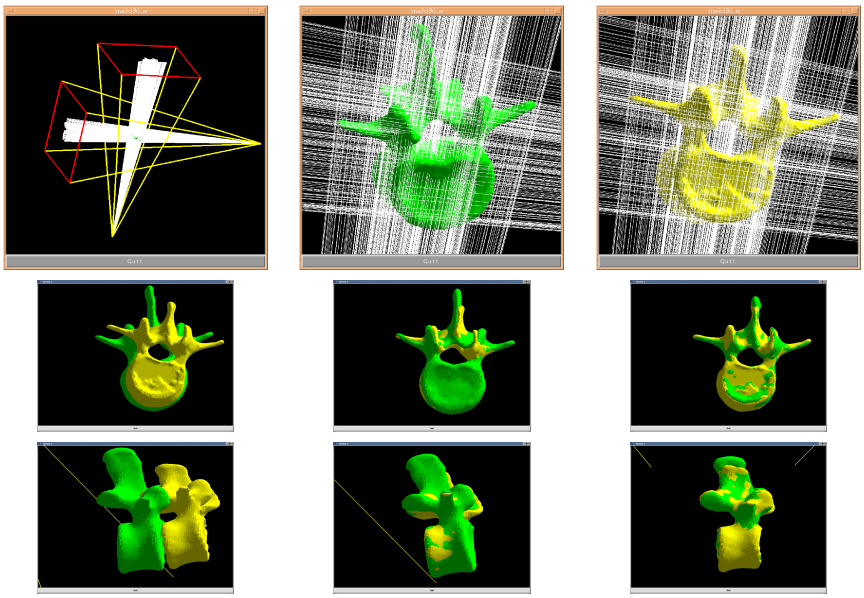


FIG. 5.2 – En haut, à gauche, la scène : les radios calibrées, la source de rayons X et les faisceaux qui en sont issus et qui viennent frapper le modèle ; au milieu, le modèle déformable au coeur des faisceaux, avant recalage, et à droite, après recalage. Sur les deux lignes suivantes, en vues supérieure et latérale, la vertèbre de référence, en jaune, en pratique inconnue, et le modèle déformable, avant recalage, après recalage rigide et après quelques itérations de recalages rigides et élastiques : la surface verte vient petit à petit se fondre dans la jaune.

les *données* du problème de recalage) de la manière suivante :

$$\mathbf{d}_{j,j=1\cdots P}$$

– d'autre part, ce que M. Fleute, en référence à [46], nomme les *contours apparents* du maillage triangulaire dans la postion courante ; ce sont les arêtes du maillage telles que l'une des facettes adjacentes est éclairée par la source de rayons X, et l'autre est « à l'ombre » : on fait l'hypothèse que les points de contours qui apparaissent en projection sur les radiographies sont les images des sommets de ces arêtes. Pour une combinaison de poids $\omega = (\omega_i)_i$ fixée, on note ces droites (attachées au *modèle déformable*) de la manière suivante :

$$(\mathbf{m_j}(\omega))_{j=1\cdots J}$$

Les arêtes apparentes ne sont pas les mêmes d'une position à l'autre et d'une déformation à l'autre (l'incidence de la source de rayons X sur le modèle étant modifiée à chaque étape) : il faut donc les recalculer au fil des itérations.

Une fois que, dans la position courante, les arêtes apparentes ont été déterminées, on associe à chaque droite de rétroprojection $\mathbf{d}_k$ l'arête apparente la plus *proche* $\widetilde{\mathbf{d_k}}$ parmi les arêtes apparentes du modèle (au sens de la distance euclidienne entre deux droites de l'espace, calculée par une méthode de moindres carrés).

$$\forall k = 1\cdots K,\ \mathbf{d}_k \mapsto \widetilde{\mathbf{d_k}}(\omega) = \arg\min_{j=1\cdots J} \mathrm{d}\left(\mathbf{m_j}(\omega), \mathbf{d_k}\right)$$

Lors de cette phase d'appariement entre une droite de rétroprojection et une arête, sont associés deux points : un point $\mathbf{D_k}(\omega)$ appartenant à $\widetilde{\mathbf{d_k}}(\omega)$, et un point $\mathbf{M_k}(\omega)$ appartenant à $\widetilde{\mathbf{m_k}}(\omega)$ tels que

$$(\mathbf{D_k}(\omega), \mathbf{M_k}(\omega)) = \arg\min \min_{(\mathbf{D},\mathbf{M})\in\widetilde{\mathbf{d_k}}(\omega)\times\widetilde{\mathbf{m_k}}(\omega)} \|\mathbf{DM}\|$$

(c'est-à-dire que les points $\mathbf{D_k}(\omega)$ et $\mathbf{M_k}(\omega)$ sont les points les plus proches, pour la distance euclidienne classique, entre les segments appariés).

On recherche alors la transformation (rigide ou élastique, selon la phase courante de l'algorithme) à appliquer au modèle, afin de minimiser cette distance. On distingue alors les deux phases.

Phase 1 : recalage rigide On cherche la rotation R_0 et la translation optimale $\mathbf{t_0}$ à appliquer au modèle pour minimiser la distance entre les deux nuages de points (identifiés après la procédure d'appariemment des droites) :

$$\sum_{i=1}^{K} \|\mathbf{D_i} - (\mathrm{R}_0\mathbf{M_i} + \mathbf{t_0})\|^2$$

Pour identifier R_0 et $\mathbf{t_0}$, M. Fleute a utilisé une méthode d'optimisation connue sous le nom de *méthode des quaternions* [53]. Nous l'explicitons ici.

Rappelons ici que l'on appelle *quaternions* l'ensemble des nombres s'écrivant $a+bi+cj+dk$, $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$, où $(1,i,j,k)$ vérifient

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,\ ij = k,\ ik = -j,\ ji = -k,\ jk = i,\ ki = j,\ kj = i$$

L'intérêt de cette représentation pour le codage des transformations rigides est de même nature que le recours aux nombres complexes pour représenter les rotations du plan : de la même manière que dans le plan, une rotation d'angle θ peut se représenter efficacement à l'aide du nombre complexe de module 1 $e^{i\theta}$, comme la transformation qui, à tout nombre complexe $z = x + iy$, représentant le point du plan de coordonnées (x,y), associe son image $z' = e^{i\theta}z$, les quaternions fournissent un moyen efficace de représentation des rotations et translations de l'espace, au sens où il existe un isomorphisme entre l'ensemble des quaternions et $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$: un repère de l'espace étant fixé, le quaternion $a + bi + cj + dk$ peut être associé de manière unique au couple $(a, \mathbf{u})$, où $\mathbf{u}$ désigne le vecteur de $\mathbf{R}^3$ de coordonnées (b,c,d). Pour exploiter ceci pour coder des transformations rigides, on a recours aux opérations définies sur les quaternions. Rappelons ici que l'ensemble des quaternions forme une algèbre pour les opérations suivantes :

$$(a_1, \mathbf{v_1}) + (a_2, \mathbf{v_2}) = (a_1 + a_2, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2})$$

et

$$(a_1, \mathbf{v_1}) \times (a_2, \mathbf{v_2}) = (a_1a_2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}, a_1\mathbf{v_2} + a_2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2})$$

Ce produit de deux quaternions, non commutatif, peut aussi s'écrire sous forme matricielle

$$q_1 \times q_2 = (a_1, v_{11}, v_{12}, v_{13}) \times (a_2, v_{21}, v_{22}, v_{23}) = \begin{pmatrix} a_1 & -v_{11} & -v_{12} & -v_{13} \\ v_{11} & a_1 & -v_{13} & v_{12} \\ v_{12} & v_{13} & a_1 & -v_{11} \\ v_{13} & -v_{12} & v_{11} & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{pmatrix} = \mathrm{M_g}(q_1)q_2$$

$$= \begin{pmatrix} a_2 & -v_{21} & -v_{22} & -v_{23} \\ v_{21} & a_2 & v_{23} & -v_{22} \\ v_{22} & -v_{23} & a_2 & v_{21} \\ v_{23} & v_{22} & -v_{21} & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} = \mathrm{M_d}(q_2)q_1$$

où on a introduit les deux matrices de taille 4×4, notées respectivement $\mathrm{M_g}(q_1)$ (matrice à gauche, associée au quaternion q_1) et $\mathrm{M_d}(q_2)$ (matrice à droite, associée au quaternion q_2).

On définit le produit scalaire de deux quaternions

$$(a_1, \mathbf{v_1}) \cdot (a_2, \mathbf{v_2}) = a_1a_2 + \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}$$

la norme d'un quaternion

$$\|(a,\mathbf{v})\| = \sqrt{(a,\mathbf{v})\cdot(a,\mathbf{v})}\sqrt{a^2+\|\mathbf{v}\|^2}$$

et le conjugué d'un quaternion

$$\overline{(a,\mathbf{v})} = (a,-\mathbf{v})$$

On peut alors introduire le codage des rotations par quaternions : la rotation d'angle θ autour de la droite dirigée par le vecteur unitaire $\mathbf{n}$ est la transformation qui à tout vecteur $\mathbf{v}$ du plan, décomposé selon

$$\mathbf{v} = \underbrace{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}}_{\in \mathrm{Vect}(\mathbf{n})} + \underbrace{(\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})}_{\in\,\mathbf{n}^\perp}$$

associe le vecteur $\mathbf{v}'$ tel que

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n} + \cos\theta\,(\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}) + \sin\theta\;\mathbf{n}\wedge(\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})\\ &= (1-\cos\theta)\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n} + \cos\theta\mathbf{v} + \sin\theta\mathbf{n}\wedge\mathbf{v}\end{aligned}$$

On peut alors vérifier que dans l'ensemble des quaternions, cette relation s'écrit

$$(0,\mathbf{v}') = (\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2}\mathbf{n})\times(0,\mathbf{v})\times(\cos\frac{\theta}{2},-\sin\frac{\theta}{2}\mathbf{n}) = q\times(0,\mathbf{v})\times\overline{q}$$

où on a noté q le quaternion unitaire $(\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2}\mathbf{n})$, qui suffit donc pour représenter la rotation d'angle θ autour de la droite dirigée par le vecteur unitaire $\mathbf{n}$.

On peut alors revenir au problème du recalage rigide : on cherche R_0 et $\mathbf{t}_0$ minimisant le critère

$$\sum_{i=1}^{P}\|\mathbf{D_i}-(\mathrm{R}_0\mathbf{M_i}+\mathbf{t}_0)\,\|^2$$

On introduit les centres de gravité des deux nuages de points :

$$\mathbf{D}^* = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\mathbf{D_i} \text{ et } \mathbf{M}^* = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\mathbf{M_i}$$

La transformation rigide optimale $(\mathrm{R}_0,\mathbf{t}_0)$ devra vérifier une première contrainte : les centres de gravité doivent être confondus après la transformation optimale, autrement dit $(\mathrm{R}_0,\mathbf{t}_0)$ vérifient

$$\mathbf{D}^* = \mathrm{R}_0\mathbf{M}^* + \mathbf{t}_0$$

Introduite dans la somme à minimiser, cette condition permet de réécrire le critère à minimiser selon :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{K}\|\mathbf{D_i}-(\mathrm{R}_0\mathbf{M_i}+\mathbf{t_0})\,\|^2 &= \sum_{i=1}^{K}\|(\mathbf{D_i}-\mathbf{D}^*)-(\mathrm{R}_0(\mathbf{M_i}-\mathbf{M}^*)+\mathbf{t_0})+\underbrace{\mathbf{D}^*-\mathrm{R}_0\mathbf{M}^*}_{\mathbf{t_0}}\|^2\\ &= \sum_{i=1}^{K}\|(\mathbf{D_i}-\mathbf{D}^*)-\mathrm{R}_0(\mathbf{M_i}-\mathbf{M}^*)\|^2\end{aligned}$$

Pour alléger les calculs dans la suite, on pose, pour tout $i=1\cdots K$, $\delta_i=\mathbf{D_i}-\mathbf{D}^*$ et $\mu_i=\mathbf{M_i}-\mathbf{M}^*$; on note θ et $\mathbf{n}$ les paramètres de la rotation cherchée, et q le quaternion associé. Le critère à minimiser

s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{P} \|\delta_{\mathbf{i}} - (\mathrm{R}_0\mu_{\mathbf{i}})\|^2 = \sum_{i=1}^{P} \|(0,\delta_{\mathbf{i}}) - q\times(0,\mu_{\mathbf{i}})\times\overline{q}\|^2 = \sum_{i=1}^{P} \|(0,\delta_{\mathbf{i}}) - q\times(0,\mu_{\mathbf{i}})\times\overline{q}\|^2\|q\|^2 \\
= &\sum_{i=1}^{P} \|(0,\delta_{\mathbf{i}})\times q - q\times(0,\mu_{\mathbf{i}})\times\overline{q}\times q\|^2 = \sum_{i=1}^{P} \|(0,\delta_{\mathbf{i}})\times q - q\times(0,\mu_{\mathbf{i}})\|^2 \\
= &\sum_{i=1}^{P} \|\mathrm{M_g}\left((0,\delta_{\mathbf{i}})\right) q - \mathrm{M_d}\left((0,\mu_{\mathbf{i}})\right) q\|^2
\end{aligned}$$

avec les matrices $\mathrm{M_g}\left((0,\delta_{\mathbf{i}})\right)$ et $\mathrm{M_d}\left((0,\mu_{\mathbf{i}})\right)$ définies plus haut. Le calcul se poursuit ainsi :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{P} {}^t\left(\mathrm{M_g}\left((0,\delta_{\mathbf{i}})\right) q - \mathrm{M_d}\left((0,\mu_{\mathbf{i}})\right) q\right)\ \left(\mathrm{M_g}\left((0,\delta_{\mathbf{i}})\right) q - \mathrm{M_d}\left((0,\mu_{\mathbf{i}})\right) q\right) \\
= &\sum_{i=1}^{P} {}^t q\,{}^t\left(\mathrm{M_g}\left((0,\delta_{\mathbf{i}})\right) - \mathrm{M_d}\left((0,\mu_{\mathbf{i}})\right)\right)\left(\mathrm{M_g}\left((0,\delta_{\mathbf{i}})\right) - \mathrm{M_d}\left((0,\mu_{\mathbf{i}})\right)\right) q \\
= &\ {}^t q\left(\sum_{i=1}^{P} {}^t\left(\mathrm{M_g}\left((0,\delta_{\mathbf{i}})\right) - \mathrm{M_d}\left((0,\mu_{\mathbf{i}})\right)\right)\left(\mathrm{M_g}\left((0,\delta_{\mathbf{i}})\right) - \mathrm{M_d}\left((0,\mu_{\mathbf{i}})\right)\right)\right) q = {}^t qBq
\end{aligned}$$

où on a noté B la matrice symétrique réelle $\left(\sum_{i=1}^{P} {}^t\left(\mathrm{M_g}\left((0,\delta_{\mathbf{i}})\right) - \mathrm{M_d}\left((0,\mu_{\mathbf{i}})\right)\right)\left(\mathrm{M_g}\left((0,\delta_{\mathbf{i}})\right) - \mathrm{M_d}\left((0,\mu_{\mathbf{i}})\right)\right)\right)$.

Le problème initial est donc ramené à la recherche d'un quaternion unitaire q qui minimise la quantité $f(q) = {}^t qBq$. Ceci est un problème de minimisation sous la contrainte de type égalité $g(q) = 0$ avec $g(q) = 1 - \|q\|^2 = 1 - {}^t qq$. En appliquant la technique des multiplicateurs de Lagrange [23], on sait que si q_0 est solution du problème, alors nécessairement il existe $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ tel que (q_0, λ_0) sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1 - {}^t q_0 q_0 & = & 0 \\ \nabla f(q_0) + \lambda_0 \nabla g(q_0) & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui ici après calcul des différentielles de f et g, s'écrit

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1 - {}^t q_0 q_0 & = & 0 \\ 2Bq_0 - 2\lambda_0 q_0 & = & 0 \end{array}\right. \text{ soit } \left\{\begin{array}{lcl} {}^t q_0 q_0 & = & 1 \\ Bq_0 & = & \lambda_0 q_0 \end{array}\right.$$

On en déduit que

- λ_0 est une valeur propre de la matrice B, donc réelle (car B est symétrique réelle), et positive (car B est de la forme ${}^t MM$)
- q_0 est un vecteur propre de norme 1 associé à λ_0

De plus on a alors $f(q_0) = {}^t q_0 Bq_0 = \lambda_0 {}^t q_0 q_0 = \lambda_0$: λ_0 est donc la plus petite des valeurs propres de la matrice B, et q_0 un vecteur propre de norme 1 qui lui est associé. Ceci permet d'expliciter la rotation optimale R_0, de laquelle on déduit la translation optimale à appliquer au modèle : $\mathbf{t_0} = \mathrm{R}_0\mathbf{m}^* - \mathbf{d}^*$.

Phase 2 : recalage élastique Pour un vecteur de déformation $\omega = (\omega_i)_{i=1\cdots L}$ donné, le modèle que l'on déforme s'écrit

$$S(\omega) = \overline{S} + \mathbf{E}\omega$$

où E désigne la matrice $(\mathbf{e_1}|\mathbf{e_2}|\cdots|\mathbf{e_L})$ des directions principales de déformation, de taille $3N \times L$, où N désigne le nombre de sommets du maillage, et L désigne le nombre de modes de déformation.

La phase élastique de l'algorithme de déformation consiste à identifier le vecteur de poids optimal ω pour minimiser la distance au faisceau de rétroprojection. L'algorithme de Levenberg-Marquardt est alors utilisé ; nous ne le présenterons pas en détail ici, mais nous mentionnerons simplement que c'est un couplage entre deux algorithmes de minimisation : l'algorithme de Newton-Gauss, et l'algorithme de descente de gradient ; le but de son utilisation ici est d'éviter au maximum l'arrêt de l'algorithme de minimisation dans un minimum local. On en trouvera une description dans [86].

Algorithme global de reconstruction : cet algorithme est une itération de phases dans lesquelles sont réalisées une étape de recalage rigide et une étape de recalage élastique ; en pratique, à partir d'une position initiale du modèle à déformer, une première étape de recalage rigide est effectuée, suivie d'une étape de recalage élastique, dans laquelle on cherche à identifier seulement le premier poids ω_1 correspondant à la direction principale de déformation (celle qui est associée à la plus grande valeur propre dans l'analyse en composantes principales). Une fois une estimation du poids optimal réalisée, on itère les deux étapes de recalage, en ajoutant à chaque itération un nouveau poids dans la décomposition.

5.1.3 Mise en évidence de l'importance de l'initialisation du modèle

Nous abordons ici un des premiers problèmes non résolus dans la mise en oeuvre qu'en avait proposée M. Fleute : l'étape d'initialisation de l'algorithme de recalage. Cette étape consiste à déterminer une position à donner au modèle déformable au début de l'algorithme de reconstruction pour que la reconstruction qui suit ne démarre pas sur des bases aberrantes, et pour limiter les risques d'arrêt de l'algorithme de déformation dans un minimum local.
Dans les validations antérieures ([41]), cette initialisation était effectuée manuellement, l'opérateur pouvant déplacer à la souris le modèle déformable au sein des faisceaux de rétroprojection via une interface du type de celle présentée en figure (5.2). Nous souhaitions travailler sur l'automatisation, au moins partielle, de cette étape.

Il est aisé de définir une position initiale grossière :

1. en rotation : nous supposons que l'orientation globale de la vertèbre du patient est connue (on sait dans quelle position le patient est couché sur la table d'opération). Par conséquent, en rotation, les paramètres à donner au modèle déformable sont à peu près connus (axe de la vertèbre connu, position de la vertèbre par rapport à cet axe connue à $\frac{\pi}{2}$ près).
2. en translation : nous faisons l'hypothèse que le centre de gravité de la vertèbre 3D se projette au centre de gravité de chacune des projections. Nous proposons de calculer pour chaque image fluoroscopique dans laquelle les points de contour ont été isolés le centre de gravité de chacun des nuages de points, et de positionner alors le centre de gravité du modèle à déformer à l'intersection des deux droites de rétroprojection émergeant de des deux points.

Nous obtenons ainsi une position initiale qui aurait pu être une position manuelle (c'est-à-dire que l'on se place dans des conditions jusqu'alors acceptées). Malheureusement, ceci ne permet pas de garantir qu'à coup sûr, la reconstruction va se dérouler convenablement et converger vers la surface recherchée. Il s'avère que l'algorithme de reconstruction est très instable : si l'on considère deux postures initiales définies par des paramètres très proches, l'une peut conduire à une reconstruction convenable, et l'autre non : ceci provient du fait que l'algorithme d'optimisation peut s'arrêter dans un minimum local du critère d'optimisation.
Néanmoins, nous avons constaté expérimentalement que ce type de cas ne se produit pas très souvent, et l'on arrive souvent à obtenir une reconstruction correcte avec une position initiale grossièrement fixée. Il nous semble donc que l'on pourrait résoudre ce problème en mettant en place des méthodes stochastiques, de type recuit simulé : étant donnée une position initiale grossièrement connue, l'idée consisterait

à lancer en parallèle un grand nombre de simulations, et à garder comme surface reconstruite la surface vers laquelle la plupart des expériences aurait tendance à converger. Ceci pourrait constituer un prolongement à notre travail.

5.2 Le problème de la détection des contours dans les images radiographiques

L'algorithme proposé par Markus Fleute a été validé en reconstruisant des surfaces de vertèbres n'ayant pas servi à bâtir le modèle statistique et conduit à des erreurs de recalage d'ordre millimétrique. Néanmoins, pour ces tests, les contours des projections radiographiques avaient été calculés à partir des surfaces de vertèbres parfaitement connues, et l'étape de segmentation n'était donc pas prise en compte (ou supposait que la détection des contours dans les images fluoroscopiques serait effectuée manuellement, ce qui n'est pas envisageable en routine clinique : la détection de contours est une tâche fastidieuse, qu'il paraît difficile de faire exécuter par un chirurgien au début de chaque intervention). L'un de nos objectifs de thèse était de proposer une automatisation, au moins partielle, de cette étape.

5.2.1 Difficultés inhérentes aux radiographies de vertèbres et définition d'un cahier des charges de la méthode de segmentation à développer

Détecter des bords dans une radiographie est une tâche compliquée, car comme on l'a expliqué dans le chapitre d'introduction, une radiographie est l'image d'une superposition de structures (c'est sa différence avec une image en coupe, dans laquelle détecter des bords est un problème en général beaucoup plus simple) : si certains bords apparaissent facilement, d'autres sont cachés par d'autres structures superposées plus absorbantes (on parle de phénomène d'*occlusion* ; de plus il existe un certain nombre de zones (par exemple dans la région de l'épineuse) où la vertèbre et les structures environnantes se fondent dans les mêmes niveaux de gris.

Chercher à détecter automatiquement tous les contours d'une vertèbre sur une image fluoroscopique nous paraît ainsi illusoire, et il semble difficile de se passer de l'interaction d'un *expert* pour guider la sélection des contours pertinents.

Dans ces conditions, nous avons donc cherché à énoncer - à défaut de conditions suffisantes - des conditions nécessaires à vérifier pendant l'étape de détection de contours pour éviter de compromettre le bon déroulement de l'algorithme de reconstruction qui suit. Il est ainsi apparu que la méthode à proposer doit vérifier les points suivants :

1. elle doit se prêter à une interaction avec un expert, permettant que son intervention, indispensable, puisse être effectuée rapidement et confortablement par ce dernier : par exemple, nous avons jugé souhaitable que le détecteur de contours ne délivre pas des points de contour isolés, mais des segments, rapidement sélectionnables par l'expert si celui-ci les juge pertinents.
2. elle ne peut pas se limiter à la détection des seuls contours clairement identifiables : dans l'expérience montrée en figure 5.3, on a comparé les reconstructions obtenues avec deux types de contours sur la vue latérale (toutes choses égales par ailleurs) : l'un complet, et l'autre où seules les projections du corps vertébral et des pédicules ont été conservées. Dans le deuxième cas, la reconstruction est catastrophique : se contenter de ces informations dans la segmentation d'une vue latérale est insuffisant, et il faut donc détecter des bords dans d'autres régions. D'autre part, nous en tirons un autre enseignement : même si toutes les informations accessibles en projection sur une structure donnée sont mises en évidence dans la détection des contours relatifs à cette zone en projection

(comme c'est le cas ici pour le corps vertébral et les pédicules), rien n'assure que ces régions-là seront correctement reconstruites. La reconstruction n'est pas une opération locale, mais au contraire fortement dépendante de données globales (ce qui est conforme au mode de description du modèle statistique : les déformations appliquées au modèle moyen sont, au moins pour les premiers modes, des déformations globales, et on ne peut déformer le modèle en un sommet sans que les autres sommets "ne suivent").

3. nous avons également constaté qu'en utilisant deux familles de points de contour contenant le même nombre de points de contour exacts, mais avec dans la deuxième 5% de points de contours supplémentaires erronés, on pouvait observer une reconstruction de qualité bien inférieure. Il nous semble donc que l'expert, lors de la phase de sélections de segments, ne doit conserver que les segments dont il est certain.

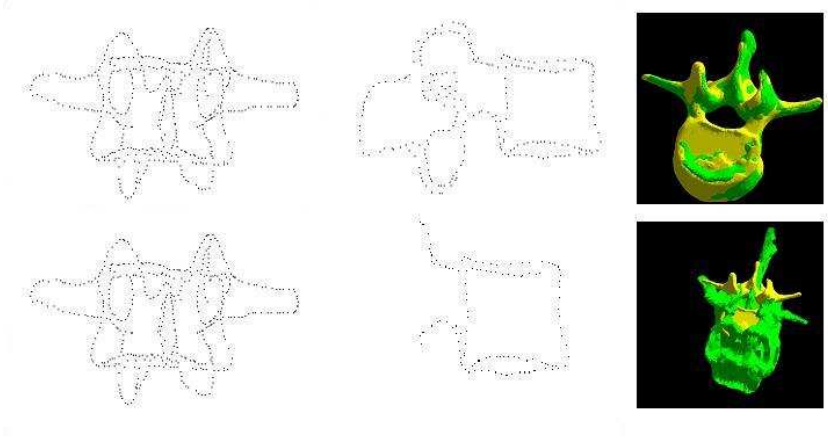


FIG. 5.3 – Expérience de reconstruction à partir d'images fluoroscopiques dans lesquelles les points de contour ont été détectés manuellement ; sur la première ligne, des contours considérés comme complets sont utilisés, alors que sur la deuxième, on a supprimé les points correspondant aux processus arrières de la vertèbre ; dans le premier cas, la reconstruction est correcte, alors que dans la deuxième, la reconstruction est catastrophique, même dans la région du corps vertébral pour laquelle tous les points de contour étaient présents.

5.2.2 Contours : premières définitions et méthodes de détection simples associées

Nous avons tout d'abord effectué un travail préliminaire qui a consisté à évaluer les résultats fournis par différentes méthodes « classiques » de détection de contours dites *de bas niveau* (c'est-à-dire sans introduction d'information *a priori* sur les structures que l'on cherche à isoler), sur des images obtenues avec un amplificateur de brillance. Nous nous référons ici à deux ouvrages [62, 24].

Outils de détection de contour : Nous nous intéressons ici à des images en niveaux de gris. L'intensité d'une image peut être vue soit comme une fonction définie sur un compact de D de $\mathbf{R}^2$, $[-1,1]\times[-1,1]$ pour fixer les idées, soit comme une fonction définie sur un sous-ensemble discret $\tilde{D}$ de $\mathbf{R}^2$ (grille régulière).
Dans le cas continu, lorsque I est une fonction différentiable, le gradient de l'intensité I est le vecteur

défini par

$$\forall (x,y) \in D,\ \nabla I(x,y) = \left(\frac{\partial I(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial I(x,y)}{\partial y} \right)$$

auquel on associe, avec l'interprétation classique des éléments de $\mathbf{R}^2$ vus comme des éléments de $\mathbf{C}$, un module

$$\forall (x,y) \in D,\ |\nabla I(x,y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial I(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial I(x,y)}{\partial y} \right)^2}$$

et un argument (la *direction* du gradient)

$$\forall (x,y) \in D,\ \phi(x,y) = \arg\left(\nabla I(x,y)\right) = \arg\left(\left(\frac{\partial I(x,y)}{\partial x} \right) + \mathbf{i} \left(\frac{\partial I(x,y)}{\partial y} \right) \right)$$

Une première définition classique consiste alors à énoncer que les points de contour sont les points de **maxima locaux de la norme du gradient dans la direction du gradient**.
Pour une intensité I, on a également recours à son Laplacien défini par

$$\forall (x,y) \in D,\ \Delta I(x,y) = \frac{\partial^2 I(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I(x,y)}{\partial y^2}$$

Une deuxième définition consiste à compléter la définition précédente par le critère suivant : les points de contour sont **les points de passage par zéro du Laplacien de l'intensité**. Ceci permet d'améliorer la robustesse du détecteur de contours quand une image est bruitée.

Rappelons comment ces définitions peuvent être adaptées à une image discrète I : le gradient de l'intensité I est approché par filtrage de l'image initial par des opérateurs locaux :

$$\forall (k,l) \in \tilde{D},\ \nabla I(k,l) \simeq (G_v * *I(k,l), G_h * *I(k,l))$$

où $**$ désigne la convolution selon les lignes puis selon les colonnes de deux images discrètes, et où les filtres que l'on a introduits sont des filtres dérivateurs dans chacune des directions principales de l'image (à savoir verticale et horizontale) :

$$G_v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } G_h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

De la même manière, le Laplacien d'une image discrète peut être calculé de la manière suivante :

$$\forall (k,l) \in \tilde{D},\ \Delta I(k,l) \simeq L * *I(k,l) \text{ avec } L = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthodes simples de détection de contours Il existe deux grandes approches pour la détection de bords dans les images. Une approche dite *approche contours*, et une *approche régions* (dans ce cas on parle plutôt de *segmentation*).

Nous avons tout d'abord testé différentes méthodes correspondant à la première approche ; en effet la deuxième approche consiste à mettre en évidence les « homogénéités » dans une image, c'est-à-dire les zones de pixels connexes ayant des propriétés similaires pour un critère de regroupement donné. Dans le problème des images fluoroscopiques de vertèbres, ces méthodes ne semblent pas exploitables : les vertèbres sont en effet des structures très inhomogènes, et, si l'on se place par exemple au voisinage de la frontière d'une vertèbre, il est difficile de classifier les pixels environnants en pixels intérieurs à la

vertèbre et extérieurs à la vertèbre.

Nous nous sommes donc concentrés sur la première approche, en utilisant des méthodes basées sur les définitions d'un point de contour énoncées plus haut : elles utilisent les opérateurs locaux d'approximation du gradient ou du Laplacien que l'on a présentés, couplés à des opérateurs de lissage, qui permettent de réduire l'amplification du bruit éventuel, inhérente à l'application d'un opérateur différentiel ; elles fournissent, après seuillage des points critiques obtenus, des images binaires où sont repérés les points potentiels de singularité. Des méthodes connues de ce type-là sont notamment les méthodes dites de Sobel, Prewitt, Roberts, et convolution par le Laplacien d'une Gaussienne [62, 24]. Par exemple, dans la méthode de Sobel, on utilise un filtre directement construit à partir des filtres G_v et G_h présentés plus haut, à chacun desquels on a ajouté dans la direction orthogonale à la direction de dérivation un opérateur de type intégrateur pour réduire les effets du bruit (autrement dit on applique un léger filtrage passe-bas dans une direction, et un filtrage passe-haut dans l'autre) :

$$G_{v\ \mathrm{liss}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } G_{h\ \mathrm{liss}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous avons également fait des tests avec le filtre dit de Canny-Deriche. Ce filtre est également une approximation du vecteur gradient, mais on applique au préalable à l'image un opérateur de lissage, qui est un filtre gaussien, approximation discrète de la gaussienne continue $(x, y) \mapsto \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$; pour résumer, le choix de la gaussienne permet d'assurer un compromis optimal entre la robustesse face au bruit, la bonne localisation des contours et la non-détection de faux points de contour. En jouant sur la valeur du paramètre σ, on peut faire varier "l'épaisseur" des contours détectés (plus la valeur de $\sigma > 0$ est faible, plus les transitions rapides de l'intensité lumineuses sont mises en évidence (par rapport aux transitions lentes)).

En pratique, l'application classique du filtre de Canny consiste en les étapes suivantes [24] :

1. on applique un filtre gaussien à l'image pour la lisser ;
2. on applique chacun des deux filtres de Sobel à l'image : on obtient alors une carte de chacune des composantes du vecteur gradient ; nous les noterons $((\nabla f)_1(k,l))_{(k,l)}$, et $((\nabla f)_2(k,l))_{(k,l)}$, où, en tout point de coordonnées (k, l), le gradient de l'image f a pour coordonnées $\nabla f = ((\nabla f)_1(k,l), (\nabla f)_2(k,l))$.
3. à partir de ces deux cartes, on peut calculer deux nouvelles cartes : une carte du module du gradient, et une carte de son orientation :

$$\mathrm{M}f(k,l) = \sqrt{(\nabla f)_1(k,l)^2 + (\nabla f)_2(k,l)^2} \text{ et } \mathrm{A}f(k,l) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\left((\nabla f)_2(k,l)\right) \text{ si } (\nabla f)_1(k,l) = 0 \\ \arctan\left(\frac{(\nabla f)_2(k,l)}{(\nabla f)_1(k,l)}\right) \text{ sinon} \end{cases}$$

4. on ne conserve que les points de maxima locaux du module du gradient dans la direction du gradient (on pourra se reporter par exemple à [65] pour la mise en pratique de la recherche des maxima locaux dans la direction du gradient).
5. on applique un seuillage par hystérésis aux maxima locaux conservés : ceci consiste à fixer deux seuils, un seuil haut, et un seuil bas. Si le module du maximum local est supérieur au seuil haut, le point associé est déclaré point de contour ; si le module du maximum local est inférieur au seuil bas, le point associé est éliminé ; si le module du maximum local est compris entre les deux seuils, le point associé est déclaré point de contour si et seulement si il est immédiatement voisin d'un point déjà reconnu comme point de contour.

Nous présentons en figure (5.4) les résultats obtenus sur une image acquise par un amplificateur de brillance, avec deux détecteurs : le détecteur de Sobel, et le détecteur de Canny-Deriche. Pour le filtre de Sobel (sur la deuxième ligne, avec une valeur du seuil décroissante de gauche à droite), on voit qu'il est difficile de trouver une valeur du seuil pour laquelle on obtienne des informations sur la face arrière de la vertèbre, sans qu'il n'y ait par ailleurs trop de points de contours parasites. Pour le filtre de Canny, il y a deux paramètres à ajuster : les seuils, et la valeur de σ. La dernière ligne présente des résultats obtenus à σ fixé, en faisant varier la valeur du seuil haut ; par rapport au filtre de Sobel, on constate que les points sont mieux reliés, donc *a priori* plus facilement exploitables par un expert. Cependant, en l'état, isoler suffisamment de segments pertinents reste délicat. L'idée que nous proposons d'utiliser peut être illustrée par la troisième ligne : toujours pour le filtre de Canny, nous avons présenté les résultats obtenus pour des valeurs de seuils fixés, et une valeur de σ décroissante ; on constate alors que les points que l'on souhaiterait voir détectés sont des points déjà présents dans deux images de gauche, ou des points au voisinage de ces points-là. Ceci constitue, schématiquement, l'idée du détecteur multiéchelles dont nous avons voulu évaluer la pertinence ici, et que nous présentons dans la suite.

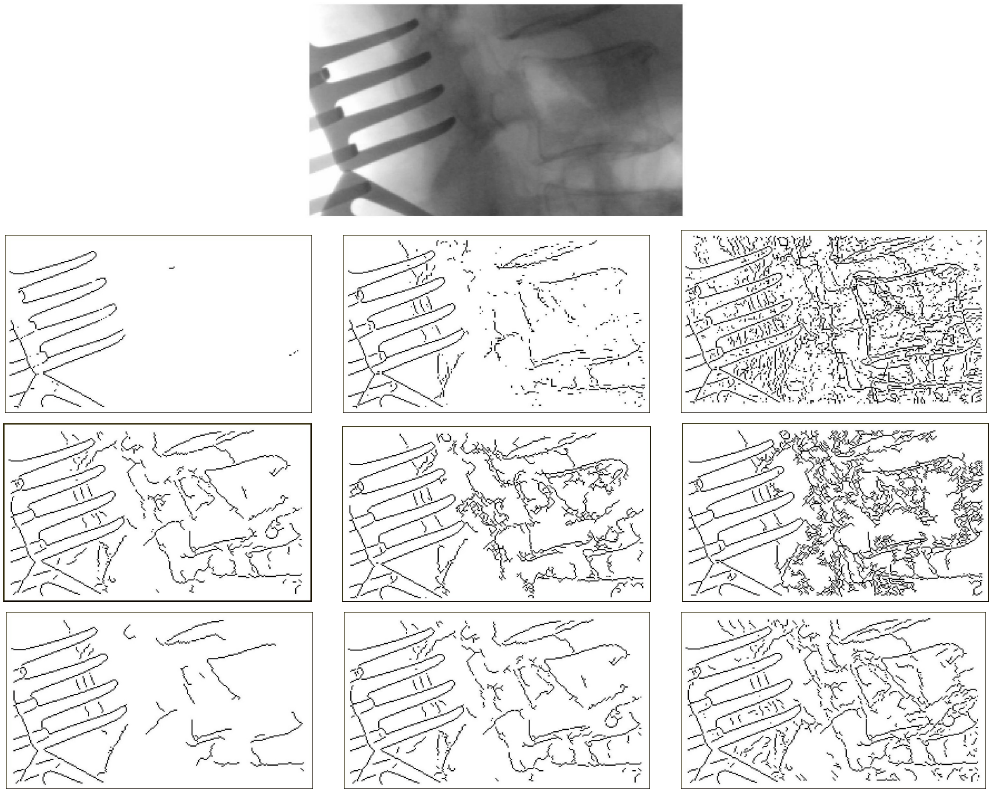


FIG. 5.4 – L'image fluoroscopique ; 2ème ligne : résultats de détection de contours avec le filtre de Sobel ; sur la 3ème ligne : résultats de détection de contours avec le filtre de Canny, pour trois valeurs de seuil ; sur la 4ème ligne, σ est fixé, on fait varier la valeur des seuils. On a utilisé la fonction `edge` de `Matlab`.

Si on se place dans l'interprétation continue, dans le détecteur de Canny, chacune des deux composantes peut être vue comme le résultat d'une transformée en ondelettes continue, à une échelle fixée ; en effet, on peut écrire :

$$\nabla I * *G_\sigma = I * *\nabla G_\sigma = \left(I * \frac{\partial G_\sigma}{\partial x}, I * \frac{\partial G_\sigma}{\partial y} \right)$$

On dit que $I * *\nabla G_\sigma$ est une *transformée en ondelettes vectorielle*, par rapport au couple d'ondelettes $\left(\psi^v_\sigma = \frac{\partial G_\sigma}{\partial x}, \psi^h_\sigma = \frac{\partial G_\sigma}{\partial y} \right)$. On peut voir un détecteur de contours multi-échelles comme une

généralisation du détecteur de Canny que nous venons de présenter, au sens où celui-ci peut alors être interprété comme un détecteur de contours mono-échelle.

Dans le cadre d'un projet financé par la région Rhône-Alpes, le projet ADéMo, (*Acquisition et Détection guidées par le Modèle*), nous avons travaillé avec deux équipes qui mettaient en oeuvre de manière indépendante un détecteur de contours multiéchelles : avec Olivier Le Cadet, du laboratoire LJK à Grenoble d'une part [9], et avec Cécile Barat et Christophe Ducottet du laboratoire LTSI de Saint-Etienne d'autre part [5]. Nous allons présenter brièvement dans la suite les travaux effectués par Olivier Le Cadet. Les travaux développés au LTSI sont similaires (la différence essentielle résidant dans la caractérisation des contours par leur régularité lipschitzienne : dans les travaux de C. Barat, le paramètre de régularité prend des valeurs discrètes). Pour plus de détails, on pourra se reporter à [4, 65].

5.2.3 Détecteur de contours multi-échelles

Principe [69, 70, 65] Les points de contours détectés par un détecteur multi-échelles sont choisis parmi les maxima locaux du gradient de l'intensité de l'image le long des lignes de courant associées au champ de vecteurs du gradient. Cette définition est ensuite améliorée en mettant en place un détecteur multi-échelles, construit à l'aide de la transformée en ondelettes de l'intensité, avec une ondelette d'analyse construite comme le gradient d'un noyau régularisant : en effet, avec un tel choix, la transformée en ondelettes vectorielle est à chaque échelle proportionnelle au gradient de l'intensité lissée. Dans cette approche, si on localise un maximum local aux échelles fines, et s'il appartient à une chaîne de maxima locaux suffisamment longue à travers les échelles, alors on décide que c'est un point de contour significatif. De plus, ce cadre permet également d'estimer la régularité Lipschitzienne en les points de contour détectés, c'est-à-dire la régularité locale du bord au voisinge du point dans la direction orthogonale au contour, fournissant ainsi un critère de classification (par exemple, des points de contour effectifs de la vertèbre peuvent ainsi être distingués de faux maxima mis en évidence par le détecteur).

Transformée en ondelettes dyadique d'une image On considère deux ondelettes bidimensionnelles ψ_1 et ψ_2. La transformée en ondelettes vectorielle de la fonction f a deux composantes, définies par

$$W^1 f(x,y) = f * \psi^1(x,y) \text{ and } W^2 f(x,y) = f * \psi^2(x,y) \ . \tag{5.2}$$

Si l'on discrétise les paramètres d'échelle, la transformée en ondelettes dyadique de la fonction f est l'ensemble

$$\mathbf{W}f = (W^1_{2^j} f(x,y), W^2_{2^j} f(x,y))_{j \in \mathbf{Z}}$$

avec pour tout j

$$W^1_{2^j} f(x,y) = f * \psi^1_{2^j}(x,y) \text{ and } W^2_{2^j} f(x,y) = f * \psi^2_{2^j}(x,y) \ . \tag{5.3}$$

Un détecteur multi-échelles peut être obtenu à partir de la transformée en ondelettes dyadique si l'on choisit

$$\psi^1_{2^j}(x,y) = \frac{\partial \theta^1(x,y)}{\partial x} \text{ and } \psi^2_{2^j}(x,y) = \frac{\partial \theta^2(x,y)}{\partial y} \tag{5.4}$$

où θ^1 et θ^2 sont des noyaux régularisants (c'est-à-dire des fonctions dont l'intégrale est égale à 1 et qui tend vers zéro à l'infini). Si $\theta^1 = \theta^2$ la transformée en ondelettes à l'échelle 2^j peut être écrite :

$$\left(\vec{W} f = 2^j \nabla (f * \theta^1_{2^j})\right)_{j \in \mathbf{Z}} \ .$$

Ainsi , la transformée en ondelettes vectorielle est proportionnelle au gradient de l'intensité lissée $f*\theta^1_{2^j}$. A chaque échelle 2^j, les points de brusque changement de $f*\theta^1_{2^j}$ sont les points (x,y) où le module

$$M_{2^j}f(x,y) = \|\vec{W}f(x,y)\| = \sqrt{|W^1_{2^j}f(x,y)|^2 + |W^1_{2^j}2f(x,y)|^2} \tag{5.5}$$

présente un maximum local dans la direction du gradient, direction donnée par l'argument

$$A_{2^j}f(x,y) = \arg\left(W^1_{2^j}f(x,y) + iW^2_{2^j}f(x,y)\right) \quad . \tag{5.6}$$

En pratique, les ondelettes choisies sont telles que

$$\psi^1(x,y) = \psi(x)\theta(x)\theta(y) \text{ et } \psi^2(x,y) = \theta(x)\theta(y)\psi(y) \tag{5.7}$$

où θ est une fonction chapeau 1D ($\theta(x) = 1 - |x|$ si $|x| \leq 1$ et 0 sinon), et où ψ est une ondelette spline de degré 1 [65].

Dans la transformée en ondelettes discrète rapide, l'image f est discrétisée en une matrice de taille $2^J \times 2^J$, et la transformée en ondelettes dyadique est calculée aux échelles 2^j, $j = 1, 2, \cdots J$, par $j-1$ convolutions discrètes successives de f avec un filtre passe-bas h, suivies par une convolution avec un filtre passe-haut g_x ou g_y :

$$W^1_{2^j}f(x,y) = f*h*\cdots*h*g_x \text{ and } W^2_{2^j}f(x,y) = f*h*\cdots*h*g_y \tag{5.8}$$

Le filtre passe-bas h, associé à la fonction $\theta(x)\theta(y)$ dans (5.7), et les deux filtres passe-haut g_x and g_y, qui sont des filtres dérivateurs dans chacune des directions x et y, correspondant à une ondelette spline ψ de degré 1, sont donnés par :

$$h = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_x = \frac{1}{2}[0,1,-1], \quad g_y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad .$$

Identification de portions de contours dans les images Nous présentons ici la méthode développée par Olivier Le Cadet [65]. Pour identifier les contours d'une vertèbre dans une image, on recherche les courbes le long desquelles l'intensité est singulière dans une direction (donnée par la direction du gradient), et est à variation lente dans la direction orthogonale. Pour identifier les courbes de contour, l'algorithme se déroule en cinq étapes :

1. on calcule d'abord la transformée en ondelettes dyadique 2D de l'intensité $(W^1_{2^j}f(x,y), W^2_{2^j}f(x,y))_{j\in\{1\cdots J\}}$;
2. à chaque échelle 2^j on calcule les maxima locaux $M_{2^j}f(x,y)$ dans la direction du gradient $A_{2^j}f(x,y)$ (cf. 5.5),(5.6)) ;
3. on chaîne ensuite les maxima locaux de la transformée en ondelettes à travers les échelles [69]. Ceci définit des lignes de maxima à travers les échelles. Un point de contour significatif est alors défini comme un point appartenant une chaîne suffisamment longue ;
4. de plus, le long des lignes de maxima, on peut calculer la régularité lipschitzienne des points de contour détectés [69]. On peut les classer par rapport à leurs exposants de régularité ; certains des points de contour n'appartenant pas à la vertèbre ont une régularité suffisamment différente de celle des points appartenant à la vertèbre, et sont donc éliminés.
5. la dernière étape consiste à rassembler les points de contour en segments de courbe, à partir de la connaissance de la direction du gradient (5.6) : l'expert peut alors décider de garder les points ou non.

La figure (5.5) présente les points de contour calculés sur une image classique, puis sur une radio de vertèbre sèche (c'est-à-dire sans environnement), acquise avec le détecteur de radiologie numérique utilisé dans le projet MI3 (cf. chapitre d'introduction). Les couleurs traduisent la régularité lipschitzienne des points de contours (le bruit, en bleu, a une régularité lipschitzienne faible, à la différence des bords de la vertèbre, correspondant aux discontinuités de l'intensité, qui ont une régularité lipschitzienne proche de 0 (en rouge)).

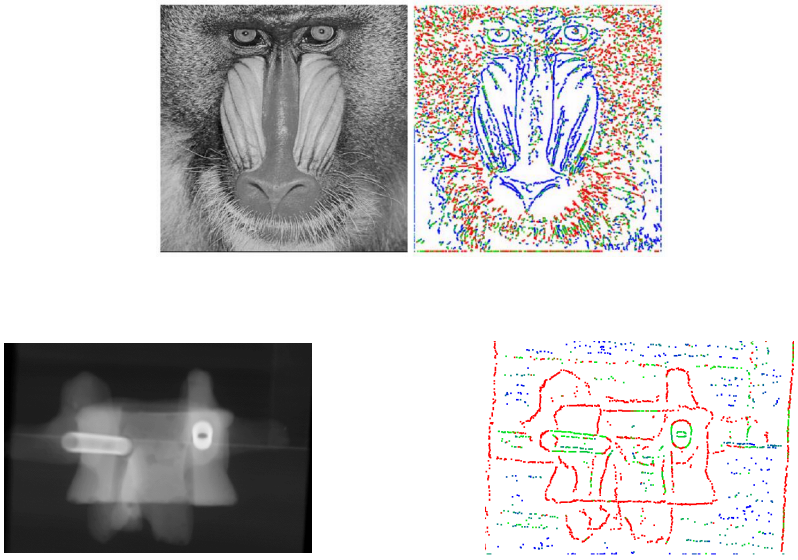


FIG. 5.5 – Détection de bords et régularité lipschitzienne sur une image classique (Mandrill), puis sur une vertèbre sèche (algorithme d'O. Le Cadet [65]).

Couplage entre la méthode de détection de contours avec la méthode de reconstruction Nous avons finalement mis en place une étape de détection de contours en deux phases :

- une première étape de détection de contours non supervisée, où un certain nombre de segments possibles sont détectés automatiquement : en sortie, on obtient une image où des points de fort gradient sont détectés puis assemblés en segments. A ce stade, des contours non pertinents sont ainsi mis en évidence, et au contraire, d'autres points de contour n'ont pas été détectés.

- une seconde où le résultat de la détection de contours est proposé au chirurgien, qui, par quelques rapides clics de souris, sélectionne parmi les segments mis en évidence, ceux qui lui semblent pertinents, et sur lesquels se basera ensuite l'algorithme de reconstruction (l'assemblage en segments de la première étape joue ici un rôle crucial).

Nous présenterons dans la suite les résultats du couplage de cet algorithme de détection de contours avec la méthode de reconstruction. Nous avons également effectué des tests avec un autre type de détecteur de contours, basés sur des contours actifs. Nous le présentons rapidement dans ce qui suit.

5.2.4 Détection de contours par une méthode de contours actifs modifiée : méthode GVF

Principe Cette méthode, dite méthode GVF pour *Gradient Vector Flow* est une méthode de contours actifs développée récemment par Xu *et al.* [87]. Elle diffère des méthodes de détection de contours tradi-

tionnelles [56, 25] par la prise en compte d'une force externe appliqué au contour actif : dans la méthode GVF, le bassin d'attraction d'un contour n'est pas concentré autour d'un voisinage du contour, mais étendu à toute l'image. Ceci rend en particulier la méthode moins sensible au choix du contour initial, et permet de détecter des contours qui ne sont pas réduits à une seule composante connexe.

L'application de cette méthode à la détection de contours dans des images de vertèbres a fait l'objet d'un stage d'été effectué par des étudiants de l'ENSIMAG, Jean-Marie Nguyen-Xuan-Dang et Sylvain Vallaghe, à l'été 2004, sous la direction de Valérie Perrier.

Un contour actif (ou *snake* en anglais) est une courbe paramétrée du plan $\mathbf{v} = (x, y) = (x(s), y(s))_{s\in[0,1]}$. On associe une énergie à ce contour, et on déforme ce contour de telle sorte afin de rendre minimale son énergie, l'idée étant qu'un minimum de l'énergie correspond à une position du contour coïncidant avec un contour "caché" de l'image.
L'évolution de la *forme* du contour est régie par l'évolution d'une énergie $\mathcal{E}$ associée au contour, décomposée en deux termes :

- un terme qui modélise une énergie interne de déformation, présent dans la méthode initiale et conservé dans la méthode GVF, et qui prend la forme suivante :

$$\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathbf{v}) = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \mathbf{w_1(s)} \left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{s}}\right|^{\mathbf{2}} + \mathbf{w_2(s)} \left|\frac{\partial^{\mathbf{2}} \mathbf{v}}{\partial \mathbf{s^2}}\right|^{\mathbf{2}} \mathbf{ds}$$

  w_1 et w_2 sont deux fonctions poids permettent de contrôler les propriétés "mécaniques" de la courbe :
  - w_1 est une fonction positive, qui contrôle la tension de la courbe : si on augmente son amplitude on élimine d'éventuelles boucles en réduisant la longueur du contour.
  - w_2 est une fonction positive, qui contrôle la rigidité : si on augmente w_2, on rend la courbe plus régulière. En mettant sa valeur à zéro, on autorise des points de discontinuité.

- un terme qui modélise une énergie externe de déformation

$$\mathcal{E}_{\text{ext}}(\mathbf{v}) = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \mathbf{P(v(s)ds}$$

  P est un potentiel associé à l'image, en pratique quand on construit P, on fait en sorte qu'un fort potentiel soit affecté aux points de contour dans l'image. Dans la méthode traditionnelle, le potentiel est sous la forme $E = -\nabla I$; dans la méthode GVF, le potentiel est remplacé par une autre énergie, équivalente à l'énergie originelle au voisinage des contours, mais diffusée dans les zones homogènes qui sont en périphérie : ceci permet d'avoir moins de contraintes sur le contour initial, et permet de détecter des concavités, comme on peut le constater dans la figure (5.6), tirée de [87].
  Le potentiel utilisé dans [87] est le suivant :

$$P = -c\,|\nabla[G_\sigma * I]|$$

  où G est un filtre gaussien, et σ en contrôle l'étendue : c'est σ qui permet de définir l'étendue du bassin d'attraction d'un extremum local de $|\nabla I|$.

La détection de contours repose sur la minimisation de l'énergie totale ; ceci se traduit avec l'équation d'Euler-Lagrange, qui prend la forme suivante :

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(w_1 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s}\right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_2 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s^2}\right) + \nabla P(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

à laquelle on ajoute des conditions initiales.

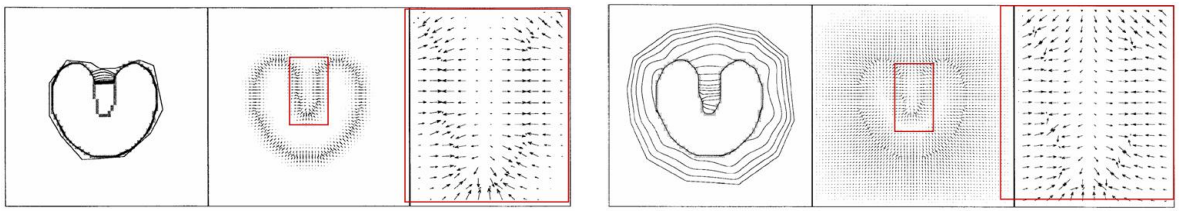


FIG. 5.6 – Exemple tiré de [87] : comparaison du comportement entre les contours actifs et la méthode GVF.

Nous présentons en figure (5.7) les résultats obtenus sur des images de vertèbre sèche acquises avec par un détecteur de radiologie numérique, avec le détecteur de contours implémenté par J.-M. Nguyen-Xuan-Dang et S. Vallaghe.

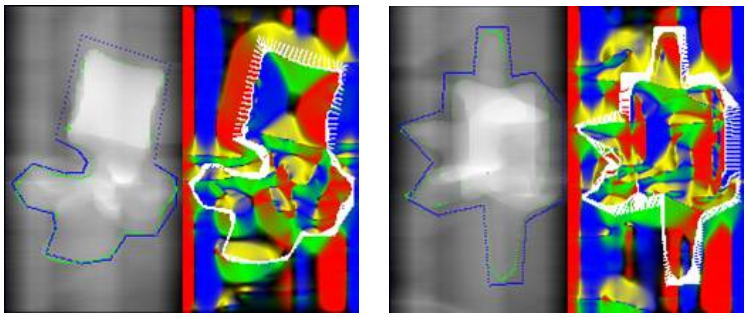


FIG. 5.7 – Méthode GVF appliquée à des images fluoroscopiques de vertèbres sèches.

Couplage avec la méthode de reconstruction Nous avons mis en place des tests du couplage de ce deuxième type de détecteurs de contours avec la méthode de reconstruction, afin de pouvoir comparer avec les résultats de l'interaction avec un détecteur multi-échelles. Nous en présentons les résultats dans la suite. Comme pour l'utilisation du détecteur de contours multi-échelles, nous sollicitons également un expert ici, mais cette fois-ci avant l'application du détecteur de contours : il lui revient de dessiner un contour initial, par exemple une ligne polygonale, qui suit grossièrement le contour de la vertèbre.

5.3 Tests de reconstruction prenant en compte l'étape de détection de contours

Nous présentons dans cette partie ce qui a constitué l'essentiel de notre travail dans ce qui est présenté dans ce chapitre : la mise en place de tests de reconstruction, prenant en compte l'étape d'initialisation évoquée plus haut et le couplage avec les différents détecteurs de contours que nous avions à notre disposition (nous avons à cette fin repris le code développé par M. Fleute pendant sa thèse pour le compléter).
Le but des deux tests que nous allons présenter était d'évaluer l'erreur finale de reconstruction alors obtenue (ce qui n'était pas le cas dans les travaux initiaux de M. Fleute, où, comme on l'a dit, les contours étaient simulés, ce qui équivalait à une détection de contours manuelle, supposée "parfaite").

5.3.1 Validation de l'intégration de l'application dans la plateforme Surgetics sur une vertèbre sèche

Nous avons défini une première série de tests [5]. Ses conditions étaient les suivantes :

- nous avons travaillé sur une vertèbre sèche (*ie* une vertèbre sans environnement extérieur) ;
- nous avons utilisé deux images fluoroscopiques acquises avec le prototype de C-ARM utilisé dans le cadre du projet MI3 (et donc avec le détecteur de radiologie numérique inséré dans ce dispositif) ;
- nous avons utilisé l'algorithme de détection de contours multiéchelles développé par C. Barat et C. Ducottet [5], qui avait été intégré par l'entreprise Praxim pour ces tests dans sa plateforme de navigation Surgetics (une interface avait en particulier été développée pour permettre à l'utilisateur de choisir certains segments après la détection automatique, et éventuellement d'en dessiner des supplémentaires à la console)

Le but consistait alors à vérifier que dans ce cas simple (les radiographies de vertèbre sèche, pour lesquelles il n'y pas de structure annexe en superposition donc aucun problème d'occlusion, sont supposées être simples à traiter) que le couplage *détection de contours /reconstruction/navigation* était viable. A cette fin, des tubes en aluminium avaient été insérés dans la vertèbre sèche à l'intérieur des pédicules.
Une fois les images fluoroscopiques calibrées, puis pré-traitées par l'algorithme de détection de contours, nous avons sélectionné certains segments, puis appliqué l'algorithme de détection de contours. Une fois la reconstruction accomplie, une image virtuelle de la surface de vertèbre ainsi reconstruite était disponible sur l'écran de la station de navigation.
L'expérience consistait alors à essayer d'insérer un outil à l'intérieur des tubes en aluminium en se laissant guider par les images affichées sur la console, où l'outil (suivi et localisé dans le champ opératoire) est à chaque instant placé en surimpression. Une image de l'interface disponible est présentée en figure (5.8) : il s'agissait donc de vérifier que lorsque sur l'image de la console, l'outil (virtuel) était représenté dans les pédicules de la vertèbre (virtuelle), l'outil (réel) était effectivement dans les tubes (réels) de la vertèbre (réelle). Ce fut le cas avec une erreur de positionnement estimée à environ 2mm entre l'axe de l'outil et celui des tubes, ce qui en pratique est considéré comme suffisant pour du guidage en orthopédie. Ces tests ont donc été jugés satisfaisants.

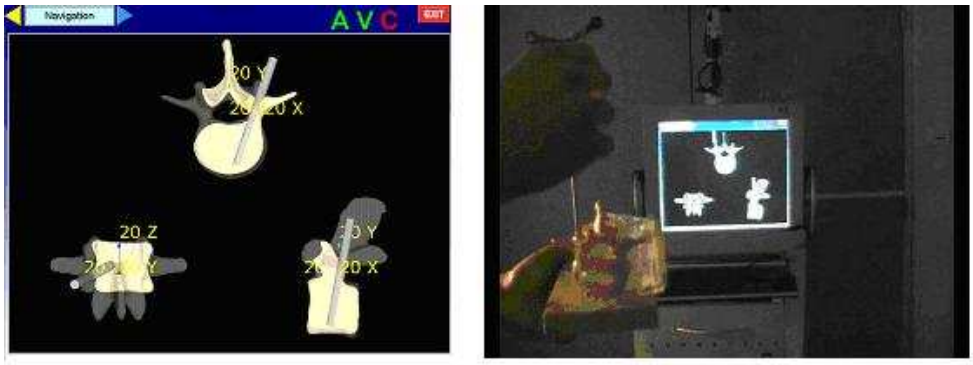


FIG. 5.8 – L'interface de navigation offerte au chirurgien avec la plateforme Surgetics

5.3.2 Estimation de l'erreur de reconstruction sur un fantôme de vertèbre plongée dans un environnement

Nous avons ensuite effectué une deuxième série de tests [9], dont l'idée était d'obtenir une mesure de l'erreur prenant mieux en compte les difficultés de l'étape de détection de contours que dans le cas simple de la vertèbre sèche, c'est-à-dire approchant mieux les conditions réelles. Nous voulions donc travailler avec des images plus réalistes, prenant en compte en particulier les occlusions ; cependant, comme nous voulions quantifier l'erreur de reconstruction, nous souhaitions travailler également avec une surface de vertèbre parfaitement connue : nous avons donc construit un fantôme adapté.

Pour cela, nous sommes partis d'un maillage de surface de vertèbre, issue de la segmentation manuelle d'un scanner de vertèbre réelle. Ensuite,

1. nous en avons calculé les sections par des plans parallèles (obtenant une pile de contours), fournissant une pile d'images binaires représentant des silhouettes de vertèbres en coupe ;
2. nous avons créé une nouvelle pile d'images, en remplissant l'intérieur des silhouettes par une densité uniforme, modélisant celle de l'os ; nous avons ainsi obtenu un volume de données modélisant les coupes d'une vertèbre sèche (voir en première ligne de la figure (5.9)).
3. dans un second temps, nous avons "plongé" chacune des coupes dans un examen scanner réel, c'est-à-dire que dans un examen scanner réel de vertèbre, nous avons remplacé coupe par coupe une des vertèbres qui y était présente par la coupe de la vertèbre virtuelle (quelques coupes sont présentées en deuxième ligne de la figure (5.9), avec un zoom sur l'une des coupes.).

Nous avons ainsi obtenu deux cubes de données : l'un simulant un examen scanner de vertèbre sèche, l'autre simulant un examen scanner d'une vertèbre *in vivo* (la vertèbre est entourée par des structures, en particulier les vertèbres immédiatement supérieure et inférieure.)

Une fois ces coupes scanners virtuelles obtenues, nous avons simulé une radiographie latérale et une radiographie frontale en géométrie parallèle, en appliquant une exponentielle à l'opposé de la somme des intensités dans le cube de données selon les deux types de direction, dans les deux contextes (vertèbre sèche, puis avec environnement). Les images obtenues sont présentées en figure (5.10).

Nous étions alors dans les conditions permettant d'appliquer la méthode de reconstruction : nous avons ainsi mis en oeuvre l'algorithme de détection de contours d'O. Le Cadet sur les radiographies simulées (et isolé des contours pertinents). Enfin, nous avons effectué une reconstruction de la surface de la vertèbre, obtenant ainsi un maillage que nous avons pu comparer au maillage initial. Précisons le bilan des deux étapes.

Etape de détection de contours Pour l'étape de détection de contours, nous avons appliqué indépendamment les deux détecteurs de contours (multiéchelles et GVF) sur les deux types de radiographies simulées (c'est-à-dire sans ou avec environnement).

Pour le cas du détecteur multi-échelles, nous avons effectué seulement la phase d'interaction avec un expert dans le cas de la vertèbre avec environnement, partant du principe que dans le cas de la vertèbre sèche, seuls des contours appartenant à la vertèbre avaient pu apparaître. Nous pouvons alors faire les commentaires qualitatifs suivants :

1. la méthode avec l'algorithme GVF conduit aux résultats qui ont été présentés en figure (5.7) : elle met en évidence de manière nette les contours extérieurs. Cependant, l'information sur les contours intérieurs est perdue, alors qu'elle peut être au moins en partie retrouvée en utilisant la méthode avec le détecteur multiéchelles ;

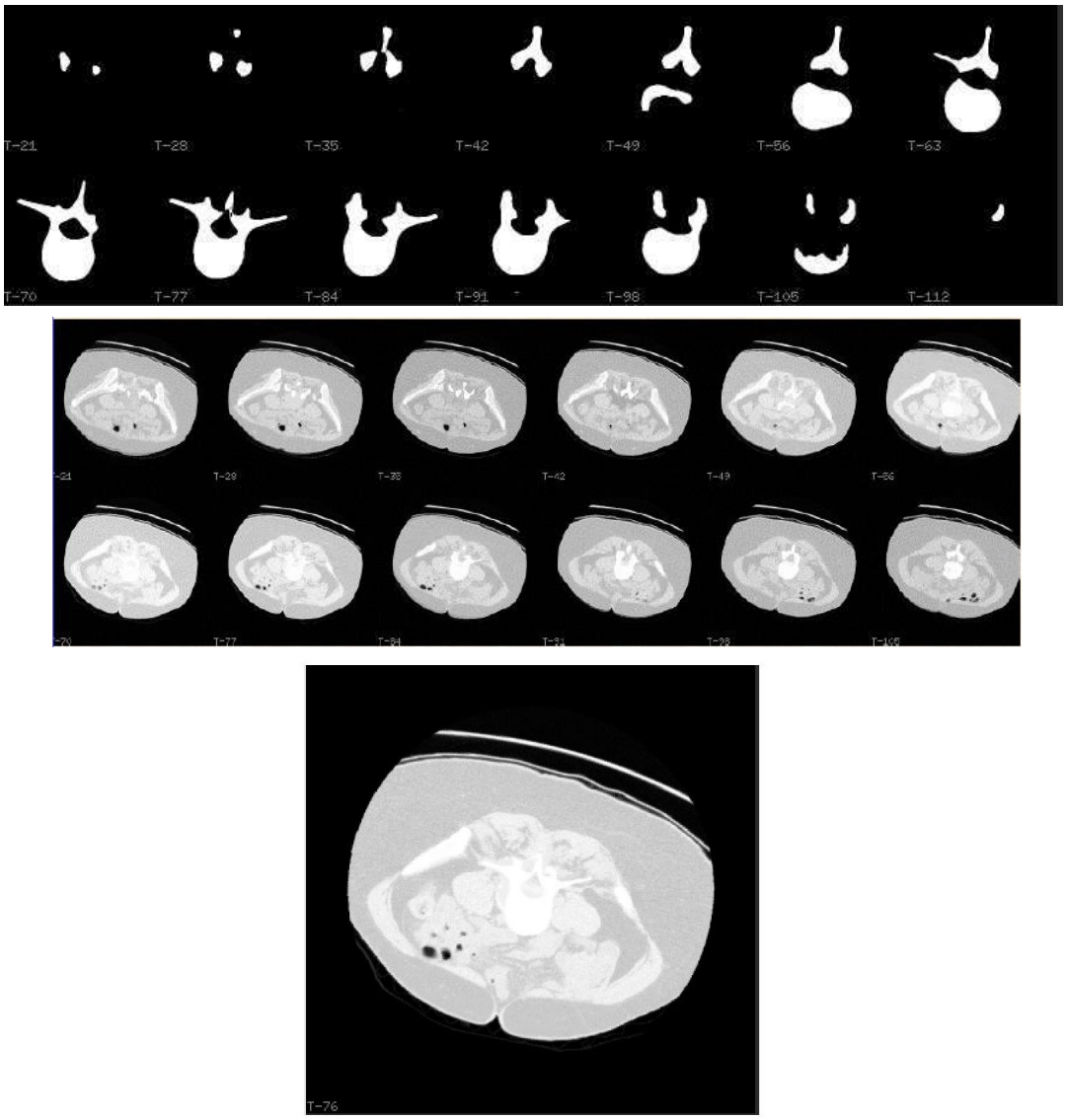


FIG. 5.9 – Coupes d'une vertèbre simulées à partir d'un maillage de vertèbre (en haut), puis plongée dans un scanner réel de vertèbre. En bas, zoom sur l'une des coupes.

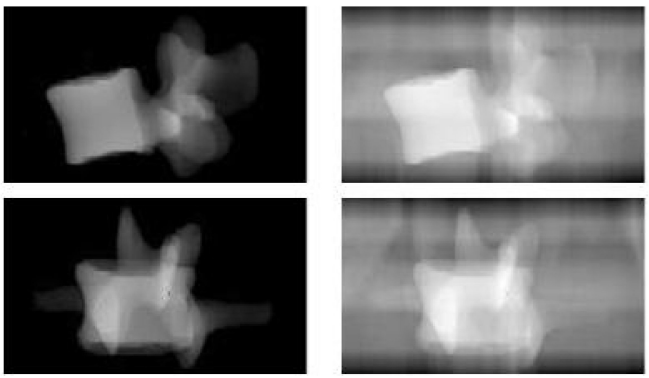


FIG. 5.10 – Radiographies simulées d'une vertèbre sèche, puis plongée dans un environnement.

2. la phase non automatisée de sélection de contours, qui suit l'application du détecteur quand on utilise la méthode par ondelettes et conduit aux images présentées en figure (5.11), est plus contraignante pour l'expert que le seul tracé d'un contour initial requis par la méthode GVF ; en particulier, cette étape de sélection nécessite une connaissance précise de l'anatomie de la vertèbre.

En résumé, la méthode GVF est plus simple à mettre en oeuvre, moins tributaire d'une expertise extérieure ; elle est bien adaptée à la détection des contours extérieurs, même lorsque le contour n'est pas convexe, mais elle se prête en revanche mal à la détection des contours intérieurs.

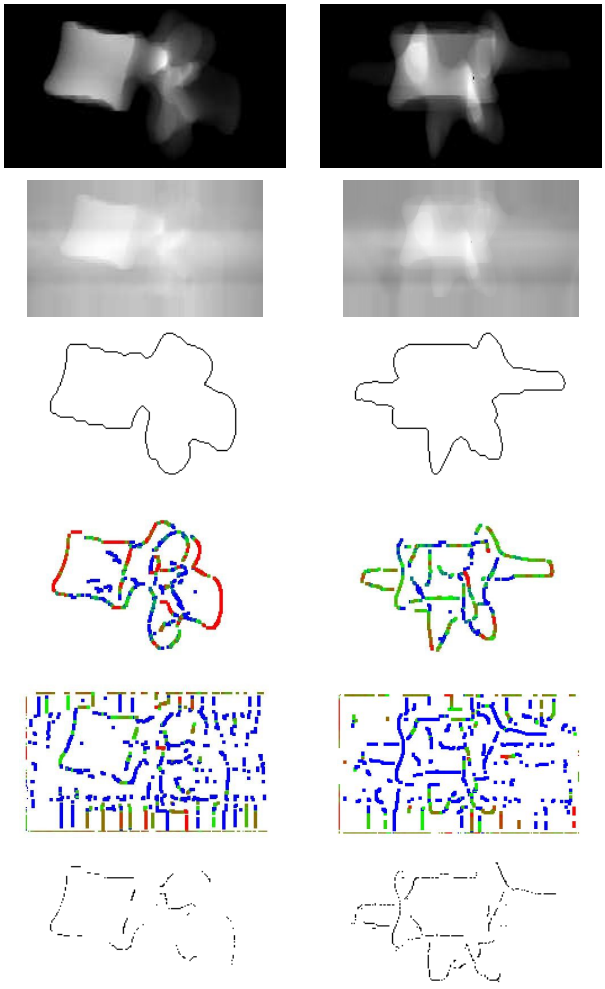


FIG. 5.11 – Résultats de la détection de contours avec l'algorithme de détection de contours multiéchelles sur les images radiographiques simulées : de haut en bas : les radiographies simulées sans environnement ; les radiographies simulées avec environnement ; les contours complets calculés en projetant le maillage initial ; les contours obtenus par l'algorithme de détection de contours dans le cas de la vertèbre sans environnement, puis avec environnement, puis, pour ce dernier cas, les contours gardés après sélection manuelle.

Etape de reconstruction Nous avons appliqué l'algorithme de reconstruction sur chacun des jeux de points de contour obtenus à l'issue de l'étape précédente.

Nous avons alors défini deux types de critères pour évaluer la qualité de la reconstruction. Le premier consiste à calculer deux distances, respectivement mesurées entre :

1. la surface reconstruite et les faisceaux de rétroprojection (c'est-à-dire l'erreur que l'on utilise comme critère de minimisation dans l'algorithme de déformation), notée erreur 3D/2D dans la figure (5.12) ;
2. la surface reconstruite et la surface de référence (erreur 3D/3D en figure (5.12)).

Pour chaque erreur, une erreur absolue (en mm), et une erreur relative (par rapport à la plus grande dimension de la vertèbre de référence) sont données. Ces valeurs traduisent une erreur globale.

Le deuxième critère est local, et consiste à calculer les coupes frontales et transversales de la surface reconstruite, pour pouvoir les comparer localement, en l'occurence au niveau des pédicules, c'est-à-dire dans la région qui nous intéresse. Des exemples de coupes sont proposées en figure (5.12).

Complete contours			**3D/2D** 0.86mm (1,7%) **3D/3D** 1.15mm (2,3%)
Phantom of dry vertebra - GVF			**3D/2D** 2.04mm (4%) **3D/3D** 4.07mm (8%)
Phantom of dry vertebra - Wavelets			**3D/2D** 1,59mm (3,1%) **3D/3D** 2.07mm (4,1%)
Phantom of real vertebra - GVF			**3D/2D** 1.87mm (3,7%) **3D/3D** 2.15mm (4,2%)
Phantom of real vertebra - Wavelets			**3D/2D** 1,42mm (2,8%) **3D/3D** 1.69mm (3,3%)

FIG. 5.12 – Comparaison de la qualité des reconstructions obtenues avec plusieurs détecteurs de contours. Pour les sections, on peut comparer la trace des sections de la vertèbre de référence (en gris) avec celles de la vertèbre reconstruite (en blanc).

Ces différents tests nous ont conduits aux observations suivantes :

1. les erreurs obtenues dans le cas de données complètes (c'est-à-dire sans la phase de segmentation) permettent d'estimer les limites de la méthode de reconstruction : on ne peut pas espérer faire

mieux.

2. la perte des contours intérieurs (GVF) perturbe de manière très significative la reconstruction qui suit.
3. la présence de faux-points de contours peut aussi entraîner une reconstruction de mauvaise qualité (un mauvais contour sur la vue latérale dans le cas de la vertèbre sèche conduit à des résultats de reconstruction pires que dans le cas où l'environnement est présent en utilisant la méthode de détection par ondelettes), confirmant ainsi l'importance de la phase de sélection des contours par l'expert.
4. la méthode de reconstruction par ondelettes permet d'obtenir une reconstruction de qualité satisfaisante dans le cas du fantôme avec environnement : l'erreur dans la région des pédicules est en effet inférieure à 4 pixels, soit 2mm.

Conclusion A l'issue de ces expériences, il nous semble qu'il est difficile de se reposer uniquement sur un détecteur de contours par contours actifs pour détecter les bords dans une radiographie de vertèbre, dans la mesure où ce type de détecteur ne se prête guère à la détection des contours internes, qui sont cependant essentiels à la poursuite de l'algorithme de reconstruction. Dans le même temps, l'utilisation d'un détecteur de contours multiéchelles utilisant des ondelettes, fournit des résultats satisfaisants dans le cas de données de synthèse proches de la réalité, et paraît donc prometteur pour l'application visée, mais sa bonne marche dépend fortement d'une interaction avec un expert.

Il nous semble donc que l'on pourrait combiner les atouts des deux détecteurs, pour :

- utiliser comme carte des contours une combinaison des résultats complémentaires des deux détecteurs.
- utiliser le détecteur par ondelettes pour déterminer une première surface grossière, puis projeter les contours de cette surface grossière, afin d'obtenir des contours initiaux pouvant être mis en entrée d'une méthode de détection de contour utilisant la méthode GVF, qui disposerait alors à la fois de contours internes et externes.

Ceci constitue une perspective de notre travail.

Chapitre 6

Conclusion-Perspectives

Au terme de ce travail, nous voudrions d'abord insister sur le constat que nous avons mis en avant dans le chapitre 2 : contrairement à ce que l'on pourrait penser *a priori*, nous avons observé que la méthode de rétroprojection filtrée a un comportement très satisfaisant dans de très nombreux problèmes de reconstruction à données tronquées de type intérieures, alors que ceci n'est pas mis en évidence par la littérature.

Cependant, comme nous l'avons vu aussi, avoir recours à des méthodes d'inversion de la transformée de Radon par ondelettes permet de travailler avec des algorithmes au comportement plus facilement contrôlable en présence de données locales : en tronquant les formules de reconstruction aux échelles fines, on peut effectuer des reconstructions à partir de données locales exactement comme si l'on disposait des données globales ; dans le cas du problème intérieur, ceci permet de s'affranchir de l'influence des objets présents hors de la région d'intérêt, qui, au contraire, peuvent parasiter les reconstructions locales effectuées avec la méthode de rétroprojection filtrée.

Dans ce contexte, nous avons recensé les principales relations entre ondelettes et transformée de Radon présentes dans la littérature, en faisant apparaître quelques liens entre des approches traditionnellement présentées de manière indépendante. Ensuite, à partir de travaux théoriques effectués par M. Holschneider, nous avons proposé une nouvelle méthode d'inversion de la transformée de Radon ; elle présente l'avantage d'être facilement adaptable à des données locales, aussi bien pour le problème intérieur que pour le problème à angle limité : nous avons présenté des tests de reconstruction satisfaisants dans ces deux contextes.

Le prolongement naturel de notre travail résiderait dans le passage en dimension 3 : en dimension 3, on peut montrer que la transformée de Radon est localement inversible, mais ce n'est pas cette transformée qui est mesurée (la transformée de Radon rassemble des mesures effectuées sur des hyperplans, donc des plans en dimension 3). En pratique, on mesure, comme en dimension 2, l'atténuation des rayons X selon des droites. Ceci conduit à un échantillonnage d'une transformée appelée *transformée en rayons X* en géométrie conique. Dans ce contexte, les problèmes de données tronquées sont courants. La troncature des mesures dans la direction de l'axe de rotation du scanner est quasiment inévitable (sauf cas exceptionnels, on n'acquiert pas de mesures de la tête aux pieds du patient), mais elle est en général bien maîtrisée dans les algorithmes de reconstruction récents [57, 82]. En revanche, la troncature des données dans la direction orthogonale à l'axe de rotation pose de nombreux problèmes (de même nature que les problèmes rencontrés en 2D). Les développements récents se sont concentrés sur la mise au point de formules d'inversion analytiques conduisant à des algorithmes de type rétroprojection filtrée, avec un filtre monodimensionnel sur le détecteur pour différentes classes de trajectoire de la source [57, 82]. Cependant, des travaux inspirés de la Λ-tomographie en 2D ont fait l'objet de généralisations en 3D pour la trajectoire circulaire (qui s'avère être incomplète en 3D en géométrie conique [104]). Dans le même esprit, une généralisation de nos travaux en 3D pourrait sans doute trouver des applications en

imagerie interventionnelle, un domaine dans lequel on sait combien il est souhaitable d'utiliser de petits détecteurs.

Annexe A

Transformations de Fourier

Nous rassemblons ici les principaux résultats relatifs aux transformées de Fourier utilisés dans ce manuscrit. On pourra se référer à l'ouvrage de C. Gasquet et P. Witomski [45] pour leurs preuves et plus de détails.

Remarques préliminaires informelles

On distingue plusieurs cas :

1. si le signal étudié est continu, alors :
   - s'il est périodique : on peut calculer ses **coefficients de Fourier**, qui forment un signal discret, puis qui déterminent sa série de Fourier.
   - s'il non périodique : le signal peut être vu comme un signal de période infinie ; on peut calculer sa **transformée de Fourier**.
2. si le signal étudié est discret, alors :
   - s'il est périodique : on peut calculer sa **transformée de Fourier discrète** (qui, comme son nom l'indique, est discrète ; elle est aussi périodique).
   - non périodique : on peut calculer sa **transformée de Fourier à temps discret** ; c'est un signal continu, périodique.

En particulier, on peut donc faire les observations suivantes :

- à un signal périodique, est associé un signal discret dans le domaine de Fourier (combinaison linéaire de pics de Dirac).
- à un signal discret, est associé un signal périodique dans le domaine de Fourier.

Définitions et propriétés des différentes transformées :

Coefficients de Fourier : Pour une fonction f périodique de période $a > 0$, de carré intégrable sur $[0, a]$, le coefficient de Fourier d'ordre n de f ($n \in \mathbf{Z}$), est égal à

$$c_n(f) = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) e^{-\frac{2i\pi nt}{a}} dt$$

Transformée de Fourier discrète : on considère un signal discret $\mathbf{x}$ formé de N échantillons : $\mathbf{x} = (\mathbf{x}[0], \mathbf{x}[2] \cdots \mathbf{x}[N-1])$.

La *transformée de Fourier discrète* associe à ce signal le vecteur $\mathbf{X}$, de taille N tel que

$$\forall k = 0 \cdots N-1,\ \mathbf{X}[k] = \mathrm{TFD}(\mathbf{x})[k] \quad = \quad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{x}[n] e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{x}[n]\omega_N^{-kn} \text{ où } \omega_N = e^{-\frac{2i\pi}{N}}$$

La *transformée de Fourier discrète inverse* associe quant à elle à un vecteur $\mathbf{Y}$ de taille N le vecteur $\mathbf{y}$ de taille N tel que

$$\forall k = 0 \cdots N-1,\ \mathbf{y}[k] = \mathrm{ITFD}(\mathbf{Y})[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{Y}[n] e^{\frac{2i\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} Y[n]\omega_N^{kn}$$

Ces deux transformées sont inverses l'une de l'autre, au sens où, pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de taille N, on a

$$\mathrm{ITFD}(\mathrm{TFD}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

Transformée de Fourier à temps discret On considère un signal $\mathbf{f} = (\mathbf{f}[n])_{n\in\mathbf{Z}}$. Sa *transformée de Fourier à temps discret* est définie par

$$\forall \omega,\ \mathrm{TFTD}(\mathbf{f})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \mathbf{f}[n] e^{-in\omega}$$

La transformée de Fourier à temps discret peut s'inverser avec la formule suivante :

$$\mathbf{f}[p] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{TFTD}(\mathbf{f})(\omega) e^{ip\omega} d\omega$$

De la même manière, pour un signal bidimensionnel, la transformée de Fourier à temps discret est définie par :

$$\forall \xi = (\xi_1, \xi_2),\ \mathrm{TFTD}(\mathbf{f})(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{Z}^2} \mathbf{f}[\mathbf{n}] e^{-i\xi\cdot\mathbf{n}}$$

avec la formule d'inversion

$$\mathbf{f}[\mathbf{n}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{TFTD}(\mathbf{f})(\xi) e^{i\mathbf{n}\cdot\xi} d\xi$$

Pour deux signaux discrets $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, la transformée de Fourier à temps discret de la convolution de $\mathbf{x}$ et de $\mathbf{y}$ est donnée par :

$$\mathrm{TFTD}(\mathbf{x} * \mathbf{y})(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathrm{TFTD}(\mathbf{x})(\xi)\mathrm{TFTD}(\mathbf{y})(\xi)$$

En effet, en dimension 1 par exemple, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{TFTD}(\mathbf{x} * \mathbf{y})(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k (\mathbf{x} * \mathbf{y})[k] e^{-ik\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \sum_l \mathbf{x}[l]\mathbf{y}[k-l] e^{-i(l+k-l)\omega} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_l \mathbf{x}[l] e^{-il\omega} \sum_k \mathbf{y}[k-l] e^{-i(k-l)\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_l \mathbf{x}[l] e^{-il\omega} \sum_k{}' \mathbf{y}[k'] e^{-i(k')\omega} \\
&= \sqrt{2\pi}\mathrm{TFTD}(\mathbf{x})(\omega)\mathrm{TFTD}(\mathbf{y})(\omega)
\end{aligned}$$

Transformée de Fourier Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^n)$ ($n \in \mathbf{N}^*$). On appelle *transformée de Fourier de* f la fonction $\hat{f}$ définie sur $\mathbf{R}^n$ par

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbf{R}^n, \hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

La transformée de Fourier possède les propriétés suivantes :

- si $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^n)$, $\hat{f}$ est définie sur $\mathbf{R}$, continue, et bornée.
- l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ est stable par transformée de Fourier.
- si $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^n)$, $\hat{f}$ n'appartient pas nécessairement à $\mathbf{L}^1\mathbf{R}^n$. Cependant, dans le cas où $\hat{f}$ appartient à $\mathbf{L}^1\mathbf{R}^n$, on a la formule d'inversion suivante :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}$$

- la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse sont des isométries de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ (dense dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ pour la norme induite par $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$; elles se prolongent de manière unique en des isométries de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$; on note $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ ces prolongements, qui définissent la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse sur $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$, et pour toute fonction f appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$, on a $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f$ presqque partout.

Dans ce manuscrit, nous faisons référence à plusieurs reprises aux propriétés qui suivent :

Proposition A.0.1 (Transformée de Fourier : parité et conjugaison)
Soit $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$; on peut recenser les propriétés suivantes :

- *dans le cas général, $\hat{f}(-\omega) = \widehat{f_\sigma}(\omega)$;*
- *si f est paire, alors $\hat{f}$ est paire aussi et $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}(\omega)$;*
- *si f est réelle, alors $\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$ et donc en particulier $\left|\hat{f}(-\omega)\right| = \left|\overline{\hat{f}(\omega)}\right|$.*

Proposition A.0.2 (Transformée de Fourier, dilatation et translation)
Soit $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$; les effets d'une translation et d'une dilatation sur la transformée de Fourier sont les suivants :

$$\widehat{f_{a,\mathbf{b}}}(\mathbf{k}) = a^{\frac{n}{2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}} \hat{f}(a\mathbf{k})$$

Justification :

$$\begin{aligned}
\widehat{f_{a,\mathbf{b}}}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbf{x}} f_{a,\mathbf{b}}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbf{x}} \frac{1}{\sqrt{a}^n} f\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{b}}{a}\right) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbf{u}} \frac{1}{\sqrt{a}^n} f(\mathbf{u}) e^{-i\mathbf{k}\cdot(a\mathbf{u}+\mathbf{b})} a^n d\mathbf{u} = \frac{a^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}} \int_{\mathbf{u}} f(\mathbf{u}) e^{-ia\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}} d\mathbf{u} \\
&= a^{\frac{n}{2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}} \hat{f}(a\mathbf{k})
\end{aligned}$$

■

Proposition A.0.3 (Transformée de Fourier, dilatation, translation et rotation en dimension 2)
Soit $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$; les effets d'une translation, d'une dilatation et d'une rotation sur la transformée de Fourier sont les suivants :

$$\widehat{f_{a,\mathbf{b},\theta}}(\mathbf{k}) = a^{\frac{n}{2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}} \hat{\Psi}(a\mathrm{R}_\theta\mathbf{k})$$

Justification :

$$\begin{aligned}\widehat{f_{a,\mathbf{b},\theta}}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbf{x}} f_{a,\mathbf{b},\theta}(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbf{x}}\frac{1}{\sqrt{a}^n}f\left(\frac{\mathrm{R}_{-\theta}(\mathbf{x}-\mathbf{b})}{a}\right)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbf{u}}\frac{1}{\sqrt{a}^n}f(\mathbf{u})\,e^{-i\mathbf{k}\cdot(a\mathrm{R}_{-\theta}\mathbf{u}+\mathbf{b})}a^n d\mathbf{u} = \frac{a^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}^n}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}}\int_{\mathbf{u}} f(\mathbf{u})e^{-ia\mathbf{k}\cdot\mathrm{R}_{-\theta}\mathbf{u}}d\mathbf{u}\\ &= \frac{a^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}^n}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}}\int_{\mathbf{u}} f(\mathbf{u})e^{-ia\mathrm{R}_\theta\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}}d\mathbf{u} \text{ car } \mathrm{R}_\theta^* = \mathrm{R}_{-\theta} = a^{\frac{n}{2}}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}}\hat{f}(a\mathrm{R}_\theta\mathbf{k})\end{aligned}$$

■

Proposition A.0.4 (Transformée de Fourier et convolution)
Soit f et g deux fonctions appartenant à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^n)$; alors $f*g$ est définie, appartient à $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^n)$, et sa transformée de Fourier vérifie la relation

$$\widehat{f*g} = \sqrt{2\pi}^n\hat{f}\hat{g} \tag{A.1}$$

Justification :

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int f*g(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int\int f(\mathbf{u})g(\mathbf{x}-\mathbf{u})d\mathbf{u}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int\int f(\mathbf{u})g(\mathbf{x}-\mathbf{u})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{u}d\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int\int f(\mathbf{u})g(\mathbf{v})e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})}d\mathbf{u}d\mathbf{v}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int f(\mathbf{u})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}}d\mathbf{u}\int g(\mathbf{v})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}d\mathbf{v} = \sqrt{2\pi}^n\hat{f}(\mathbf{k})\hat{g}(\mathbf{k})\end{aligned}$$

Proposition A.0.5 (Relation de Parseval)
Soit f et g deux fonctions appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$; on a la relation suivante :

$$< f, g >=< \hat{f}, \hat{g} >$$

Justification :

$$\begin{aligned}< f, g > &= \int_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n}\overline{f(\mathbf{x})}g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n}\frac{1}{(2\pi)^n}\left(\overline{\int_{\mathbf{k_1}\in\mathbf{R}^n}\hat{f}(\mathbf{k_1})e^{i\mathbf{k_1}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{k_1}}\int_{\mathbf{k_2}\in\mathbf{R}^n}\hat{g}(\mathbf{k_2})e^{i\mathbf{k_2}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{k_2}\right)d\mathbf{x}\\ = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{k_1}}\int_{\mathbf{k_2}}\overline{\hat{f}(\mathbf{k_1})}\hat{g}(\mathbf{k_2})\int_{\mathbf{x}}e^{i(\mathbf{k_2}-\mathbf{k_1})\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}d\mathbf{k_1}d\mathbf{k_2} &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{k_1}}\int_{\mathbf{k_2}}\overline{\hat{f}(\mathbf{k_1})}\hat{g}(\mathbf{k_2})\sqrt{2\pi}^n\widehat{\mathbf{1}}(\mathbf{k_2}-\mathbf{k_1})d\mathbf{k_1}d\mathbf{k_2}\\ = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{k_1}}\int_{\mathbf{k_2}}\overline{\hat{f}(\mathbf{k_1})}\hat{g}(\mathbf{k_2})(2\pi)^n\delta(\mathbf{k_2}-\mathbf{k_1})d\mathbf{k_1}d\mathbf{k_2} &= \int_{\mathbf{k_1}}\overline{\hat{f}(\mathbf{k_1})}\left(\int_{\mathbf{k_2}}\overline{\hat{g}(\mathbf{k_2})}\delta(\mathbf{k_1}-\mathbf{k_2})d\mathbf{k_2}\right)d\mathbf{k_1}\\ = \int_{\mathbf{k_1}}\overline{\hat{f}(\mathbf{k_1})}\hat{g}(\mathbf{k_1})d\mathbf{k_1} &=< \hat{f}, \hat{g} >\end{aligned}$$

Proposition A.0.6 (Transformée de Fourier et dérivation en dimension 1)
Si g appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})\cap\mathbf{L}^1(\mathbf{R})$, alors la transformée de Fourier de sa dérivée vérie la relation :

$$\widehat{g'}(\omega) = -i\omega\hat{g}(\omega) \tag{A.2}$$

Justification :

$$\widehat{g'}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g'(s)e^{-i\omega s}ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[g(s)e^{-i\omega s}]_\infty^\infty - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(s)(-i\omega)e^{-i\omega s}ds = -i\omega\hat{g}(\omega)$$

Annexe B

Fonctions spéciales

Nous recensons ici les définitions des fonctions spéciales auxquelles nous faisons référence dans ce manuscrit ; elles sont issues de [78, 89].

Les polynômes de Tchebychev

Ce sont des cas particuliers de la famille des polynômes de Gegenbauer, qui sont les polynômes orthogonaux sur $[-1,1]$ pour le poids $s \mapsto (1-s^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, pour ($\lambda \in \mathbf{N}$).

Les polynômes de Tchebychev de première espèce correspondent au cas $\lambda = 0$, et sont définis par

$$\forall s \in [-1,1],\ T_l(s) = \cos(l \arccos(s))$$

(l est le degré du polynôme).
Les polynômes de Tchebychev de seconde espèce correspondent au cas $\lambda = 1$, et sont définis par

$$\forall s \in [-1,1],\ U_m(s) = \frac{\sin((m+1)\arccos(s))}{\sin(\arccos(s))}$$

Les polynômes de Jacobi de paramètres $\alpha > -1$ et $\beta > -1$ sont les polynômes orthogonaux sur $[-1,1]$ pour le poids $s \mapsto (1-s)^\alpha (1+s)^\beta$; plus précisément, pour ces paramètres, le polynôme de Jacobi de degré n est défini par

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(s) = \frac{(-1)^n}{2^n n!(1-s)^\alpha(1+s)^\beta}\frac{d^n}{ds^n}\left((1-s)^\alpha(1+s)^\beta(1-s^2)^n\right)$$

Fonction Gamma

La fonction Γ est définie de la manière suivante :

$$\forall z \in \mathbf{R},\ \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

En particulier, pour tout entier m, on a l'égalité suivante :

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2m)!}{2^{2m}m!}\sqrt{\pi} \tag{B.1}$$

Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel de première espèce sont les fonctions qui s'expriment de la manière suivante (représentation intégrale) :

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^1 \cos(tx)(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \tag{B.2}$$

Les fonctions de Bessel permettent de calculer la transformée de Fourier des polynômes de Tchebychev : en notant $w_{-1} : s \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}$, on a

$$\widehat{(w_{-1}T_l)}(\omega) = \sqrt{2\pi} i^{-l} J_l(\omega) \tag{B.3}$$

Références

[1] F. Abramovich et B.W. Silverman. The vaguelette-wavelet decomposition approach to statistical inverse problems. *Biometrika*, 85 :115–129, 1997.

[2] J.-P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst, et S.T. Ali. *Two-dimensional wavelets and their relatives*. Cambridge University Press, 2004.

[3] A. Antoniadis, J. Bigot, et T. Sapatinas. Wavelet estimators in nonparametric regression : A comparative simulation study. *Journal of Statistical Software*, 6, 2001.

[4] C. Barat. *Palpage virtuel : une nouvelle approche morphologique pour la mise en correspondance d'objets (Pattern Matching) dans les images à niveaux de gris.* Thèse de doctorat, Université Jean Monnet, Saint-Etienne, 2004.

[5] C. Barat, C. Ducottet, A. Bilgot, et L. Desbat. Segmentation of blurred objects using wavelet transform : application to X-ray images. Dans *Wavelet Applications in Industrial Processing*, volume 5266 de *Proceedings of SPIE*, 2004.

[6] P. Barthez. Bases physiques et techniques en imagerie médicale. Ecole Vétérinaire de Lyon, Unité Pédagogique de Radiologie Imagerie Médicale.
`http ://www.vet-lyon.fr/ens/imagerie/D1/ReferentielD1.html`.

[7] C. Berenstein et D. Walnut. Local inversion of the Radon transform in even dimensions using wavelets. Dans *Proceedings of the Conference : 75 years of the Radon Transform*, pages 38–58. International Press Co, 1994.

[8] C. Berenstein et D. Walnut. Wavelets and local tomography. Dans Aldroubi et Unser, editors, *Wavelets in Medicine and Biology*, pages 231–261. CRC Press, 1996.

[9] A. Bilgot, O. Le Cadet, V. Perrier, et L. Desbat. Edge detection and classification in x-ray images - application to interventional 3d vertebra shape reconstruction. Dans *SURGETICA 2005 : Gestes médico-chirurgicaux assistés par ordinateur : outils et applications*, pages 459–467, 2005.

[10] S. Bonnet. *Approches multirésolution en reconstruction tomographique 3D : application à l'angiographie cérébrale.* Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2000.

[11] S. Bonnet, F. Peyrin, F. Turjman, et R. Prost. Tomographic reconstruction using nonseparable wavelets. *IEEE Transactions on image processing*, 9(8) :1445–1450, 2000.

[12] Site de Brainlab. `http ://www.brainlab.com/`.

[13] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 1999.

[14] M. Briane et G. Pagès. *Théorie de l'intégration (4ème édition)*. Vuibert, 2006.

[15] E.J. Candès et D.L. Donoho. Ridgelets : a key to higher-dimensional intermittency ? *Phil. Trans. R. Soc. London*, 1999.

[16] E.J. Candès et D.L. Donoho. Curvelets and reconstruction of images from noisy Radon data. Dans A. Aldroubi, A.F. Laine, et M.A. Unser, editors, *Wavelet applications in signal and image processing VIII*, numéro 4119 in Proc. SPIE, 2000.

[17] E.J. Candès et D.L. Donoho. Recovering edges in ill-posed inverse problems : optimality of curvelet frames. *Annals of Statistics*, 30 :784–842, 2000.

[18] E.J. Candès et D.L. Donoho. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise-C2 singularities. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 57 :219–266, 2002.

[19] E.J. Candès et F. Guo. New multiscale transforms, minimum total variation synthesis : applications to edge-preserving image reconstruction. *Signal Processing*, 82(11) :1519–1543, 2002.

[20] A. Caponnetto et M. Bertero. Tomography with a finite set of projections : singular value decomposition and resolution. *Inverse Problems*, 13 :1191–1205, 1997.

[21] Site du Conseil des Enseignants de Radiologie de France (CERF). `http ://www.med.univ-rennes1.fr/cerf/edicerf/.`

[22] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, et M. Barlaud. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(2) :298–311, 1997.

[23] P.G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Dunod, 1998.

[24] J.P. Cocquerez et S. Philipp. *Analyse d'images : filtrage et segmentation*. Masson, 1995.

[25] T.F. Cootes, C.J. Taylor, D.H. Cooper, et J. Graham. Training models of shape from sets of examples. Dans *Proceedings of British Machine Vision Conference, Berlin.* Springer, 1992.

[26] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, 1992.

[27] M.E. Davison. A singular value decomposition for the Radon transform in n-dimensional euclidean space. *Numer. Funct. Anal. and Optimization*, 1981.

[28] M. Defrise, F. Noo, R. Clackdoyle, et H. Kudo. Truncated Hilbert transform and image reconstruction from limited tomographic data. *Inverse problems*, 22 :1037–1053, 2006.

[29] A.H. Delaney et Y. Bresler. Multiresolution tomographic reconstruction using wavelets. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(6) :799–813, 1995.

[30] L. Desbat. *Echantillonnage efficace en tomographie*. Habilitation à diriger des recherches, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 1997.

[31] L. Desbat, M. Fleute, M. Defrise, X. Liu, C. Huberson, R. Laouar, R. Martin, J.-H. Guillou, et S. Lavallée. Minimally invasive interventional imaging for computer assisted orthopaedic surgery. Dans *Computer-Aided Medical Interventions : tools and applications*. Sauramps médical, 2002.

[32] D.L. Donoho. Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition. *Applied and Computational Harmonic Analysis 2*, 1995.

[33] D.L. Donoho. Orthonormal ridgelets and linear singularities. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 31(5) :1062–1099, 2000.

[34] C. Dossal. *Estimation de fonctions géométriques et déconvolution*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 2005.

[35] E. Euler, S. Heining, C. Riquarts, et W. Mutschler. C-arm-based three-dimensional navigation : a preliminary feasibility study. *Computer Aided Surgery*, pages 35–41, 2003.

[36] A. Faridani. Introduction to the mathematics of computed tomography. *Inverse Problems and Applications*, 47 :1–46, 2003.

[37] A. Faridani, K.A. Buglione, P. Huabsomboon, O.D. Iancu, et J. McGrath. Introduction to local tomography. Dans E.T. Quinto *et al.*, editor, *Radon Transforms and Tomography*, volume 278 de *Contemporary Mathematics*, pages 29–47. American Mathematical Society, 2001.

[38] A. Faridani, D.V. Finch, E.L. Ritman, et K.T. Smith. Local tomography II. *SIAM J. Appl. Math.*, 57(4) :1095–1127, August 1997.

[39] A. Faridani et E. Ritman. High resolution computed tomography from efficient sampling. *Inverse Problems*, 16 :635–650, 2000.

[40] A. Faridani, E.L. Ritman, et K.T. Smith. Local tomography. *SIAM J. Appl. Math.*, 52(2) :459–484, April 1992.

[41] M. Fleute. *Shape reconstruction for computer assisted surgery based on non-rigid registration of statistical models with intra-operative point data and X-ray images*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 2001.

[42] M. Fleute et S. Lavallée. Nonrigid 3-d/2-d registration of images using statistical models. Dans C. Taylor et A. Colchester, editors, *MICCAI*. Springer-Verlag, 1999.

[43] M. Fleute, S. Lavallée, et L. Desbat. Integrated approach for matching statistical shape models with intra-operative 2D and 3D data. Dans T. Dohi et R. Kikinis, editors, *MICCAI*. Springer-Verlag, 2002.

[44] K.T. Foley, K.G. Sanjay, J.R. Justis, et M.C. Sherman. Percutaneous pedicle screw fixation of the lumbar spine. *Neurosurg. Focus*, 10(4), 2001.

[45] C. Gasquet et P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications*. Dunod, 2000.

[46] A. Gueziec, P. Kazanzides, Williamson B., et R. H. Taylor. Anatomy-based registration of ct-scan and intraoperative x-ray images for guiding a surgical robot. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 17(5) :715–728, 1998.

[47] N. Haberland et K. Ebmeier *et al.* Incorporation of intraoperative computerized tomography in a newly developed spinal navigation technique. *Computer Aided Surgery*, 5 :18–27, 2000.

[48] A. Hamadeh. *Une approche unifiée pour la segmentation et la mise en correspondance 3D/2D d'images multimodales*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997.

[49] A. Hamadeh, S. Lavallée, et P. Cinquin. Automated 3D dimensional computed tomographic and fluoroscopic image registration. *Computer Aided Surgery*, pages 11–19, 1998.

[50] R. Hofstetter, M. Slomczykowski, M. Sati, et L.-P. Nolte. Fluoroscopy as an imaging means for computer-assisted surgical navigation. *Computer-Aided Surgery*, 4 :65–76, 1999.

[51] L.T. Holly. Image-guided spinal surgery. *The international Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery*, 2 :7–15, 2006.

[52] M. Holschneider. Inverse Radon transforms through inverse wavelet transforms. *Inverse Problems*, 7 :853–861, 1991.

[53] R.P. Horaud et O. Monga. *Vision par ordinateur : outils fondamentaux*. Editions Hermès, Paris, 1995. `http ://perception.inrialpes.fr/Publications/1995/HM95`.

[54] M.S. Joshi. Lectures on pseudo-differential operators. Université de Cambridge, 1999. `http ://arxiv.org/abs/math.AP/9906155`.

[55] A.C. Kak et M. Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. Society of Industrial and Applied Mathematics, 2001. `http ://www.slaney.org/pct/`.

[56] M. Kass, A. Witkin, et D. Terzopoulos. Snakes : Active contours models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4), 1987.

[57] A.I. Katsevich. Theoretically exact filtered back-projection type inversion algorithm for spiral CT. *SIAM*, 62 :2012–26, 2002.

[58] A.I. Katsevich et A.G. Ramm. Pseudolocal tomography. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 56(1) :167–191, 1996.

[59] E.D. Kolaczyk. *Wavelet methods for the inversion of certain homogeneous linear operators in the presence of noisy data*. Thèse de doctorat, Department of Statistics, Stanford University, 1994.

[60] E.D. Kolaczyk. An application of wavelet shrinkage to tomography. Dans Aldroubi et Unser, editors, *Wavelets in Medicine and Biology*. CRC Press, 1996.

[61] J.S. Krohmer. Radiography and fluoroscopy, 1920 to the present. *RadioGraphics*, 9(6), 1989.

[62] M. Kunt, G. Granlund, et M. Kocher. *Traitement numérique des images*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1993.

[63] S. Lavallée, P. Sautot, J. Troccaz, P. Cinquin, et P. Merloz. Computer-assisted spine surgery : a technique for accurate transpedicular screw fixation using CT data and a 3D optical localizer. *Journal of Guided Surgery*, pages 65–73, 1995.

[64] S. Lavallée, J. Troccaz, et P. Sautot *et al.* Computer-assisted spine surgery using anatomy-based registration. Dans R. Taylor, S. Lavallée, G. Burdea, et R. Mosges, editors, *Computer Integrated Surgery*, pages 425–499. MIT Press, 1996.

[65] O. Le Cadet. *Méthodes d'ondelettes pour la segmentation d'images. Applications à l'imagerie médicale et au tatouage d'images.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.

[66] J.-C. Le Huec et J.-L. Husson, editors. *Chirurgie endoscopique et mini-invasive du rachis*. Sauramps Medical, 1999.

[67] E. Le Pennec. *Bandelettes et représentations géométriques des images*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 2002.

[68] S. Mallat. *Une Exploration des Signaux en Ondelettes*. Les Editions de l'Ecole Polytechnique. Ellipses, 2000.

[69] S. Mallat et W.L. Hwang. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Trans. Information Theory*, 38(2), 1992.

[70] S. Mallat et S. Zhong. Characterization of signals from multiscale edges. *IEEE Trans. Patt. Anal. and Mach. Intell.*, 14(7), 1992.

[71] P. Maréchal. An introduction to the theory of linear inverse problems and its applications. Notes de cours du CEMRACS, 2002.

[72] P. Maréchal, D. Mariano-Goulart, L. Giraud, et S. Gratton. Towards automatic selection of the regularization parameters in emission tomography by Fourier synthesis. Dans *Computer Vision and Mathematical Methods in Medical and Biomedical Image Analysis*, pages 64–74. Springer Berlin, Heidelberg, 2004.

[73] Site de Medtronic. `http ://www.medtronic.com/`.

[74] P. Merloz, C. Huberson, J. Tonetti, H. Vouillat, A. Eid, et S. Plaweski. Importance of ergonomics and efficiency for computer-assisted spine surgery. Clinical results 1999-2003. Dans *Computer-Aided Medical Interventions : tools and applications. Surgetica'2005*. Sauramps médical, 2005.

[75] P. Merloz et J. Tonetti *et al.* Computer-assisted spine surgery. *Computer Aided Surgery*, 3 :297 :305, 1998.

[76] P. Merloz *et al.* Surgical navigation for spine : CT virtual imagery versus virtual fluoroscopy. Dans *Computer-Aided Medical Interventions : tools and applications. Surgetica'2002*. Sauramps médical, 2002.

[77] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs* II. Hermann, 1990.

[78] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Classics in Applied Mathematics. SIAM, 2001.

[79] L.P. Nolte, H. Visarius, E. Arm, F. Langlotz, O. Schwarzenbach, et L. Zamorano. Computer-aided fixation of spinal implants. *Journal of Image Guided Surgery*, 1(2) :88–93, 1995.

[80] F. Noo, R. Clackdoyle, et J.D. Pack. A two-step Hilbert transform method for 2D image reconstruction. *Physics in Medicine and Biology*, 49 :3903–3923, 2004.

[81] T. Olson et J. DeStefano. Wavelet localization of the Radon transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42 (8) :2055–2067, 1994.

[82] J.D. Pack et F. Noo. Cone-beam reconstruction using 1D filtering along the projection of M-lines. *Inverse Problems*, 21(3) :1105–1120, 2005.

[83] F. Peyrin, M. Zaim, et R. Goutte. Construction of wavelet decomposition for tomographic images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, pages 105–121, 1993.

[84] G. Peyré. *Géométrie multi-échelles pour les images et les textures*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 2005.

[85] Site de Praxim. `http ://www.praxim.fr/`.

[86] W.H. Press *et al. Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1988.

[87] J.-L. Prince et C. Xu. Snakes, shapes and gradient vector flow. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3), 1998.

[88] E.T. Quinto. Singularities of the X-ray transform and limited data tomography in $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$. *SIAM J. Math. Anal.*, 24 :1215–1225, 1993.

[89] A.G. Ramm et A.I. Katsevich. *The Radon Transform and Local Tomography*. CRC Press, 1996.

[90] F. Rashid Farrokhi, K.J. Ray Liu, C. Berenstein, et D. Walnut. Wavelet-based multiresolution local tomography. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(10) :1412–1429, 1997.

[91] P.A. Rattey et A.G. Lindgreen. Sampling the 2D Radon transform. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 29 :994–1002, 1981.

[92] R. Roy-Camille et G. Saillant. *Le Rachis - Aspects fondamentaux, explorations, techniques*. Masson, 1995.

[93] N. Schep, I. Broeders, et C. Van Der Werken. Computer assisted orthopaedic and trauma surgery. State of art and future perspectives. *Injury, International journal of the care of the injured*, 34 :299–306, 2003.

[94] D. Schlenzka, T. Laine, et T. Lund. Computer-assisted spine surgery. *European Spine Journal*, 9 (suppl 1) :57–64, 2000.

[95] L.A. Shepp et B.F. Logan. The Fourier reconstruction of a head section. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, NS-21 :21–43, 1974.

[96] Site de Siemens (applications médicales). `http ://www.medical.siemens.com/`.

[97] L. Soler, N. Ayache, S. Nicolau, X. Pennec, C. Forest, H. Delingette, et J. Marescaux. Traitement d'images médicales pour la planification, la simulation et l'aide intra-opératoire des actes chirurgicaux. *La Revue de l'Electricité et de l'Electronique*, pages 64–71, janvier 2004.

[98] Sport et anatomie. `http ://bruno.chauzi.free.fr/`.

[99] Site de vulgarisation et de communication scientifique sur la surgétique. `http ://www.surgetics.org/`.

[100] Documents de travail médicaux du TASPAAT (Ontario). `http ://www.wsiat.on.ca/french/resources/medical/mlo/findex.htm`.

[101] J. Tonetti. *Réalisation d'outils de réalité augmentée. Apprentissage, simulation et guidage de gestes en chirurgie du bassin.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 2003.

[102] B. Torrésani. *Analyse continue par ondelettes*. InterÉditions - CNRS Editions, 1995.

[103] F. Truchetet. *Ondelettes pour le signal numérique*. Hermès, 1998.

[104] H.K. Tuy. An inversion formula for cone-beam reconstruction. *SIAM J. Appl. Math.*, 43(3) :546–552, 1983.

[105] M. Unser. Sampling - 50 years after Shannon. *Proceedings of the IEEE*, 88(4) :569–587, 2000.

[106] E. Van de Kraats. *3D rotational X-Ray guidance for surgical interventions*. Thèse de doctorat, Image Sciences Institute, University Medical Center Utrecht, 2005.

[107] D. Walnut. Applications of Gabor and Wavelet expansions to the Radon transform. Dans J.S. Byrnes *et al.*, editor, *Probabilistic and Stochastic Methods in Analysis with Applications*, pages 187–205. Kluwer Academic Publishers, 1992.

[108] D. Walnut. Local inversion of the Radon transform in the plane using wavelets. Dans *Mathematical Imaging*, volume 2034 de *SPIE*, pages 84–90, 1993.

[109] S. Webb. *The physics of medical imaging*. IOP Publishing Ltd, 1988.

[110] D. Winkler, H.-E. Vitzhum, et V. Seifert. Spinal markers : a new method for increasing accuracy in spinal navigation. *Computer Aided Surgery*, 1999.