

Multirésolution en Modélisation Géométrique

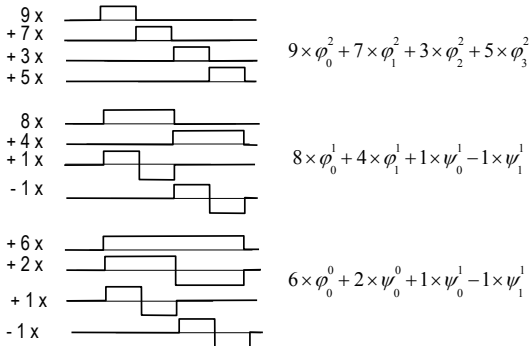
Stefanie Hahmann, LMC-IMAG

- Ondelettes de Haar
- Cadre général de l'Analyse MR
- Courbes de subdivision uniforme, ex. de courbes MR
- Courbes MR
- Surfaces MR

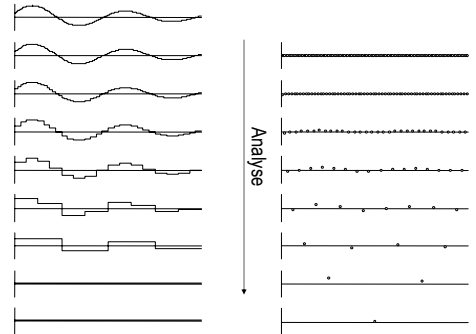
Ondelettes de Haar: Analyse/Synthèse

Données de départ:		9	7	3	5	
Synthèse/Reconstruction	Moyennage	8		4		
	Différence avec la moyenne	1		-1		
	Moyennage	6				
	Différence avec la moyenne	2				
		Résolution	Approximation		Détails	
		2	9 7 3 5			
	1	8 4		1 -1		
	0	6		2		
Données transformées:		6	2	1	-1	
		Analyse/Décomposition				

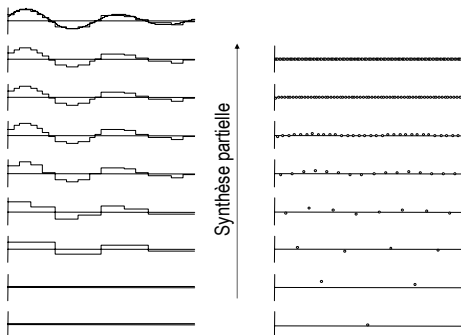
Ondelettes de Haar: fonctions de base



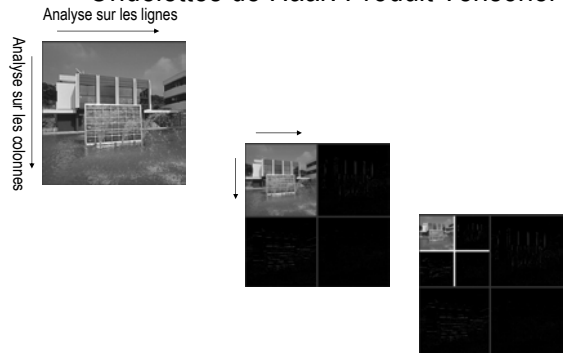
Ondelettes de Haar: Approximation



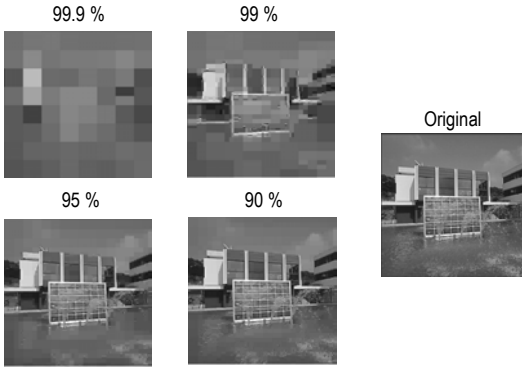
Ondelettes de Haar: Approximation



Ondelettes de Haar: Produit Tensoriel

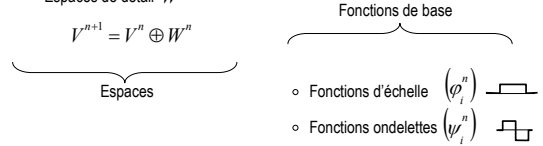


Reconstruction progressive



Cadre général de l'Analyse MR

- Espace de fonctions E
- Sous-espaces d'approximation V^n
- $V^n \subset V^{n+1}$
- Espaces de détail W^n



Équations de changement d'échelle

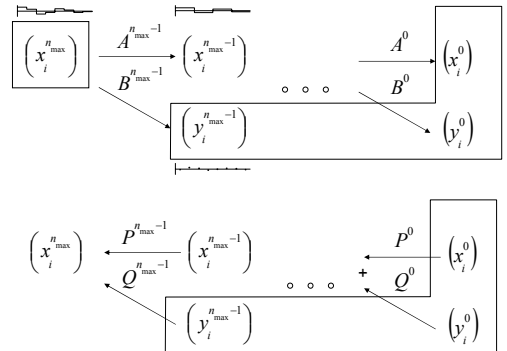
•Liens entre les fonctions échelles et les fonctions ondelettes de résolution successives

$$\begin{aligned}
 (\phi_i^n) &= [{}^t P^n] (\phi_i^{n+1}) & \text{⏟} &= \text{⏟} + \text{⏟} \\
 (\psi_i^n) &= [{}^t Q^n] (\phi_i^{n+1}) & \text{⏟} &= \text{⏟} - \text{⏟} \\
 (\phi_i^{n+1}) &= [{}^t A^n] (\phi_i^n) + [{}^t B^n] (\psi_i^n) & \text{⏟} &= 2 \times \text{⏟} - \text{⏟}
 \end{aligned}$$

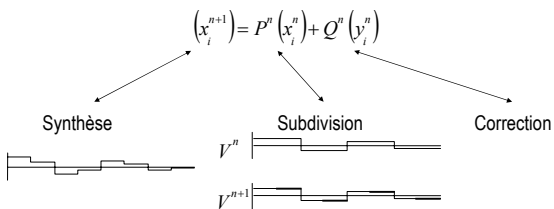
•Condition de reconstruction

$$[{}^t P^n \quad {}^t Q^n] \begin{bmatrix} A^n \\ B^n \end{bmatrix} = I$$

Analyse/Synthèse



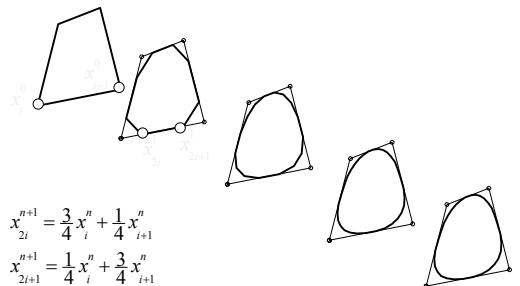
Synthèse = Subdivision + Correction



•Applications en géométrie: la subdivision doit converger vers des formes lisses

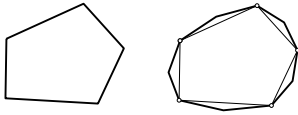
Courbes de subdivision uniforme

Ex I: Chaikin (74)



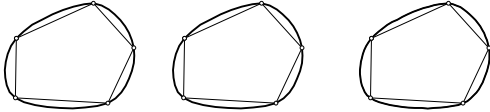
Courbes de subdivision uniforme

Ex II: Dyn, Levin, Gregory (83)



$$x_{2i}^{n+1} = x_i^n$$

$$x_{2i+1}^{n+1} = -\frac{1}{16}x_{i-1}^n + \frac{9}{16}x_i^n + \frac{9}{16}x_{i+1}^n - \frac{1}{16}x_{i+2}^n$$



Courbes de subdivision uniforme

Cas général:

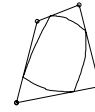
$$x_{2i}^{n+1} = \sum a_j x_{i+j}^n$$

$$x_{2i+1}^{n+1} = \sum b_j x_{i+j}^n$$

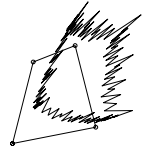
Pbm: Étude de la convergence



Convergence C1



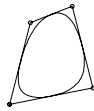
Convergence C0



Divergence

Chaikin: espaces d'approximation

V^0 Ensemble des courbes obtenues en partant de 4 points



V^1 Ensemble des courbes obtenues en partant de 8 points



V^n Ensemble des courbes obtenues en partant de $2^n(n+2)$ points

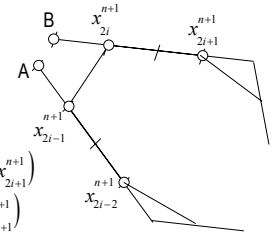
Chaikin: Analyse

$$x_i^n = \frac{A+B}{2}$$

$$y_i^n = \frac{B-A}{2}$$

$$x_i^n = \frac{1}{4}(-x_{2i-2}^{n+1} + 3x_{2i-1}^{n+1} + 3x_{2i}^{n+1} - x_{2i+1}^{n+1})$$

$$y_i^n = \frac{1}{4}(x_{2i-2}^{n+1} - 3x_{2i-1}^{n+1} + 3x_{2i}^{n+1} - x_{2i+1}^{n+1})$$



•Subdivision exacte $\Rightarrow A=B$
 \Rightarrow détail = 0

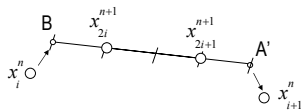
Chaikin: Synthèse

$$B = x_i^n + y_i^n$$

$$A = x_{i+1}^n - y_{i+1}^n$$

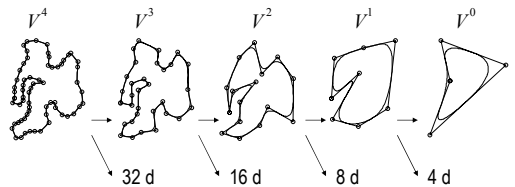
$$x_{2i}^{n+1} = \frac{3}{4}(x_i^n + y_i^n) + \frac{1}{4}(x_{i+1}^n - y_{i+1}^n)$$

$$x_{2i+1}^{n+1} = \frac{1}{4}(x_i^n + y_i^n) + \frac{3}{4}(x_{i+1}^n - y_{i+1}^n)$$



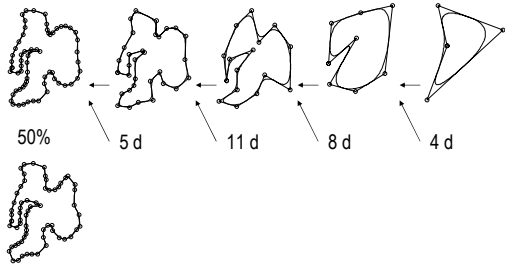
•Subdivision+Correction

Chaikin: exemple d'analyse



Chaikin: exemple d'approximation

Reconstruction en utilisant les coefficients de détail de norme > 1.6

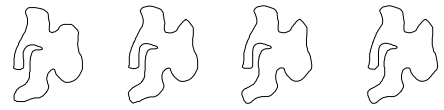


Reconstruction progressive

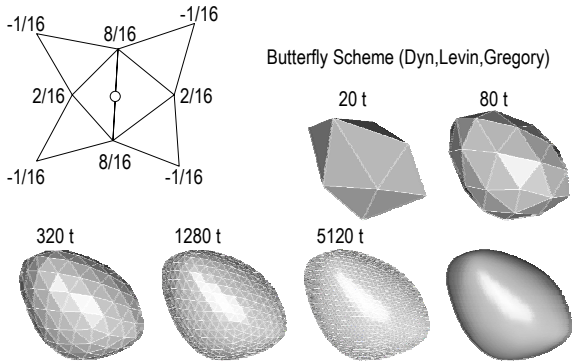
Seuil	15	10	5	3	1.6
#détail	4	5	10	16	32
%coeff	6.25%	7.81%	15.62%	25%	50%



1	0.5	0.1	0
40	48	62	64
62.5%	75%	96.88%	100%



Surfaces de subdivision uniforme



Courbes de subdivision non uniforme

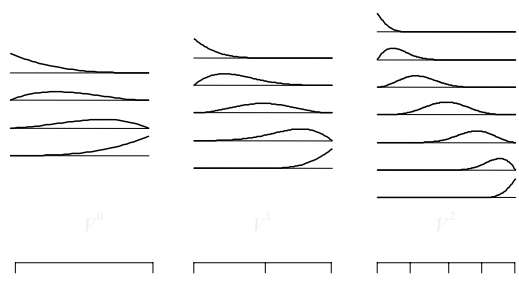
- Insertion récurrente de nœuds dans l'intervalle de définition



• degré d => $r^d \cdot 2^d + d$ points de contrôle

Fonctions échelles

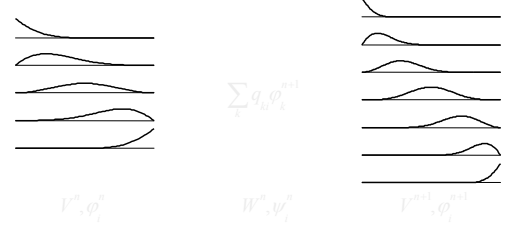
- Fonctions échelles cubiques



Fonctions ondelettes

• Semi-orthogonalité: $r^{m+1} = r^m \oplus r^m$

=> meilleure approximation entre r^{m+1} et r^m



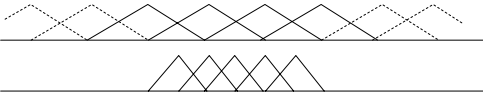
Fonctions ondelettes

$$v_i = \sum_j a_j \phi_j^{(i)}$$

Inconnues: a_j
 $\langle v_i | \phi_j \rangle = 0$: conditions linéaires en les inconnues

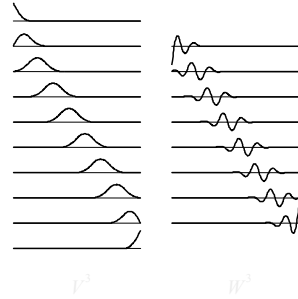
• Quand on augmente le nombre d'inconnues, le nombre d'équations augmente moins vite => existence de solutions

• Recherche de la solution de support minimal



Fonctions ondelettes

• Degré 2, niveau 3 de subdivision



Exemple de reconstruction partielle

