Institut National Polytechnique de Grenoble

CYCLE PRÉPARATOIRE POLYTECHNIQUE

INTRODUCTION À LA THÉORIE DE LA MESURE ET DE L'INTÉGRATION

NOTES DE COURS ET EXERCICES

ANNÉE 2009

Maryse BÉGUIN
Maryse.Beguin@imag.fr

Introduction

L'activité scientifique conduit à la nécessité de mesurer des grandeurs concrètes des longueurs, des surfaces ou volumes, mais aussi des objets plus abstraits, des faits, des événements. Cela consiste à faire correspondre un nombre appelé mesure à un ensemble que l'on désire mesurer, ce nombre devant vérifier quelques propriétés de cohérence.
L'objet de la théorie de la mesure et de l'intégration est d'établir un modèle mathématique général pour la notion de mesure et ses conséquences, notamment la définition de l'intégrale d'une fonction par rapport à une mesure, qui permet de généraliser la notion de somme de fonction de valeurs variables pondérées selon la valeur de ces variables. Ceci généralise la notion déjà acquise d'intégrale et fournit un outil mathématique de base pour l'ingénieur dans ses activités de calcul et de modélisation.
Ce cours n'est qu'un survol de cette théorie et n'en constitue que l'essentiel utile dans les applications, la plus importante étant celle du calcul des probabilités. C'est la raison pour laquelle cette théorie sera introduite ou justifiée par le biais de la définition du modèle probabiliste, qui en exprime toute la nécessité.

Dans le cadre des cours dispensés au CPP l'objectif de ce cours est d'initier les élèves la construction d'une théorie conceptuelle presqu'entièrement démontrée à l'exception de deux théorèmes difficiles, avec des outils leur porte, et qui permet de rsoudre la problmatique donne au dpart. Au del des rsultats qui leur serviront ou non dans leur vie d'tudiants ou professionnelle la dmarche qui consiste poser une problmatique, construire des outils et des symboliques qui prennent un sens et qui grce aux rgles de cohrence des mathmatiques permettent de rsoudre de faon simple un problème compliqué est une dmarche générique qui constitue le quotidien d'un ingnieur. Faire des mathématiques, c'est l'art d'être intelligemment fainéant et e cours fournit l'occasion d'en faire un apprentissage avec des applications concrètes en probabilités. Cette initiation permet donc aux élèves de confirmer ou d'infirmer leur goût pour la démarche conceptuelle.

Chapitre 1

Introduction aux probabilités comme mesure du hasard

1.1 L'espace fondamental des probabilités

1.1.1 Espaces probabilisables

Éventualités

Dans une expérience ou une situation gouvernée par le hasard, on considère l'ensemble Ω de toutes les éventualités possibles pour le caractère auquel on s'intéresse.
Exemple 1 :
On lance un dé et on lit le chiffre lu sur la face supérieure.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} .$$

On lance deux dés, le résultat est un couple $\omega = (i,j)$,

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2 .$$

Si l'on s'intéresse à la somme des chiffres lus,

$$\Omega = \{2,3,\dots,12\} .$$

Exemple 2 :
On souhaite compter le nombre de pannes d'un appareil pendant une période donnée. On ne sait pas borner, *a priori*, ce nombre.

$$\Omega = \mathbb{N}.$$

Exemple 3 :
On souhaite mesurer la durée de bon fonctionnement d'un appareil.

$$\Omega = \mathbb{R}_+.$$

Exemple 4 :
On souhaite regarder le tracé d'un électro-encéphalogramme sur une période de temps donnée.

$$\Omega = \mathcal{C}[0,T].$$

Jeu de pile ou face répété indéfiniment.

$$\Omega = \{0;1\}^{\mathbb{N}},$$

À la i-ème expérience,

$$\Omega_i = \{0;1\}.$$

Remarquons que Ω résulte d'un choix délibéré et constitue un compromis entre la finesse de description du phénomène observé et la lourdeur mathématique du modèle.

Événements

Un événement est un ensemble d'éventualités. On peut donc le représenter par un sous-ensemble A de Ω. On dit que A se réalise dans l'éventualité ω si $\omega \in A$.
On dit que "A implique B" si $A \subset B$ car dans ce cas, $\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$.
Exemple : Dans le cas d'un dé, "le chiffre lu est pair" est un événement représenté par l'ensemble $\{2,4,6\}$.
Le plus souvent les événements qui nous intéressent sont caractérisés par une propriété que vérifient certaines éventualités.

Conséquences :

- Ω est un événement qui se réalise dans toutes les éventualités.
- $\emptyset$ est un événement qui ne se réalise jamais.
- A^c est l'événement contraire de A.
- $A \cap B$ représente la conjonction des événements A et B.
  si $A \cap B = \emptyset$, A et B sont dits incompatibles.
- $A \cup B$ se réalise quand l'un ou l'autre au moins des événements A ou B se réalise.
- Dans le jeu de pile ou face, si A_i est un événement de Ω_i

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \text{ est un événement signifiant de } \Omega \quad .$$

Dans toute la suite, $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de Ω. Si Ω est fini ou dénombrable, $\mathcal{P}(\Omega)$ représente tous les événements possibles. Lorsque Ω n'est pas fini ou dénombrable, $\mathcal{P}(\Omega)$ est une famille beaucoup trop riche, car elle contient des ensembles qui représentent des événements auxquels on ne peut s'intéresser, car on ne dispose pas des moyens pour les observer. On se restreint donc souvent à une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, qui doit vérifier certaines propriétés de stabilité.

Définition 1 *On appelle "tribu d'événements sur Ω" toute partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ telle que :*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.
3. $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$

Le couple $(\Omega,\mathcal{A})$ s'appelle "espace probabilisable" ou "espace mesurable".

Exemples de tribus

1. La plus petite : $\{\emptyset,\Omega\}$ appelée "tribu triviale".
2. La plus grande : $\mathcal{P}(\Omega)$.
3. La plus petite qui contienne un événement A donné : $\{\emptyset,A,A^c,\Omega\}$.

Propriétés des tribus

$$\emptyset \in \mathcal{A} \text{ car } \emptyset = \Omega^c \,.$$

$$A,B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$$

$$A,B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \triangle B \in \mathcal{A} \,.$$

$$\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A} \text{ car } \left(\bigcap_{n\geq 1} A_n^c\right)^c = \bigcup_{n\geq 1} A_n \,.$$

$$\liminf_n A_n = A_* = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k \in \mathcal{A}$$

$$\limsup_n A_n = A^* = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k \in \mathcal{A}$$

(Voir l'interprétation de ces ensembles en exercice).

Remarque : Le plus souvent, on impose que $\mathcal{A}$ contienne une famille donnée d'événements.

Définition 2 *Soit $\mathcal{F}$ une famille non vide de parties de Ω. On appelle "tribu engendrée par $\mathcal{F}$" la plus petite tribu $\sigma(\mathcal{F})$, contenant $\mathcal{F}$.*

Comme l'intersection de deux tribus est une tribu, on montrera que $\sigma(\mathcal{F})$ est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{F}$.

Remarque : La réunion de deux tribus n'est en général pas une tribu.

Dans le cadre de ce cours, la tribu d'intérêt est la tribu sur $\mathbb{R}$.

Définition 3 *On appelle "tribu borélienne" de $\mathbb{R}$ (E. Borel 1871-1956) et on note $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ou $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu engendrée par la famille des intervalles*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma\{\ [a,b],[a,b[,]a,b],]a,b[\ ;\ a\ \in\ \mathbb{R}\ ,b\ \in\ \mathbb{R}\ \}\ ,$$

et "tribu borélienne sur $\mathbb{R}^k$" celle engendrée par les produits d'intervalles

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^k} = \sigma\{\ \prod_{i=1}^{k}(a_i,b_i)\ ;\ a_i\ \in\ \mathbb{R}\ ,b_i\ \in\ \mathbb{R}\ \}\ ,$$

Ce sont les tribus usuelles sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^k$. Elles seront revues ultérieurement à la définition 7.

En pratique, si Ω est fini ou dénombrable on considère $\mathcal{P}(\Omega)$ comme tribu usuelle.

1.1.2 Probabilités, espaces probabilisés

Définition d'une probabilité

Définition 4 *Ayant choisi Ω et $\mathcal{A}$, on appelle "probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$", toute application $\mathbb{P}\ :\ \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$, vérifiant :*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. *si $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ est une collection finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, et si $\forall\, i \neq j$ on a $A_i \cap A_j = \emptyset$ alors :*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\ .$$

Le triplet $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ s'appelle "espace probabilisé" ou "espace fondamental".

Exemple des éventualités équiprobables

Supposons Ω fini, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, et $\forall\, \omega, \omega'\ \in\ \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{\omega'\})$. Alors, comme

$$\Omega = \bigcup_{\omega\,\in\,\Omega} \{\omega\}, \text{ et } \mathbb{P}(\Omega) = 1\ ,$$

On obtient,

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{Card(\Omega)} \quad \text{et} \quad \forall\, A \subset \Omega\ ,\ \mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}\ .$$

Ceci correspond par exemple au lancer d'un dé.

Espaces probabilisés discrets

Si Ω est fini ou dénombrable, toute probabilité est entièrement définie par la donnée des probabilités des événements élémentaires réduits à une seule éventualité : $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$. Alors

$$\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1 \quad \text{et} \quad A \in \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega \; .$$

exemple : La probabilité de Poisson est définie sur $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ par :

$$\forall\, n \geq 0\,;\; \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \text{ où } \lambda \text{ est un paramètre réel} \geq 0 \; .$$

Propriétés élémentaires des probabilités

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. $A,B \in \mathcal{A}$, alors $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$.
4. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
5. Si $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ est une famille croissante (*i.e.* $A_n \subset A_{n+1}$) d'éléments de $\mathcal{A}$, on a la propriété dite de monotonie croissante :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \; .$$
6. On a la propriété de monotonie décroissante : Si $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ est une famille décroissante (*i.e.* $A_n \supset A_{n+1}$),
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \; .$$

Démonstration

Les propriétés 1), 2) et 3) sont aisées à démontrer.

4) Posons $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$, et $B_1 = A_1$. Alors les B_k sont deux à deux disjoints et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) \; , \\ &= \quad \mathbb{P}(A_1) + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} [\mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \; .\end{aligned}$$

5) Pour la propriété de monotonie décroissante, prendre $C_n = \Omega \setminus A_n$ et appliquer ce qui précède. ∎

Nous allons généraliser cette approche dans laquelle la probabilité est une mesure particulière pour l'étendre et construire d'autres types de mesures. C'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Espaces et Applications mesurables

2.1 Espaces mesurables

2.1.1 Familles particulières de parties d'un ensemble

Soit E un ensemble quelconque non vide et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Définition 5 *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille non vide de parties de E. On dit que :*

1. *$\mathcal{A}$ est une algèbre (booléenne) sur E (ou un clan sur E) si*
   (a) $E \in \mathcal{A}$.
   (b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.
   (c) $A,B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.
2. *$\mathcal{A}$ est une σ-algèbre ou tribu ou un σ-clan sur E si*
   (a) *$\mathcal{A}$ est une algèbre ou un clan.*
   (b) $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

On dit alors que $(E,\mathcal{A})$ est un **espace mesurable**.

Propriétés : Les algèbres et les tribus possèdent les propriétés suivantes :

1. Si $\mathcal{A}$ est une algèbre, alors :
   (a) $\mathcal{A}$ est stable par réunions finies (récurrence)
   (b) $\mathcal{A}$ est stable par intersections finies, différences et différences symétriques.
2. Si $\mathcal{A}$ est une tribu, alors de plus, $\mathcal{A}$ est stable pour les mêmes opérations sur des familles dénombrables d'éléments de $\mathcal{A}$ et pour $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$.
3. Si E est fini, toute algèbre sur E est une tribu.

Proposition 1 *L'intersection $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ de deux tribus sur E est une tribu sur E.*

Exemples de tribus :
$\{\emptyset,E\}$, $\{\emptyset,A,A^cE\}$, $\mathcal{P}(E)$.

Définition 6 *Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. On appelle* **tribu engendrée par** $\mathcal{F}$*, et on note $\sigma(\mathcal{F})$, la plus petite tribu contenant $\mathcal{F}$.*

Proposition 2 *On a*

$$\sigma(\sigma(\mathcal{F})) = \sigma(\mathcal{F}) \quad .$$

Proposition 3 *On a*

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \Rightarrow \sigma(\mathcal{F}_1) \subset \sigma(\mathcal{F}_2) \; .$$

Proposition 4 *On a*

$$\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{T} \text{ où } \mathcal{T} = \bigcap_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_i} \mathcal{T}_i \text{ où } \mathcal{T}_i \text{ tribu} \; .$$

La tribu engendrée est donc aussi l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{F}$.

Définition 7 *On appelle* **tribu borélienne de** $\mathbb{R}$ *la tribu* $\sigma(\mathcal{I})$ *sur* $\mathbb{R}$ *où* $\mathcal{I}$ *désigne la famille de tous les intervalles :* $]a,b[,[a,b],]a,b],[a,b[$*, avec la convention :* $]a,a[\; = \; \emptyset$ *et* $[a,a] \; = \; \{a\}$.

Théorème 1 *on a aussi*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{I}_o) = \sigma(\mathcal{I}_d) = \sigma(\mathcal{D}_d) = \sigma\left(\mathcal{O}(\mathbb{R})\right)$$

où :
$\mathcal{I}_o = \left\{]a,b[\; ; \; (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
$\mathcal{I}_d = \left\{]a,b] \; ; \; (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
$\mathcal{D}_d = \{]-\infty,a] \; ; \; a \in \mathbb{R}\}$.
$\mathcal{O}(\mathbb{R})$ *= ensemble des ouverts de* $\mathbb{R}$ *pour la topologie habituelle de* $\mathbb{R}$.

Démonstration

À titre d'exemple, démontrons que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{I}_o) = \sigma\left(\mathcal{O}(\mathbb{R})\right)$. On a évidemment $\mathcal{I}_o \subset \mathcal{I}$ donc $\sigma(\mathcal{I}_o) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
On a :

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{+\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[\quad \text{et} \quad]a,b] = \bigcap_{n=1}^{+\infty}]a, b + \frac{1}{n}[\; ,$$

Donc

$$\mathcal{I} \subset \sigma(\mathcal{I}_o) \text{ donc } \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{I}_o) \; .$$

De plus, tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme la réunion dénombrable d'intervalles ouverts donc $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma\left(\mathcal{O}(\mathbb{R})\right)$. ■

Remarque : Il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas boréliens mais ils sont très difficiles à construire et à expliciter! De tels ensembles ne seront donc pas vus dans le cadre de ce cours.

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ apparait comme la tribu engendrée par plusieurs familles d'intervalles. L'une d'elles est-elle plus importante que les autres et peut-elle suffire à définir une mesure? Quelles propriétés doit-elle vérifier? C'est l'objet de la définition suivante dont la justification sera vue au théorème 6.

Définition 8 *Soit $\mathcal{S}$ une famille de parties de E. On dit que $\mathcal{S}$ est* **un semi-anneau booléen de parties de** E *si*

1. $\emptyset \in S$
2. $A,B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$.
3. *si $A \in \mathcal{S}$ et $B \in \mathcal{S}$ avec $B \subset A$, alors*

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad avec \quad A_i \in \mathcal{S}\,,\, i = 1,\ldots,n \;\; et\, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \quad .$$

Exemples :
Si $(E,\mathcal{A})$ est un espace mesurable, alors $\mathcal{A}$ est un semi-anneau, donc une tribu est un semi-anneau.

Proposition 5 *$\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}_d$ sont des semi-anneaux (mais pas $\mathcal{I}_o$ ni $\mathcal{D}_d$) sur $\mathbb{R}$.*
(Voir la démonstration en exercice).

Proposition 6 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des semi-anneaux booléens de parties de E et F respectivement. Alors $\{A \times B \ : A \in \mathcal{A}\ ,\ B \in \mathcal{B}\}$ est un semi-anneau booléen de parties de $E \times F$.*
Voir la démonstration en exercice.

Application : tribu produit:

Définition 9 *Soient $\sigma(\mathcal{A})$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ sur E et $\sigma(\mathcal{B})$ la tribu engendrée par $\mathcal{B}$ sur F. $(E,\sigma(\mathcal{A}))$ et $(F,\sigma(\mathcal{B}))$ les deux espaces mesurables associés. Alors $\{A \times B\,;\, A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}$ est un semi-anneau de parties de $E \times F$. La tribu sur $E \times F$ engendrée par ce semi-anneau, s'appelle tribu produit de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B}$, et se note $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.*

Conséquences : sur $\mathbb{R}^k$,

$$\mathcal{S}_k = \left\{ \prod_{i=1}^{k}]a_i, b_i] \right\} \;,$$

est un semi-anneau.
La tribu borélienne de $\mathbb{R}^k$ est celle engendrée par le semi-anneau $\mathcal{S}_k$, donc $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^k} = \sigma(S_k)$.

2.2 Applications mesurables

La justification de ce paragraphe est la généralisation de la notion déjà vue de variable aléatoire. Dans la pratique quand on fait une expérience aléatoire, on s'intéresse à une propriété de cette expérience, souvent à valeurs dans $\mathbb{N}$, ou $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^k$). En terme de probabilités, cette propriété permet de construire une application X de Ω dans $\mathbb{N}$, ou $\mathbb{R}$.

Or, nous avons d'un coté la tribu A sur Ω et de l'autre une tribu sur $\mathbb{N}$, ou $\mathbb{R}$. Pour être digne d'intérêt, l'application X doit vérifier une propriété essentielle, et l'on doit, in fine, pouvoir définir $\mathbb{P}(X = n)$ ou $\mathbb{P}(X \in \mathcal{B})$. D'où la définition d'application mesurable qui rend cohérente ces notations.

2.2.1 Définition et propriétés

Définition 10 *Soient* $(E,\mathcal{A})$ *et* $(F,\mathcal{B})$ *deux espaces mesurables.*
Une application $f \ : \quad E \longrightarrow F$ *est dite* **mesurable** *si :*

$$\forall\, B \in \mathcal{B}, \quad f^{-1}(B) = \{x \in E \ : \ f(x) \in B\} \in \mathcal{A}\,.$$

Remarques : $f^{-1}(B)$ se note aussi : $\{f \in B\}$.
En particulier, une variable aléatoire à valeurs entières est une application mesurable de $(\Omega,\mathcal{A})$ dans $(\mathbb{N},P(\mathbb{N}))$ et dans ce cas si $B = \{n\}$ on reconnait l'expression $\{X = n\}$. De même, une variable aléatoire à valeurs réelles est une application mesurable de $(\Omega,\mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et dans ce cas, pour tout borélien B, on reconnait l'expression $X \in B$.
Si on désigne par

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B)\ ;\ B \in \mathcal{B}\}\ ,$$

alors la définition de la mesurabilité de f s'écrit aussi :

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}\,.$$

Exemples : Soit $(E,\mathcal{A})$ un espace mesurable et A un ensemble de E.
Définition 11 *Soit* $A \in \mathcal{P}(E)$*. On appelle fonction indicatrice de l'ensemble A la fonction , notée* $1\!\!1_A$*, de* $E \longrightarrow \{0,1\}$ *définie par :*

$$1\!\!1_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A\,. \end{cases}$$

Proposition 7 *La fonction indicatrice de l'ensemble A,* $1\!\!1_A$*, de* $E \longrightarrow \{0,1\}$ *est mesurable, ssi* $A \in \mathcal{A}$*.*

À démontrer en exercice.

Théorème 2 *Avec les notations précédentes, on a :*
1. *La famille* $\{f^{-1}(B)\}_{B\in\mathcal{B}} = f^{-1}(\mathcal{B})$ *est une tribu sur* E*, appelée tribu engendrée par* f*.*
2. *Si* $\mathcal{C}$ *engendre* $\mathcal{B}$ *,* $f^{-1}(\mathcal{C})$ *engendre* $f^{-1}(\mathcal{B})$ *donc* $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$
3. *Pour que* f *soit mesurable, il faut et il suffit que* $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$*.*

Démonstration

1) D'après l'exercice 5, ce résultat résulte de ce que :

$$f^{-1}(B^c) = \left[f^{-1}(B)\right]^c\ ,\ f^{-1}(\emptyset) = \emptyset\ ,\ f^{-1}(F) = E \text{ et } f^{-1}\left(\bigcup_{i\geq 1} B_i\right) = \bigcup_{i\geq 1} f^{-1}(B_i)\,.$$

2) Soit $\mathcal{F} = \sigma\{f^{-1}(\mathcal{C})\}$. On désire démontrer que $\mathcal{F} = f^{-1}(\mathcal{B})$.

- Montrons $\subset$
  Comme $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\mathcal{B})$ donc $\mathcal{F} \subset f^{-1}(\mathcal{B})$.

- Montrons $\supset$
  Il faut montrer que $\forall B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.
  Il faut donc montrer une propriété sur des éléments de $\mathcal{B}$, tribu engendrée par $\mathcal{C}$. On va désigner par $\mathcal{H}$ les éléments de $\mathcal{B}$ qui vérifient cette propriété.
  Posons $\mathcal{H} = \{B \in \mathcal{B} \; telque \; f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$, et montrons $\mathcal{H} = \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$.
  $\mathcal{H}$ est une tribu (à vérifier) contenant $\mathcal{C}$ et par construction $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}$, mais $\mathcal{B}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$ donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$. Par suite $\mathcal{H} = \mathcal{B}$.
  Donc $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$, et par suite $\mathcal{F} = f^{-1}(\mathcal{B})$.

3) Si $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$, alors $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ donc $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$. La condition est donc suffisante, et elle est évidemment nécessaire. ∎

Corollaire 1 *Soit* $(E,\mathcal{A})$ *un espace mesurable.*
Pour qu'une fonction réelle $f \; : \; E \longrightarrow \mathbb{R}$ *soit mesurable quand* $\mathbb{R}$ *est muni de sa tribu borélienne, il faut et il suffit que :*

$$\forall \, a \in \mathbb{R} \, , \quad f^{-1} \left( ] - \infty, a] \right) \in \mathcal{A} \quad (\textit{ou encore } f^{-1}(\mathcal{D}_d) \subset \mathcal{A}) \, .$$

Remarques : Une CNS équivalente est : $\forall \, a \in \mathbb{R}$, $f^{-1} \left( ] - \infty, a[\right) \in \mathcal{A}$ (intervalle ouvert).
Si $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$, les seules fonctions mesurables sont les fonctions constantes.
Si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$, toutes les fonctions sont mesurables.

Proposition 8 *Soient* $(E,\mathcal{A})$, $(F,\mathcal{B})$ *et* $(G,\mathcal{C})$ *trois espaces mesurables. Soit* $f \; : E \longrightarrow F$ *mesurable, et* $g \; : F \longrightarrow G$ *mesurable alors* gof *est mesurable.*

À démontrer.

Définition 12 *Une application* f *de* E *dans* F *est dite* **étagée** *si elle prend un nombre fini de valeurs* $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset F$ *distinctes.*

On vérifie aisément que si $F = \mathbb{R}$, alors f est une fonction réelle étagée si elle s'écrit :

$$f = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{1}_{A_i} \quad \text{avec} \quad A_i = f^{-1} \left(\{y_i\} \right) \text{ et } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ et } \bigcup_{i=1}^{n} A_i = E \, .$$

Dans ce cas, on dit que f est étagée sur $\mathcal{A}$.

2.2.2 Fonctions numériques mesurables

Dans la suite nous aurons besoin de considérer des nombres infinis.

Définition 13 *On appelle* **droite réelle achevée** *ou* **droite numérique** *l'ensemble* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. *De même, on pose* $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} = [0, +\infty]$.

On définit un ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$ en prolongeant de manière naturelle l'ordre sur $\mathbb{R}$ et on définit la notion de convergence de suite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en définissant la convergence vers un élément de $\mathbb{R}$ ou $+\infty$ ou $-\infty$ de manière classique.
On étend les opérations arithmétiques de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :

$$\forall a \ \in \overline{\mathbb{R}}, a \neq 0 \ ; \ a \times_{-}^{+} \infty =_{-}^{+} \infty \text{ et } 0 \times_{-}^{+} \infty = 0 \ ,$$

$$\forall a \ \in \mathbb{R}, \ a + \infty = +\infty \text{ et } 0 - \infty = -\infty \ .$$

On ne donne pas de sens à : $+\infty - \infty$, mais on pose :
$+\infty + (+\infty) = +\infty$ et $-\infty + (-\infty) = -\infty$.
Dans $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie admet une borne supérieure et une borne inférieure, et toute suite monotone de $\overline{\mathbb{R}}$ est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$. Cette propriété permet de donner les définitions suivantes vues à l'exercice 5.

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. On pose

$$\limsup_n a_n = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \quad \text{et} \quad \liminf_n a_n = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

Si la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \limsup_n a_n = \liminf_n a_n \ .$$

Soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de E dans $\overline{\mathbb{R}}$, E quelconque. On définit les fonctions $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ par :

$$\left[\sup_n f_n\right](x) = \sup_n f_n(x) \quad \text{et} \quad \left[\inf_n f_n\right](x) = \inf_n f_n(x) \ .$$

De même, on définit les fonctions $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ par :

$$\left[\limsup_n f_n\right](x) = \limsup_n f_n(x) \quad \text{et} \quad \left[\liminf_n f_n\right](x) = \liminf_n f_n(x) \ .$$

Lorsqu'elle existe, on note $\lim_n f_n$ la limite ponctuelle de $\{f_n\}_{n\geq 1}$. Elle est telle que :

$$\forall x \ \in \ E\,, \quad \left[\lim_n f_n\right](x) = \lim_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) \ .$$

On note encore $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire la tribu engendrée par la famille de tous les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$. De même pour $\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^k\right)$ qui est engendrée par les produits d'intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 14 *Une* **fonction numérique mesurable** *est une application mesurable f de $(E,\mathcal{A})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)$. On note :*
$\mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}})$ l'ensemble des fonctions numériques mesurables définies sur E.

$\mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$ *l'ensemble des fonctions numériques positives mesurables définies sur E.*

$\mathcal{M}(E,\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions réelles mesurables définies sur E.*

$\mathcal{M}(E,\mathbb{R}_+)$ *l'ensemble des fonctions réelles positives mesurables définies sur E.*

$\mathcal{E}(E,\overline{\mathbb{R}})$, $\mathcal{E}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$, $\mathcal{E}(E,\mathbb{R})$, $\mathcal{E}(E,\mathbb{R}_+)$ *l'ensemble des fonctions numériques ou réelles positives ou non, étagées mesurables définies sur E.*

Théorème 3 *Soient f et g deux fonctions réelles ou numériques mesurables définies sur E, muni de la tribu $\mathcal{A}$. Alors l'application $h\ : x \mapsto (f(x),g(x))$ de E dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (resp. dans $\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}$) est mesurable de $(E,\mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\, \mathcal{B}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}})$ (resp. $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}}$) .*

Démonstration

Il suffit de vérifier que l'image réciproque de tout rectangle fermé $[a,b]\times[c,d]$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (resp de $\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}$), est un élément de $\mathcal{A}$. Or, on a :

$$h^{-1}\left([a,b]\times[c,d]\right) = f^{-1}\left([a,b]\right)\cap g^{-1}\left([c,d]\right) \in \mathcal{A}$$

en vertu de la mesurabilité de f et g.

or $\quad \sigma\left\{[a,b]\times[c,d]\ ;\ a,b\,,c\,,d\,\in\,\mathbb{R},\,(\text{resp.}\overline{\mathbb{R}})\right\} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \quad (resp.\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}})\ .$ ■

Théorème 4 *Soient $f,g \in \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}})$, et $\alpha \in\ \mathbb{R}$. Alors*

1. *αf, $(f+g)$ quand elle est définie, $f.g$, $\sup(f,g)$, $\inf(f,g)$, $f^+ = \sup(f,0)$, $f^- = -\inf(f,0)$ sont des fonctions de $\mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}})$.*
2. *Soit $\{f_n\}_{n\geq 1}\subset \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}})$. Alors les fonctions $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ et $\lim_n f_n$ (quand elle existe) sont dans $\mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}})$.*

Démonstration

En exercice.

Proposition 9 *: Soit f une fonction réelle étagée,elle peut s'écrire,*

$$f = \sum_{i=1}^{n} y_i 1\!\!1_{A_i} \quad avec \quad A_i = f^{-1}\left(\{y_i\}\right)\ et\ A_i\cap A_j=\emptyset\ et\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = E\ .$$

On a alors :

$$f\ est\ mesurable \iff \forall\, i=1,\ldots,n\ A_i\,\in\,\mathcal{A}\ .$$

À démontrer en exercice.

Théorème 5 *Si $f\,\in\,\mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$, il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{E}(E,\mathbb{R}_+)$ croissante et convergeant simplement vers f.*

Démonstration

Posons :

$$\forall\, n\geq 1\,,\quad u_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}1\!\!1_{\{\frac{k}{2^n}\leq f<\frac{k+1}{2^n}\}} + n1\!\!1_{\{f\geq n\}}\ .$$

u_n est donc de la forme :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{A_{n,k}} + n\mathbb{1}_{B_n} \ .$$

Les $A_{n,k}$ et B_n définis à partir de f mesurable sont des ensembles de la tribu $\mathcal{A}$ et on a :

$$\forall\, n \geq 1\,, \quad \left(\bigcup_{k=0}^{n2^n-1} A_{n,k}\right) \bigcup B_n = E\ ,$$

et donc

$$u_n \,\in\, \mathcal{E}(E,\mathbb{R}_+)\ .$$

Montrons que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et qu'elle converge simplement vers f.

1. $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   (a) Quand on passe de n à $n+1$,

$$\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\} = \{\frac{2k}{2^{n+1}} \leq f < \frac{2k+1}{2^{n+1}}\} \bigcup \{\frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f < \frac{2(k+1)}{2^{n+1}}\}\ ,$$

$$\text{donc} A_{n,k} = A_{n+1,2k} \cup A_{n+1,2k+1}\ .$$

$$\text{or, si } x \,\in\, A_{n+1,2k} \quad u_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = u_n(x)\ ,$$

$$\text{et si } x \,\in\, A_{n+1,2k+1} \quad u_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} > u_n(x)\ ,$$

   Donc, $\forall\, x \,\in\, A_{n,k}\ ,\ u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$.

   (b) Quand on passe de n à $n+1$,

$$\{f \geq n\} = \{f \geq n{+}1\} \bigcup \{ \bigcup_{r=0}^{2^{n+1}-1} \{\frac{n2^{n+1}+r}{2^{n+1}} \leq f < \frac{n2^{n+1}+r+1}{2^{n+1}}\}\}\ .$$

$$\text{Donc, } B_n = B_{n+1} \cup \left(\bigcup_{r=0}^{2^{n+1}-1} A_{n+1,n2^{n+1}+r}\right)\ .$$

$$\text{or, si } x \,\in\, B_{n+1}\ , \quad u_{n+1}(x) = n+1 > n = u_n(x)\ ,$$

$$\text{et si } x \,\in\, A_{n+1,n2^{n+1}+r}\ , \quad u_{n+1}(x) = \frac{n2^{n+1}+r}{2^{n+1}} = n + \frac{r}{2^{n+1}} \geq n = u_n(x)\ .$$

   Donc, $\forall\, x \in B_n\ ,\ u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$.

2. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers f.
   (a) Si $f(x) = +\infty$: $u_n(x) = n \longrightarrow +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = f(x)$.
   (b) Si $f(x) < +\infty$: $\exists\, n_0\ tq\ \forall n \geq n_0 \ :\ |\, u_n(x) - f(x)\,| \leq \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = f(x)$. ■

Ce théorème sera essentiel pour la définition de l'intégrale de Lebesgue. Notons ici que la différence essentielle avec l'intégrale de Riemann est le découpage pour l'approximation de f par u_n. Ici elle se fait sur les valeurs prises par f et non sur les valeurs prises par x.

Chapitre 3

Mesures positives et intégrale de Lebesgue

3.1 Mesures

3.1.1 Définition et propriété des mesures positives

Définition 15 *Soit* $(E,\mathcal{A})$ *un espace mesurable. Une mesure positive est une application* $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *telle que :*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *si* $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ *avec* $\forall\, i \neq j\ A_i \cap A_j = \emptyset$ *alors,*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\ .$$

$\mu(A)$ s'appelle la mesure de A. On dit que μ est dénombrablement additive.
Le triplet $(E,\mathcal{A},\mu)$ s'appelle "espace mesuré".

- Si $\mu(E) < +\infty$, on dit que μ est une mesure bornée.
- Si $\mu(E) = 1$, on dit que μ est une mesure de probabilitée.
- S'il existe une famille de parties $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ telle que $\bigcup_{n\geq 1} A_n = E$ et telle $\forall n \geq 1$, $\mu(A_n) < +\infty$, on dit que la mesure μ est σ-finie.

Exemple : si $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(A) = +\infty$ sinon , on dit que μ est identiquement égale à $+\infty$. Dans toute la suite, nous supposerons que la mesure μ est non identiquement égale à $+\infty$.
Propriétés immédiates :

- Additivité finie : $A,B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- Monotonie : $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$, en effet, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$.

Proposition 10 *Continuité monotone croissante : Si* $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ *avec* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \ldots$, *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)\ .$$

Démonstration

Posons $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $B_1 = A_1$.
Alors les ensembles B_n sont deux à deux disjoints et

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \ ,$$

$$\text{donc} \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) \ ,$$

D'où,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to+\infty} [\mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n) - \mu(A_{n-1})] \ ,$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) \ . \qquad \blacksquare$$

Proposition 11 *Continuité monotone décroissante : Si $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ est une suite décroissante ($A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \ldots$), et si $\mu(A_1) < +\infty$, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \ .$$

Démonstration

(On applique le résultat précédent à $C_n = A_1 \setminus A_n$).
À démontrer en exercice.

Exemples de mesures :

- Soit $x \in E$. L'application $\delta_x : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour tout $A \in \mathcal{A}$ par
$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \ , \\ 0 & \text{si } x \notin A \ , \end{cases}$$
s'appelle "Mesure de Dirac au point $x \in E$".
(Mesure de masse 1 concentrée en x).
- L'application $N : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par $N(A) = Card(A)$ = nombre d'éléments de A, est une mesure sur $(E,\mathcal{A})$ appelée mesure dénombrante sur E.
- Soit $(E,\mathcal{P}(E))$. On pose $\forall A \subset E$, $\mu(A) = +\infty$ si A n'est pas dénombrable, 0 sinon.
- Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable. Alors $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est une probabilité définit une mesure sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$.

3.1.2 Construction d'une mesure

Le problème est de savoir s'il est nécéssaire de préciser la mesure de chaque élément de $\mathcal{A}$ pour définir une mesure. En effet, si $E = \mathbb{N}$ la tribu d'intérêt est $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui n'est pas dénombrable et si $E = \mathbb{R}$, la tribu d'intérêt est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ dont les éléments ne sont pas explicitables.

Cette difficulté peut être levée par le résultat fondamental suivant :

Théorème 6 *(du prolongement) : Soit $(E,\mathcal{A})$ un espace mesurable, et $\mathcal{S}$ un semi-anneau de parties de E, engendrant $\mathcal{A}$. Soit $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$.*
2. *Il existe une famille finie ou dénombrable $(S_n)_{n\in I}$ d'éléments de S telle que $E \subset \bigcup_{n\in I} S_n$.*
3. *Pour toute famille finie ou dénombrable $(S_n)_{n\in I}$ d'éléments de S deux à deux disjoints,*

$$\bigcup_{n\in I} S_n \in \mathcal{S} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in I} S_n\right) = \sum_{n\in I} \mu(S_n)\ .$$

Alors il existe une unique mesure $\tilde{\mu}$ sur $\mathcal{A}$ telle que $\forall S \in \mathcal{S}$, $\tilde{\mu}(S) = \mu(S)$.

Dans ces conditions, il suffit donc de définir une mesure sur un semi-anneau $\mathcal{S}$ engendrant $\mathcal{A}$.

Exemple : La mesure de Borel sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$:
On a vu que la famille $\mathcal{I}_d$ des intervalles $]a,b]$ de $\mathbb{R}$ est un semi-anneau engendrant $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. On définit une application μ sur $\mathcal{I}_d$ telle que :

$$\mu\left(]a,b]\right) = b - a \ = \text{ longueur de l'intervalle}\ .$$

Alors μ verifie les conditions du théorème 6 et s'appelle la "mesure de Borel" sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.
On généralise cette construction à $(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^k})$.
Plus généralement, pour toute fonction croissante, continue à droite $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, on définit la "mesure de Borel-Stieltjes" en posant $\mu(]a,b]) = \alpha(b) - \alpha(a)$.

Définition 16 *Un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est dit μ-négligeable (pour un espace mesuré $(E,\mathcal{A},\mu)$) si $\mu(A) = 0$. Une propriété sur E est dite vraie μ-presque partout, si l'ensemble sur lequel elle est fausse est négligeable.*

Pour des raisons qui dépassent le cadre de ce cours, il faut encore élargir l'ensemble sur lequel on souhaite définir une mesure.
Pour cela, on utilise la proposition suivante :

Proposition 12 *Soit $(E,\mathcal{B},\mu)$ un espace mesuré. Alors,*

$$\mathcal{B}_\mu = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\ B_1,B_2 \in \mathcal{B} \text{ tel que } B_1 \subset X \subset B_2 \text{ et } \mu(B_2 \setminus B_1) = 0\}$$

est une tribu contenant $\mathcal{B}$.

Voir la démonstration en exercice.
On définit ensuite la mesure sur $\mathcal{B}_\mu$ en prolongeant celle déjà définie sur $\mathcal{B}$. Cette mesure s'appelle la complétée de μ.
On peut ainsi compléter la mesure de Borel sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. La mesure ainsi obtenue s'appelle la mesure de **Lebesgue** sur $\mathbb{R}$ et se note λ.
Dans la pratique, il est extrêmement difficile d'expliciter un ensemble de $\mathbb{R}$ dont la mesure de Lebesgue n'aurait pas de sens.
Ainsi, on pourra ainsi parler de fonctions continues, dérivables, ..., (Lebesgue) presque

partout sur $\mathbb{R}$.
Exercice : Montrer que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

3.2 L'intégrale de Lebesgue

3.2.1 Intégrale supérieure des fonctions numériques mesurables positives

Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. On a défini $\mu(A)$ pour tout A de $\mathcal{A}$.
Pour $f : (E,\mathcal{A}) \to (\bar{(\mathbb{R})},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on souhaite construire $\int f d\mu$ qui représente une somme de valeurs prises par f sur E, pondérée par une mesure sur $\mathcal{A}$, cette somme devant naturellement garder des propriétés de cohérence. De façon générique, on va donc procéder par ´tapes, en commençant par le plus simple: pour des fonctions mesurables, nous allons commencer par définir cette intégrale pour les fonctions indicatrices, puis pour les fonctions étagées, puis pour les fonctions numériques.

Cas des fonctions indicatrices mesurables

Définition 17 *Soit $1\!\!1_A \in \mathcal{E}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$ la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable. On définit l'intégrale supérieure de $1\!\!1_A$ par :*

$$\int^* 1\!\!1_A d\mu = \mu(A) \ \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

Notons que l'on retrouve ici une propriété très utile en probabilité si $\mathbb{P} = \mu$:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \int^* \mathbb{1}_A d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A) \ .$$

Cas des fonctions étagées mesurables

Définition 18 *Soit $u \in \mathcal{E}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$ définie par*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1\!\!1_{A_i} \ , \ \alpha_i \ \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ , \ A_i \ \in \ \mathcal{A} \ , \ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = E \ , \ A_i \cap A_j = \emptyset \ .$$

On définit l'intégrale supérieure de u par :

$$\int^* u d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \ \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

Remarque Cette définition de l'intégrale correspond bien à faire une somme de valeurs prises par u (les α_i) pondérées par une mesure sur l'ensemble où u prend ces valeurs (les $\mu(A_i)$). Par ailleurs cette définition respecte la notion de linéarité de l'intégrale.

À ce stade, certaines propriétés de l'intégrale sont évidentes, mais néanmoins capitales:

Propriétés : Soient u et v deux éléments de $\mathcal{E}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$ et soit $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+$.
L'application $\phi : u \mapsto \int^* u d\mu$ de $\mathcal{E}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est linéaire croissante donc vérifie

1. $\phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v)$,
2. $\forall\, \alpha \in \overline{\mathbb{R}_+}$, $\phi(\alpha u) = \alpha\phi(u)$,
3. $u \leq v \Rightarrow \phi(u) \leq \phi(v)$.

Démonstration

1) Soit u et v deux fonctions étagées :

$$\text{Posons} \quad u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \text{ et } v = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \mathbb{1}_{B_j} \ ,$$

$$\text{alors} \quad u + v = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \ ,$$

$$\text{donc} \quad \int^* (u+v) d\mu = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) \ ,$$

$$\text{donc} \quad \int^* (u+v) d\mu = \sum_{i,j} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \ ,$$

$$\text{or} \quad \sum_{i,j} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{p} \mu(A_i \cap B_j) \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \ ,$$

$$\text{par suite} \quad \int^* (u+v) d\mu = \sum_{i} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j} \beta_j \mu(B_j) \ ,$$

$$\text{et finalement} \quad \int^* (u+v) d\mu = \int^* u d\mu + \int^* v d\mu \ .$$

2) est trivial.
3) si $u \leq v$ on a, avec les notations précédentes $\alpha_i \leq \beta_j$ sur $A_i \cap B_j$ donc $\int^* u d\mu < \int^* v d\mu$. ∎

Cas d'une fonction numérique positive

Définition 19 *Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$. Alors on définit l'intégrale supérieure de f par :*

$$\int^* f d\mu = \sup_{0 \leq u \leq f,\, u \in \mathcal{E}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)} \left(\int^* u d\mu \right) \ , \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

et si $A \in \mathcal{A}$,

$$\int_A^* f d\mu = \int^* f \mathbb{1}_A d\mu \ .$$

On remarque tout de suite que :

$$f \leq g \Rightarrow \int^* f d\mu \leq \int^* g d\mu \ .$$

Cette définition permet d'affirmer l'existence de l'intégrale et de démontrer certaines propriétés, mais ne permettra pas son calcul effectif. Dans la pratique, le calcul effectif de l'intégrale reposera sur la propriété suivante ou sur d'autres propriétés.

Propriété de convergence monotone

Le théorème suivant est capital et permet dans un cas particulier d'inverser le signe $\int$ et le signe lim.

Théorème 7 *(de Beppo-Levi) : Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite croissante dans* $\mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$*, alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int^* f_n d\mu = \int^* \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu \ = \int^* f d\mu \ .$$

Rq 1 : cette égalité est vraie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et peut, en particulier, signifier $+\infty = +\infty$.
Rq 2 : Ce théorème ne s'applique si les (f_n) sont à valeurs dans $\mathbb{R}_-$, le fait que les (f_n) soient positives est primordial dans la démonstration.

Démonstration

Cette démonstration se fait en deux temps :

1. $\forall\, n \geq 1$, $f_n \leq f$ donc
$$\int^* f_n d\mu \leq \int^* f d\mu \ ,$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} \int^* f_n d\mu = \sup_n \int^* f_n d\mu \leq \int^* f d\mu \ .$$
2. Pour démontrer l'inégalité contraire, il faut revenir à la définition.
Soit $u \in \mathcal{E}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$ telle que $u \leq f$, et soit $0 < \epsilon < 1$. Alors $0 \leq \epsilon\, u \leq f$.
$$\text{Posons } E_n = \{x \in E \,|\, \epsilon\, u(x) \leq f_n(x)\} \ .$$
   - Comme $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante,
   $\forall n \geq 1$, $E_n \subset E_{n+1}$ et $E_n \in \mathcal{A}$,
   - De plus $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = E$. En effet, soit $x \in E$, on a :
     - Si $f(x) = 0$, alors $\forall\, n \geq 1$, $x \in E_n$, et donc $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$.
     - Si $f(x) \neq 0$, alors on peut supposer $u(x) > 0$ (sinon $E_n = E$), et par suite, $\epsilon u(x) < u(x) \leq f(x)$ et donc il existe n assez grand tel que $x \in E_n$.

D'où,

$$\forall\, n \geq 1 \ , \ \int^{*} f_n d\mu \geq \int^{*} f_n \mathbb{1}_{E_n} d\mu = \int^{*}_{E_n} f_n d\mu \geq \epsilon \int^{*}_{E_n} u d\mu \ ,$$

Donc,

$$\sup_n \int^{*} f_n d\mu \geq \epsilon \sup_n \int^{*}_{E_n} u d\mu \ ,$$

Posons $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, alors

$$\int^{*}_{E_n} u d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap E_n)$$

D'où,

$$\sup_n \int^{*}_{E_n} u d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sup_n \mu(A_i \cap E_n) \ ,$$

Or,

$$\sup_n \mu(A_i \cap E_n) = \mu(A_i) \ ,$$

car $\{E_n\}_{n\geq 1}$ est une suite croissante.
Par conséquent, $\forall\, 0 < \epsilon < 1$ on a :

$$\sup_n \int^{*} f_n d\mu \geq \epsilon \int^{*} u d\mu \ ,$$

D'où, $\forall\, u \in \mathcal{E}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$ telle que $u \leq f$

$$\sup_n \int^{*} f_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int^{*} f_n d\mu \geq \int^{*} u d\mu \ ,$$

Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} \int^{*} f_n d\mu \geq \sup_{u\leq f} \int^{*} u d\mu = \int^{*} f d\mu \ . \qquad \blacksquare$$

Conséquences : Cette propriété permet le calcul effectif de l'intégrale de $f \in \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$. En effet, d'après le théorème 5, il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{E}(E,\mathbb{R}_+) \uparrow f$, donc d'après le théorème 7,

$$\int^{*} f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int^{*} u_n d\mu \ .$$

Cette propriété permet de plus d'obtenir la linéarité de l'intégrale supérieure sur $\mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$

Théorème 8 *Soient $f,g \in \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+$ alors,*

1. $\int^{*}(f+g)d\mu = \int^{*} f d\mu + \int^{*} g d\mu$,
2. $\int^{*}(\alpha f)d\mu = \alpha \int^{*} f d\mu$

La démonstration se fait par passage à la limite croissante de propriétés qui sont vraies pour l'intégrale supérieure sur $\mathcal{E}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Exemples d'intégration

Soit $(E,\mathcal{A})$ un espace mesurable.

- **Intégration par rapport à la mesure de Dirac.**
  Soit $a \in E$ et δ_a la mesure de Dirac au point a.
  Soit $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, une fonction étagée.

$$\int^* u d\delta_a = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_a(A_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(a) = u(a)\ .$$

  Soit $f \in \mathcal{M}(E,\mathbb{R}_+)$. Alors, pour $(u_n)_{n\geq 1} \uparrow f$,

$$\int^* f d\delta_a = \lim_{n\to+\infty} \int^* u_n d\delta_a = \lim_{n\to+\infty} u_n(a) = f(a)\ .$$

- **Mesure discrète.**
  Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de E, et $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels. Soit μ la mesure définie par :

$$\mu = \sum_{n\geq 1} \epsilon_n\, \delta_{x_n}\ .$$

  Alors,

$$\forall\, A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = \sum_{n\geq 1} \epsilon_n \delta_{x_n}(A) = \sum_{n\geq 1} \epsilon_n \mathbb{1}_A(x_n)\ .$$

  Soit $u \in \mathcal{E}(E,\mathbb{R}_+)$,

$$\int^* u d\mu = \int^* \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i)\ ,$$

$$= \sum_{i=1}^k \alpha_i \sum_{n\geq 1} \epsilon_n \mathbb{1}_{A_i}(x_n) = \sum_{n\geq 1} \epsilon_n \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x_n) = \sum_{n\geq 1} \epsilon_n u(x_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(\{x_n\}) u(x_n)\ .$$

  Soit $f \in \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$, on aura par passage à la limite,

$$\int^* f d\mu = \sum_{n\geq 1} \epsilon_n f(x_n) \ = \sum_{n\geq 1} \mu(\{x_n\}) f(x_n)\ .$$

  Dans ces deux cas simples où la mesure est définie sur des valeurs discrètes, l'intégrale d'une fonction revient à calculer la somme des valeurs de cette fonction (les $f(x_n)$) pondérées par la"mesure" de ces valeurs (les $\mu(\{x_n\})$. Toutes les mesures sur $\mathbb{N}$ sont de ce type. La difficulté est d'étendre cette notion intuitive au cas où l'espace est continu, typiquement $\mathbb{R}$, la mesure d'un point donné étant égale à 0.
  L'inversion de deux signes $\sum$ est classique et est en ralité l'application d'un cas particulier d'échange des symboles $\int$ et $\sum$ que nous illustrons ici par le théorème suivant : **Inversion du signe $\int$ et du signe $\sum$**

L'inversion de ces deux signes est souvent très utile voire indispensable dans la pratique, mais nécessite d'être justifiée. Le théorème suivant valide cette inversion pour toutes les fonctions numériques positives.

Théorème 9 *Soit* $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$. *Alors*

$$\int^* \sum_{n=1}^{+\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int^* f_n d\mu \,.$$

Remarque : Cette égalité est vraie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Démonstration

Posons

$$\phi_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \;\text{ et }\; \phi = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Alors ϕ_n tend en croissant vers ϕ. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int^* \phi_n d\mu = \int^* \phi d\mu \,.$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \int^* \phi_n d\mu == \lim_{n\to+\infty} \int^* \sum_{k=1}^{n} f_k d\mu \;= \lim_{n\to+\infty} \uparrow \sum_{k=1}^{n} \int^* f_k d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int^* f_n d\mu$$

■

Application: lois de probabilités usuelles sur $\mathbb{N}$

– Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ elle peut s'écrire (égalité de deux fonctions)

$$X = \sum_{n\in\mathbb{N}} n 1\!\!1_{\{X=n\}} \,,$$

donc,

$$\mathbb{E}(X) = \int^* X dP = \int^* \sum_{n\in\mathbb{N}} n 1\!\!1_{\{X=n\}} dP = \sum_{n\in\mathbb{N}} n \int^* 1\!\!1_{\{X=n\}} dP = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n) \,.$$

Nous retrouvons ici la formule classique donnant l'espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ car dans ce cas nous aurons $\int^* = \int$.

– **Intégration par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.**
Soit $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ l'ensemble des réels, muni de la mesure de Lebesgue λ.

Proposition 13 *Soit f une fonction continue positive sur $[a,b]$ compact de $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Alors,*

$$\int^*_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx \text{ au sens de Riemann.}$$

Démonstration

En effet, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ au sens de Riemann, est définie de la façon suivante:

On partage l'intervalle $[a,b]$, en 2^n intervalles définis de la façon suivante:

$$\begin{cases} I_k &= [a+k\frac{(b-a)}{2^n},a+(k+1)\frac{(b-a)}{2^n}[\quad k=0,1,\ldots,2^n-2 \ , \\ I_{2^n-1} &= [b-\frac{(b-a)}{2^n},b] \end{cases}$$

on pose alors,

$$m_{I_k}(f) = \inf_{x\in I_k} f(x) \text{ .On a } m_{I_k}(f) \text{ existe et } S_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} m_{I_k}(f)\frac{(b-a)}{2^n} \ ,$$

et enfin,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S_n \ .$$

Posons

$$u_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} m_{I_k}(f)\mathbb{1}_{I_k} \ .$$

Alors $u_n \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}_+)$ et $u_n \uparrow f\mathbb{1}_{[a,b]}$, D'où,

$$\int^*_{[a,b]} f d\lambda = \lim_{n\to+\infty}\int^* u_n d\lambda = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1} m_{I_k}(f)\frac{(b-a)}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx \ . \qquad \blacksquare$$

Remarque : La fonction de Dirichlet $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, n'est pas intégrable au sens de Riemann, tandis qu'elle est intégrable au sens de Lebesgue et que

$$\int^* f d\lambda = 0 \ .$$

Nous savons donc définir l'intégrale d'une fonction dans quelques cas simples.

Le théorème suivant est utile dans la pratique et permet de montrer que le calcul de l'intégrale ne dépend pas des valeurs prises par la fonction sur un ensemble négligeable :

Théorème 10 *Soit $f \in \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$. Alors,*

$$\int^* f d\mu = 0 \iff f = 0 \ \mu-p.p. \ .$$

Démonstration

Remarque : $f = 0 \ \mu - p.p.$ signifie $\mu\{f > 0\} = 0$.

Condition nécessaire : $\Rightarrow$

$$\{f > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{f \geq \frac{1}{n}\} \text{ (suite croissante d'ensembles) },$$

Donc,

$$\mu\{f > 0\} = \lim_{n \to +\infty} \mu\{f \geq \frac{1}{n}\} = \lim_{n \to +\infty} \int^* \mathbb{1}_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} d\mu \ .$$

Or,

$$\mathbb{1}_{\{f \geq \frac{1}{n}\}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } nf(x) \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc,

$$\forall\, x \in E,\ \mathbb{1}_{\{f \geq \frac{1}{n}\}}(x) \leq nf(x) \ .$$

Par suite,

$$0 \leq \mu\{f > 0\} \leq \lim_{n \to +\infty} n \int^* f d\mu \ .$$

Or le membre de droite de cette inégalité est nul, donc

$$\mu\{f > 0\} = 0 \ .$$

Condition suffisante : $\Leftarrow$

$$\int^* f d\mu = \int^*_{\{f>0\}} f d\mu = \int^* f \mathbb{1}_{\{f>0\}} d\mu \ ,$$

Or,

$$f \mathbb{1}_{\{f>0\}} = \lim_{n \to +\infty} \uparrow f \mathbb{1}_{\{0<f\leq n\}} \ ,$$

Donc,

$$\int^* f d\mu = \sup_n \int^* f \mathbb{1}_{\{0<f\leq n\}} d\mu \leq \sup_n n \int^* \mathbb{1}_{\{0<f\leq n\}} d\mu \ ,$$
$$\leq \sup_n n\mu\{0 < f \leq n\} \leq \sup_n n\mu\{f > 0\} \ .$$

Or, le membre de droite de cette inégalité est nul, donc

$$\int^* f d\mu = 0 \ . \qquad \blacksquare$$

Corollaire 2 *$\forall\, f \in \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$ et $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$, on a : $\int^*_A f d\mu = 0$.*

Démonstration

En effet, $f\mathbb{1}_A = 0 \ \mu - p.p.$, d'où le résultat. $\blacksquare$

3.2.2 Fonctions numériques ou complexes intégrables

Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Soit $f \in \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}})$, on pose $f^+ = \sup(f,0)$ et $f^- = -\inf(f,0)$. On a alors, $f^+ \geq 0$ et $f^- \geq 0$, donc on sait construire $\int^* f^+ d\mu$ et $\int^* f^- d\mu$, mais ces deux quantités peuvent être égales à $+\infty$.
Remarque: Par construction, on a

$$f = f^+ - f^- \text{ , et } |f| = f^+ + f^- .$$

Définition 20 *On définit l'intégrale de fonctions définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de la façon suivante :*

- *Une fonction $f \in \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}})$ est dite intégrable par rapport à μ si $\int^* f^+ d\mu < +\infty$ et $\int^* f^- d\mu < +\infty$. on pose alors,*

$$\int f d\mu = \int^* f^+ d\mu - \int^* f^- d\mu = \int_E f(x) d\mu(x) .$$

Enfin,

$$\int_A f d\mu = \int f \mathbb{1}_A d\mu .$$

- *Si $f \in \mathcal{M}(E,\mathbb{C})$, on a $f = u + iv$. On dit que f est intégrable si u et v le sont et on pose :*

$$\int f d\mu = \int u d\mu + i \int v d\mu .$$

Remarque : Pour les fonctions positives, l'intégrale supérieure est toujours définie dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, si cette valeur est finie l'intégrale est définie et les deux valeurs coincident.

Proposition 14 *Le sous-ensemble $\mathcal{L}^1(E,\overline{\mathbb{R}})$ de $\mathcal{M}(E,\mathbb{R})$ des fonctions numériques intégrables est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application $f \mapsto \int f d\mu$ est linéaire.*

Théorème 11 *Nous avons les résultats suivants :*

1. *soit $f \in \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}})$ et $g \in \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$* **intégrable**, *alors*

$$|f| \leq g \Rightarrow f \text{ intégrable} .$$

2. *f intégrable $\Longleftrightarrow |f|$ intégrable.*
3. *f intégrable $\Rightarrow \left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$.*

Remarque : le point 2 est une différence fondamentale avec l'intégrale de Riemann.
Démonstration

1) On a :

$$|f| \leq g \Rightarrow \int^* |f| d\mu \leq \int^* g d\mu < +\infty ,$$

$$\Rightarrow \int^* f^+ d\mu + \int^* f^- d\mu < +\infty ,$$

$$\Rightarrow f \text{ intégrable} .$$

2) Résulte de la définition.
3) On a :

$$\left|\int f d\mu\right| = \left|\int^* f^+ d\mu - \int^* f^- d\mu\right| \leq \int^* f^+ d\mu + \int^* f^- d\mu = \int |f| d\mu . \qquad \blacksquare$$

Exemples de fonctions intégrables pour les mesures classiques:

1. Mesure de Dirac : f est δ_a-intégrable si $|f(a)| < +\infty$.
2. Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
   Soit $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ l'ensemble des réels muni de la mesure de Lebesgue. Soit f à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, continue. Alors,
   $$\int^*_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad (\in \overline{\mathbb{R}}) \quad .$$
   Soit f continue à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors, f est Riemann-intégrable absolument sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est Lebesgue-intégrable et
   $$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda \; = \; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad .$$
   De même pour les intégrales généralisées : soit f continue sur $]a,b[$ de limite ∞ en a et b. Si $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente au sens de Riemann alors f est Lebesgue intégrable et
   $$\int_a^b f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$$

Démonstration en exercice.

Théorème 12 *Si $f,g \in \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}})$ avec $f = g$, μ-p.p., alors f intégrable $\Longleftrightarrow$ g intégrable, et $\int f d\mu = \int g d\mu$. (L'intégrale ne dépend que de la classe d'équivalence et ne dépend pas des valeurs prises sur un ensemble μ-négligeable).*

Démonstration

On peut supposer f et g positives. On a alors,

$$\int^* f d\mu = \int^*_{\{f=g\}} f d\mu + \underbrace{\int^*_{\{f\neq g\}} f d\mu}_{0} = \int^* g d\mu .$$

$\blacksquare$

Théorème 13 *$f \in \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}})$ intégrable $\Rightarrow |f| < +\infty$ μ-p.p.*

Démonstration

Il suffit que f^+ et f^- soient $< +\infty$ μ-p.p. On peut donc, sans perte de généralité, se restreindre à $f \geq 0$ avec $\int^* f d\mu < +\infty$.
Soit $M = \{x \in E \mid f(x) = +\infty\}$. Alors

$$\forall n \geq 1, \quad n\mathbb{1}_M \leq f ,$$

D'où,

$$\forall\, n \geq 1, \quad n\mu(M) = n \int^* \mathbb{1}_M d\mu \leq \int^* f d\mu < +\infty \ ,$$

Par suite,

$$\mu(M) = 0 \ . \qquad \blacksquare$$

Conséquence : autrement dit, quand on s'intéresse aux fonctions intégrables, on peut se restreindre aux fonctions de $\mathcal{M}(E,\mathbb{R})$.

3.2.3 Le théorème de convergence dominée

Le théorème de convergence monotone permet d'inverser $\int$ et lim sous certaines hypothèses. Or cette inversion est extrêmement utile dans la pratique. Le théorème de convergence dominé permet aussi cette inversion avec des hypothèses très larges. C'est l'un des théorèmes les plus importants de ce cours. Le théorème suivant est toujours vrai et ne suppose pas que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ait une limite:

Théorème 14 *: (Lemme de Fatou) Soit* $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$ *alors*

$$\int^* \liminf_n f_n d\mu \ \leq \ \liminf_n \int^* f_n d\mu \, .$$

Démonstration

On a :

$$\liminf_n f_n = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} f_k\right) = \sup_{n\geq 1} g_n \ .$$

Avec ces notations, $(g_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de fonctions positives qui converge vers $\liminf_n f_n$. D'après le théorème de Beppo-Levi,

$$\int^* \liminf_n f_n d\mu \ = \lim_{n\to+\infty} \int^* g_n d\mu \ .$$

Mais, par définition,

$$\forall\, k \ \geq n \, , \quad f_k \geq g_n \ \text{ donc } \forall k \geq n \ \int^* f_k d\mu \geq \int^* g_n d\mu \ .$$

D'où,

$$\forall\, n \ \geq 1 \, , \quad \inf_{k\geq n} \int^* f_k d\mu \geq \int^* g_n d\mu \ .$$

D'où,

$$\sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} \int^* f_k d\mu \geq \sup_n \int^* g_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int^* g_n d\mu \ .$$

Finalement,

$$\liminf_n \int^* f_n d\mu \geq \int^* \liminf_n f_n d\mu \ . \qquad \blacksquare$$

Théorème 15 *(de Fatou-Lebesgue) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}(E,\mathbb{R})$ telle que :*

1. $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$,
2. $\exists\, g \in \mathcal{L}^1(E,\mathbb{R})$ *t.q.* $\forall\, n \geq 1 \quad |f_n| \leq g\ \mu - p.p.$.

   Alors f **est intégrable** *et :*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \ = \ \int \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu \ .$$

Démonstration

Comme $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ et $|f_n| \leq g$, on a aussi f_n est intégrable d'après le théorème 11 et par suite $|f| \leq g$ donc f est intégrable.
La difficulté est donc de calculer cette intégrale.
Démontrons $\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$, on aura alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| = 0 \ ,$$

ce qui donne le résultat cherché.
On ne dispose que du théorème de Beppo-Levi. L'astuce consiste donc à s'y ramener.
Or, on a :

$$0 \ \leq \ |f_k - f| \ \leq \ |f_k| + |f| \ \leq \ 2g \ .$$

D'où l'idée de poser:

$$\forall\, n \geq 1 \ , \quad g_n = \inf_{k\geq n} \left(2g - |f_k - f|\right) \ .$$

Alors,

$$(g_n)_{n\geq 1} \uparrow 2g \ ,$$

Or $2g \in \mathcal{L}^1(E,\mathbb{R})$ donc $\forall n$, $g_n \in \mathcal{L}^1(E,\mathbb{R})$, et d'après le théorème de Beppo-Levi,

$$\lim_{n\to+\infty} \int g_n d\mu = \int 2g d\mu \ < +\infty \ .$$

Donc,

$$\inf_n \int (2g - g_n) d\mu = 0 \ .$$

Or,

$$\forall\, n \geq 1 \ , \forall\, k \geq n \ , \quad g_n \leq 2g - |f_k - f| \ ,$$

donc,

$$\forall\, n \geq 1 \ , \forall\, k \geq n \ , \ \int g_n d\mu \leq \int \left(2g - |f_k - f|\right) d\mu \ ,$$

donc,

$$\forall\, n \geq 1 \ , \forall k \geq n \ , \int |f_k - f| d\mu \leq \int 2g d\mu - \int g_n d\mu \ .$$

Donc, en prenant $\sup_{k\geq n}$ puis $\inf_n$ des deux cotés de l'inégalité, on obtient,

$$\sup_{k\geq n}\int |f_k - f|d\mu \leq \int (2g - g_n)d\mu < +\infty \ ,$$

Puis,

$$0 \leq \limsup_n \int |f_n - f|d\mu \leq \inf_n \left(\int (2g - g_n)d\mu\right) \ ,$$

Or le membre de droite de cette inégalité vaut 0.
D'où,

$$0 \leq \limsup_n \int |f_n - f|d\mu \leq 0 \quad ,$$

Donc,

$$0 \leq \liminf_n \int |f_n - f|d\mu \leq \limsup_n \int |f_n - f|d\mu = 0 \text{ d'où } \lim_{n\to+\infty}\int |f_n - f|d\mu = 0 \ . \qquad \blacksquare$$

Remarque : Il suffit que $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$, $\mu - p.p.$.

Contre exemple démontrant la nécessité de la majoration :
L'inversion des signes $\int$ et lim n'est pas toujours valide et l'hypothèse de la majoration dans le théorème précédent est donc indispensable. Pour s'en convaincre, examinons l'exemple suivant :
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions sur $\mathbb{R}_+$ définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ n & \text{si} \quad 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Alors,

$$\forall\, n \geq 1 \qquad \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 1 \text{ , donc } \lim_{n\to+\infty}\int f_n d\lambda = 1 \ ,$$

Alors que :

$$\forall\, x \geq 0 \ , \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \text{ donc } \int \lim_{n\to+\infty} f_n d\lambda = 0 \ .$$

En fait, la plus petite fonction majorante de $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est $g(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$, (partie entière).

3.2.4 Application aux fonctions définies par une intégrale.

Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, $I = (a,b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non nécessairement borné, fermé ou ouvert, et

$$\begin{array}{rccc} f : & E \times I & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & f(x,t). \end{array}$$

telle que $\forall\, t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ soit μ-intégrable par rapport à x. On pose :

$$\begin{array}{rccl} F : & I & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & F(t) = \int_E f(x,t)d\mu(x) \ . \end{array}$$

Étude de la continuité

Théorème 16 *(Continuité) Si*

1. *pour tout* $x \in E$, $t \mapsto f(x,t)$ *est continue sur* I ,
2. $\exists\, g \in \mathcal{L}^1(E,\mathbb{R}_+)$ *telle que* $\forall\, t \in I, \quad |f(x,t)| \leq g(x)\ \mu - p.p.$,

Alors F *est continue sur* I.

Démonstration

Soit $t_0 \in I$. Soit $(t_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de I convergeant vers t_0. Démontrons que $F(t_n) \to F(t_0)$. On a :

$$F(t_n) = \int f(x,t_n) d\mu(x) .$$

Posons $f_n(x) = f(x,t_n)$ et $h(x) = f(x,t_0)$. On a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \to f(x,t_0) = h(x)$, car $t \mapsto f(x,t)$ est continue en $t_0 \in I$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = h$.

De plus,

$$\forall\, n \geq 1, \quad |f_n| \leq g \quad \mu - p.p. \text{ , avec g intégrable}$$

donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f(x,t_n) d\mu(x) = \int \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu = \int f(x,t_0) d\mu(x)$$

C'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} F(t_n) = F(t_0) . \qquad \blacksquare$$

Étude de la dérivabilité de F

Théorème 17 *(Dérivabilité) Si*

1. *pour tout* $x \in E$, $t \mapsto f(x,t)$ *est dérivable sur* I ,
2. $\exists\, g \in \mathcal{L}^1(E,\mathbb{R}_+)$ *telle que* $\forall\, t \in I, \quad \left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right| \leq g(x)\ \mu - p.p,$

Alors F *est dérivable sur* I *et*

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} d\mu(x) .$$

Démonstration

Soit $t_0 \in I$. Soit $(t_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de I convergeant vers t_0. Posons :

$$f_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} ,$$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{\partial f(x,t_0)}{\partial t} .$$

D'après le théorème des accroissements finis, $\exists\, \tau_n \in [t_0,t_n]$ tel que :

$$f(x,t_n) - f(x,t_0) = (t_n - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x,\tau_n) \ .$$

Puisque,

$$\forall\, t \in I \ , \quad \left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right| \leq g(x) \ \mu - p.p. \ ,$$

on a aussi $|f_n| \leq g \ \mu{-}p.p.$ et donc d'après le théorème de convergence dominée, $x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ est intégrable sur E et

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} d\mu(x) \ = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) d\mu(x) \ .$$

Par suite, F est dérivable en t_0 et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = F'(t_0) = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \ = \ \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) d\mu(x) \ .$$

D'où le résultat. ■

Étude de l'intégrabilité de F par rapport à la mesure de Lebesgue

Théorème 18 *(Intégrabilité) Soit I est un intervalle borné $I = (a,b)$. Si*
1. *$\forall\, x \in E$, $\ t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.*
2. *$\exists\, g \in \mathcal{L}^1(E,\mathbb{R}_+)$ telle que $\forall\, t \in I$, $\ |f(x,t)| \leq g(x) \ \mu - p.p.$*

Alors F est intégrable sur $[a,b]$ et :

$$\int_{[a,b]} F d\lambda = \int_a^b F(t)dt = \int_a^b \left(\int_E f(x,t) d\mu(x)\right) dt = \int_E \left[\int_a^b f(x,t)dt\right] d\mu(x) \ .$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème 17 à la primitive de $t \mapsto f(x,t)$ puis d'intégrer sur $[a,b]$. ■

Remarques : Ces trois théorèmes restent également vrais quand f, définie sur $E \times I$, est à valeurs complexes.

Exemple : Soit μ une mesure bornée sur $\mathbb{R}$. Posons :

$$\phi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x) \ ,$$

On a :

1. ϕ_μ est continue sur $\mathbb{R}$, car $t \mapsto e^{itx}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $|e^{itx}| \leq 1$ intégrable puisque

$$\int_E 1 d\mu(x) = \mu(E) < +\infty \ .$$

2. si $\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu(x) < +\infty$, alors ϕ_μ est dérivable.

   En effet, $t \mapsto e^{itx}$ est dérivable et sa dérivée vaut ixe^{itx}, de plus $|ixe^{itx}| \leq |x|$. Donc si $x \mapsto |x|$ est μ-intégrable, on a :

$$\phi'(t) = i \int_E xe^{itx} d\mu(x) \ .$$

   En particulier,

$$\phi_\mu^{'}(0) = i \int_E x d\mu(x) \ ,$$

Contre-exemple : (mesure de Cauchy) Exemple d'une mesure bornée mais telle que ϕ_μ ne soit pas dérivable en 0.
Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telle que

$$\forall\, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad \mu(A) = \int_A \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx \ ,$$

on a bien ,

$$\mu(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = 1 < +\infty$$

mais $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx$ n'existe pas car $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = +\infty$.
De fait, on démontre que $\phi_\mu(t) = e^{-|t|}$, qui n'est pas dérivable en 0. En fait, on ne peut pas ici utiliser ce théorème pour montrer la dérivabilité de ϕ_μ même ailleurs qu'en 0.

Chapitre 4

Mesures à densité, mesures images, mesures produits

L'objectif de ce chapitre est de construire des mesures à partir de mesures connues ou de "transporter" une mesure d'un espace à un autre. En particulier sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, nous n'avons construit que la mesure de Lebesgue λ.

4.1 Mesures définies par les densités

Théorème 19 *Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}(E,\mathbb{R}_+)$. L'application :*

$$A \in \mathcal{A} \mapsto \int_A f d\mu = \nu(A)$$

définit une mesure sur $(E,\mathcal{A})$ telle que

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0 \; .$$

On dit que ν est de densité f par rapport à μ.

Démonstration

ν est clairement à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et $\nu(\emptyset) = 0$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) &= \int f \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} 1\!\!1 A_n \right) d\mu \quad , \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f 1\!\!1 A_n d\mu \quad \text{(th. 9)} \quad , \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) \quad . \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Réciproque : Théorème de Radon-Nicodym (hors du cadre de ce cours).
Exemples : Dans de nombreuses applications, on considère des mesures définies par des densités par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, comme :

$$\text{La densité de Cauchy :} \quad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \ ,$$

$$\text{La densité de Gauss :} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \ ,$$

$$\text{La densité exponentielle :} \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \ .$$

Les mesures à densité sont très utiles et le théorème suivant est très largement utilisé:
Théorème 20 *Soit* $(E,\mathcal{A},\mu)$ *,* ν *une mesure de densité* f *par rapport à* μ*. Soit* $h \in f \in \mathcal{M}(E,\mathbb{R})$*. L'application* h *est* ν*-intégrable ssi le produit* $h.f$ *est* μ *intégrable et on a*

$$\int h d\nu = \int h.f d\mu \ .$$

Par facilité de notation, on notera dans ce cas:

$$d\nu = f d\mu \quad .$$

Montrer en exercice que cette égalité est vraie pour les fonctions indicatrices, puis pour les fonctions étagées, puis vraie pour les fonctions mesurables positives, puis pour les fonctions intégrables.

4.2 Mesures images

Définition 21 *Soit* $(E,\mathcal{A},\mu)$ *un espace mesuré,* $(F,\mathcal{B})$ *un espace mesurable, et* T *une application mesurable de* $(E,\mathcal{A})$ *dans* $(F,\mathcal{B})$*. On appelle "mesure image de* μ *par* T*", la mesure* μ_T *sur* $(F,\mathcal{B})$ *définie par :*

$$\forall B \in \mathcal{B} \ , \quad \mu_T(B) = \mu\left[T^{-1}(B)\right] = \mu o T^{-1}(B) \ .$$

Application : Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ l'espace mesurable des boréliens. Soit X une variable aléatoire de $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. On définira l'image par X de P par :

$$\forall a \in \mathbb{R} \ , \quad \mathbb{P}_X(]-\infty,a]) = \mathbb{P}\left[X^{-1}(]-\infty,a])\right] = F_X(a) = \mathbb{P}(X \in]-\infty,a]) \ .$$

On retrouve ici la notion de fonction de répartition de X.
Dans les applications, il est alors essentiel de savoir calculer l'intégrale suivante :

$$\int_\Omega \varphi(X) d\mathbb{P} = \int_\Omega \varphi \circ X d\mathbb{P} = \int_\Omega \varphi(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) \ .$$

Dans un cadre plus large le th. suivant répond à cette question:

Théorème 21

Le calcul d'une intégrale par rapport à une mesure image μ_T se fait de la façon suivante.

1. $\forall\, h \in \mathcal{M}(F,\overline{\mathbb{R}}_+)$, *on a :*
$$\int_F^* h d\mu_T = \int_E^* hoT d\mu \ ,$$
2. $f \in \mathcal{M}(F,\mathbb{R})$*est* μ_T*-intégrable si et seulement si* foT *est* μ*-intégrable, et on a :*
$$\int_F f d\mu_T = \int_E foT d\mu \ .$$

Démonstration

La démonstration est classique: on montre que cette égalité est vraie pour les fonctions indicatrices, puis pour les fonctions étagées, puis vraie pour les fonctions mesurables positives, puis pour les fonctions intégrables.

1) Démontrons d'abord que la proposition est vraie quand $h = \mathbb{1}_B$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. La relation à démontrer s'écrit :

$$\int_F^* \mathbb{1}_B d\mu_T = \mu_T(B) = \int_E^* \mathbb{1}_B(T(\omega))d\mu(\omega) \ ,$$

Or, par définition,le membre de gauche s'écrit:

$$\int_F^* \mathbb{1}_B d\mu_T = \int_E^* \mathbb{1}_{T^{-1}(B)} d\mu \ = \mu(T^{-1}(B)) \ .$$

et, le membre de droite s'écrit:

$$\int_E^* \mathbb{1}_B(T(\omega))d\mu(\omega) \ = \mu(\{\omega \mid t(\omega) \in \mathcal{B} = \mu(T^{-1}(B)) \ .$$

La proposition est donc vraie dans ce cas là. Par linéarité de $\int^*$, la proposition sera vraie pour toute fonction $h \in \mathcal{E}(F,\overline{\mathbb{R}}_+)$ et par le théorème de Beppo-Levi pour toute fonction $h \in \mathcal{M}(F,\overline{\mathbb{R}}_+)$.

2) $f \in \mathcal{M}(F,\mathbb{R})$ est μ_T-intégrable si f^+ et f^- le sont, et on a alors:

$$\int_F f d\mu_T = \int_F^* f^+ d\mu_T - \int_F^* f^- d\mu_T = \int_E^* f^+ oT d\mu - \int_E^* f^- oT d\mu = \int_E^* (f^+ - f^-) oT d\mu \, .$$

D'où,

$$\int_F f d\mu_T = \int_E foT d\mu \quad . \qquad \blacksquare$$

Applications :

Quand T est à valeurs dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, en prenant pour h la fonction identité sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto t$, cette proposition implique la formule de changement de variable suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} t d\mu_T(t) \ = \ \int_E T(x)d\mu(x) \ = \int_E T d\mu \ .$$

Application aux calculs des probabilités : si $T = X$ représente une variable aléatoire, on retrouve

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \int_\Omega X d\mathbb{P} \;=\; \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \;=\; \int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}_X(x)\ .$$

et

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) \;=\; \int_\Omega \varphi \circ X d\mathbb{P} \;=\; \int_\Omega \varphi(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) \;=\; \int_\mathbb{R} \varphi(x) d\mathbb{P}_X(x)\ .$$

Cette dernière égalité permet de se ramener à des intégrales de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ qui sous des conditions le plus souvent vérifiées sont égales aux classiques intégrales de Riemann.

Application: lois de probabilités usuelles à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$.

- Si $\mathbb{P}_X$ est une mesure dicrète sur $\mathbb{N}$ elle peut s'écrire

$$\mathbb{P}_X = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \delta_n\ , \text{ avec } \mathbb{P}_X(n) = \mathbb{P}(X = n) = \alpha_n\ ,$$

  et on obtient la formule déjà connue :

$$\mathbb{E}(X) = \int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}_X(x) = \int_\mathbb{R} x \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n d\delta_n(x) \right)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \int_\mathbb{R} x d\delta_n(x)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n n$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} n.\mathbb{P}_X(n)\ .$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} n.\mathbb{P}(X = n)\ .$$

  Cette formule se généralise au cas continu :

- Si $\mathbb{P}_X$ est une mesure à densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ elle peut s'écrire

$$d\mathbb{P}_X(x) = f(x) d\lambda(x)\ ,$$

  et on obtient la formule déjà connue (mais non justifiée):

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X dP = \int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}_X(x) \;=\; \int_\mathbb{R} x f(x) d\lambda(x)\quad .$$

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_\Omega \varphi(X) dP = \int_\mathbb{R} \varphi(x) d\mathbb{P}_X(x) \;=\; \int_\mathbb{R} \varphi(x) f(x) d\lambda(x)\quad .$$

Dans la majorité des cas il suffit donc de calculer une intégrale de Riemann : par exemple,

1. on dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$ ssi
$$d\mathbb{P}_X = \lambda e^{-\lambda x} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(x) d\lambda(x) .$$
2. on dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne 0 et de variance 1 et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ ssi
$$d\mathbb{P}_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} 1\!\!1_{\mathbb{R}}(x) d\lambda(x) .$$

En exercice :
Montrer dans le cas 1) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$.
Montrer dans le cas 2) $\mathbb{E}(X) = 0$ et $E(X^2) = 2$.

Exemple de mesure image: Posons $(E,\mathcal{A},\mu) = ([0,1],\mathcal{B}_{[0,1]},\lambda)$ et $T(x) = -\log x$. Alors T est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc ici, $(F,\mathcal{B}) = (\mathbb{R}_+,\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})$ et on a pour tout $t \geq 0$,:
$$\mu_T([0,t]) = \mu(\{x : -\log x \leq t\}) = \mu\left(\{x : x \geq e^{-t}\}\right) = 1 - e^{-t} = \int_0^t e^{-u} du .$$
μ_T est définie par la densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, définie par $f(u) = e^{-u} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(u)$.
Donc $d\mu_T(t) = e^{-t} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+} d\lambda(t)$ Soit alors à calculer l'intégrale
$$\int_0^1 -\log x dx = \int_E T d\mu .$$
En appliquant la formule de changement de variable on a :
$$\int_0^1 -\log x dx = \int_F t d\mu_t(t) \ = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 1 .$$
Dans le cas présent, on pouvait calculer l'intégrale initiale :
$$\int_0^1 -\log x dx = -\left[x \log x\right]_0^1 + \int_0^1 dx = 1 .$$
Dans d'autres cas, le changement de variables s'avère indispensable et revient à prendre une mesure image.
Applications : si U est une variable alétaoire uniforme sur $[0,1]$ alors $-ln(U) \rightsquigarrow \mathcal{E}(1)$.

4.3 Mesure produit

Soient $(E_1,\mathcal{A}_1,\mu_1)$ et $(E_2,\mathcal{A}_2,\mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. Cela signifie que pour chacun d'entre eux, il existe une famille $\{B_n\}$ d'éléments de la tribu qui recouvre l'espace $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(B_n) < +\infty$. Ceci est donc en particulier vrai pour $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$.
Définition 22 *On appelle mesure produit de μ_1 par μ_2, l'unique mesure sur $(E_1 \times E_2,\mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2)$ définie par :*
$$\forall A_1 \in \mathcal{A}_1 , \forall A_2 \in \mathcal{A}_2 , \quad \mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1).\mu_2(A_2) .$$

Exemple d'application :
Sur $\mathbb{R}^2$ muni de la tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, on définit la mesure de Lebesgue $\lambda^2 = \lambda \otimes \lambda$.
Il nous reste donc a construire et à savoir calculer l'intégrale de fonctions mesurables par rapport à cette mesure produit. Ce problème difficile est résolu par le théorème suivant:

Théorème 22 *(Fubini) Soit* $f \in \mathcal{M}(E_1 \times E_2, \overline{\mathbb{R}}_+)$*, alors*

$$\begin{array}{cccc} f_{x_1} : & E_2 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & x_2 & \mapsto & f_{x_1}(x_2) = f(x_1,x_2) \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{cccc} f_{x_2} : & E_1 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & x_1 & \mapsto & f_{x_2}(x_1) = f(x_1,x_2) \end{array}$$

sont mesurables, et :

$$\int^*_{E_1 \times E_2} fd(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int^*_{E_1} \left[\int^*_{E_2} f_{x_1} d\mu_2 \right] d\mu_1 = \int^*_{E_2} \left[\int^*_{E_1} f_{x_2} d\mu_1 \right] d\mu_2 \ .$$

De plus, si $f \in \mathcal{M}(E_1 \times E_2, \mathbb{R})$ *est* $\mu_1 \otimes \mu_2$ *-intégrable, alors* f_{x_1} *et* f_{x_2} *sont intégrables par rapport à* μ_2 *et* μ_1 *respectivement, et on a :*

$$\int_{E_1 \times E_2} fd(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{E_1} \left[\int_{E_2} f_{x_1} d\mu_2 \right] d\mu_1 = \int_{E_2} \left[\int_{E_1} f_{x_2} d\mu_1 \right] d\mu_2 \ .$$

La démonstration de ce théorème est délicate et dépasse le cadre de ce cours.

Exemple d'application : :
Prenons $([0,1]^2, \mathcal{B}_{[0,1]^2}, \lambda^2)$ et posons :

$$f(x_1,x_2) = \max(x_1,x_2) \ ,$$

Calculons:

$$\int_{[0,1]^2} fd(\lambda \otimes \lambda) \ .$$

Comme $|f| \leq 1$, on obtient que f est $\lambda \otimes \lambda$-intégrable, et

$$\int fd(\lambda \otimes \lambda) = \int \left[\int f_{x_1}(x_2) dx_2 \right] dx_1 \ ,$$

Or,

$$\int f_{x_1}(x_2)dx_2 = \int_0^{x_1} x_1 dx_2 + \int_{x_1}^1 x_2 dx_2 = x_1^2 + \left[\frac{x_2^2}{2} \right]_{x_1}^1 = x_1^2 + \frac{1}{2} - \frac{x_1^2}{2} \ ,$$

Donc,

$$\int fd(\lambda \otimes \lambda) = \int_0^1 \frac{1 + x_1^2}{2} dx_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \ .$$

Remarque : On peut aussi calculer cette intégrale par une autre méthode en utilisant la mesure image de $\lambda \otimes \lambda$ par f :
Cette mesure image est donnée par :

$$\forall x \in [0;1] \ , \quad \nu([0,x]) = \lambda \otimes \lambda \left(\{ f^{-1}([0,x]) \} \right) \ = \lambda \otimes \lambda \left([0,x] \times [0,x] \right) \ = x^2 = \int_0^x 2u du \ .$$

Donc ν admet la fonction g définie par $g(u) = 2u\mathbb{1}_{[0,1]}(u)$ comme densité par rapport à λ, d'où

$$\int_{[0,1]^2} fd(\lambda \otimes \lambda) = \int_0^1 u.2udu = \frac{2}{3} .$$

Ce théorème est extrêmement puissant. Finalement on obtient

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ continue alors on peut toujours inverser l'ordre d'intégration.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue sur un compact $[a,b] \times [c,d]$ alors on peut toujours inverser l'ordre d'intégration sur ce compact.
- $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I compact et $\forall t \in I$, $|f(t,x)| \leq g(x)$ et $g \in \mathcal{L}^1$ alors on peut toujours inverser l'ordre d'intégration sur I et $\mathbb{R}$.

Par contre, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'est pas continue, il faut s'assurer que f est λ^2-intégrable.

Application aux probabilités, couples de variables aléatoires

Dans la pratique si f est une densité sur $\mathbb{R}^2$ d'un couple de variables aléatoires (X,Y), alors, pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue (p.p.),

$$\mathbb{E}\left(\phi(X,Y)\right) = \int\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,y)f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(x,y)f(x,y)dx\right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(x,y)f(x,y)dy\right) dx .$$

Exemple:

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(X<Y)}\right) = \mathbb{P}(X < Y) = \int\int_{\Delta} f(x,y)dxdy .$$

avec $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$.

Donc

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^y \phi(x,y)f(x,y)dx\right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_x^{+\infty} \phi(x,y)f(x,y)dy\right) dx .$$

Chapitre 5

Exercices

Rappels et compléments sur les ensembles

Exercice 1 :

Dénombrement : Soit $A = \{0,1\}$.
$\mathcal{P}(A)$ désigne l'ensemble des parties de A.

1. Énumérer $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.
2. Soit B un ensemble fini. On pose $\lambda_k = \sharp\left[\mathcal{P}^k(B)\right]$ (cardinal de $\mathcal{P}^k(B)$, où pour tout $k \geq 1$,
$$\mathcal{P}^k(B) = \mathcal{P}\left(\mathcal{P}^{k-1}(B)\right) .$$
Calculer λ_k en fonction de $\sharp B$.

Exercice 2 :

Fonction indicatrice d'un ensemble :
Pour une partie A d'un ensemble X, la fonction $\mathbb{1}_A \ : \ X \longrightarrow \{0,1\}$, définie par :
$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est appelée *fonction indicatrice* de A.
Soient A et B deux parties quelconques d'un ensemble X. Exprimer en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ les fonctions indicatrices qui suivent :

1. $\mathbb{1}_{A^c}$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\cup B}$.
2. $\mathbb{1}_{A\setminus B}$, $\mathbb{1}_{A\Delta B}$. On rappelle que par définition :
$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) .$$

Exercice 3 :

Fonctions et opérations ensemblistes :

Soient E et F deux ensembles, et une application $f : E \longrightarrow F$.
Les ensembles A et B désignant des parties de E ou F, démontrer les propriétés suivantes :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Donner un exemple d'inclusion stricte.
3. $f(A^c) \neq (f(A))^c$. Donner un exemple.
4. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
5. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
6. $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.
7. $f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$.

Limites inférieures et supérieures

Exercice 4 :

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels.
Montrer que si $\forall n \quad a_n \leq b_n$ alors $\inf_n a_n \leq \inf_n b_n$ et $\sup_n a_n \leq \sup_n b_n$.

Exercice 5 :

Limites inférieures et supérieures d'une suite de réels :
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. On définit les *limites inférieure et supérieure* de $(u_n)_{n\geq 0}$ par :

$$\liminf_n u_n = \sup_n \left(\inf_{k \geq n} u_k \right) \qquad \text{et} \qquad \limsup_n u_n = \inf_n \left(\sup_{k \geq n} u_k \right) .$$

Ces deux nombres appartiennent à $\overline{\mathbb{R}}$.

1. Soit
$$u_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} ,$$
la suite prenant alternativement les valeurs 0 et 1. De quelle partie de $\mathbb{N}$ la fonction $n \mapsto u_n$ est-elle la fonction indicatrice? Calculer $\liminf u_n$ et $\limsup u_n$.
2. Démontrer que pour toute suite de réels $(u_n)_{n\geq 0}$,
$$\liminf_n u_n \leq \limsup_n u_n .$$
3. Que peut-on dire si
$$\liminf_n u_n = \limsup_n u_n = l \in \overline{\mathbb{R}} .$$
4. Étudier la réciproque.

Limites inférieures et supérieures d'une suite d'ensembles.

Exercice 6 :

Soient E un ensemble et $(A_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ une suite de parties de E. Les limites inférieures et supérieures de cette suite se définissent par

$$A_* = \liminf A_n = \bigcup_{k\,\in\,\mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} A_n \quad ,$$

$$A^* = \limsup A_n = \bigcap_{k\,\in\,\mathbb{N}} \bigcup_{n \geq k} A_n \quad ,$$

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$S_k = \bigcup_{n \geq k} A_n \quad , \quad T_k = \bigcap_{n \geq k} A_n \quad .$$

Démontrer les assertions suivantes.

1. (T_k) (resp. (S_k)) est croissante (resp. décroissante).
2. $\limsup A_n \supset \liminf A_n$.
3. Montrer que A^* est l'ensemble des éléments de Ω appartenant à une infinité de A_n, et que A_* est l'ensemble des éléments appartenant à tous les A_n sauf au plus à un nombre fini d'entre eux.
4. Si $A_* = A^*$, on utilisera la notation $\lim_n A_n$ et on dira que la suite de parties $(A_n, n \in \mathbb{N})$ est convergente.
   Montrer que si la suite $(A_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) alors $\lim_n A_n$ existe et $\lim_n A_n = \bigcup_n A_n$ (resp. $\lim_n A_n = \bigcap_n A_n$).

5. Les suites de parties suivantes sont-elles convergentes?

   (a) $A_n = \{]-n;+n[, n \in \mathbb{N}\}$.
   (b) $A_n = \left\{[0; 1 + \frac{(-1)^n}{n}], n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
   (c) $A_n = A$ si n pair, $A_n = B$ si n impair où A et B sont deux parties données de E.
   (d) Dans $\mathbb{R}$, soit $A_n =]-\infty, a_n]$ où (a_n) est une suite de nombres réels que l'on supposera convergente puis non convergente.
6. (facultatif) Soient $(A_n, n \in \mathbb{N})$ et $(B_n, n \in \mathbb{N})$ deux suites de parties de E. Montrer que
   (a) $\limsup(A_n^c) = (\liminf A_n)^c$.
   (b) $\liminf(A_n^c) = (\limsup A_n)^c$.
   (c) $\limsup_n(A_n \bigcup B_n) = (\limsup_n A_n) \bigcup (\limsup_n B_n)$,
   (d) $\limsup_n(A_n \bigcap B_n) \subset (\limsup_n A_n) \bigcap (\limsup_n B_n)$. Trouver un exemple où cette inclusion est stricte.

Limites inférieures et supérieures de fonctions.

Exercice 7 :

Rappels sur les suites de fonctions.
Soit Ω un ensemble et $(f_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions réelles dédinies sur Ω. On appelle **limite supérieure et limite inférieure** de cette suite les fonctions qui à tout élément de Ω fait correspondre la limite supérieure et la limite inférieure de la suite de nombres réels ($(f_n(x), n \in \mathbb{N})$:

$$\limsup_n f_n : \quad x \mapsto \limsup_n f_n(x)$$
$$\liminf_n f_n : \quad x \mapsto \liminf_n f_n(x)$$

Si pour tout élément x de Ω, $\liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x) = f(x)$, on dit que la suite $(f_n, n \in \mathbb{N})$ **converge ponctuellement** sur Ω vers la limite f (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$), et on note $\lim_n f_n = f$.
Montrer les assertions suivantes:

1. $\mathbb{1}_{A^*} = \limsup_n \mathbb{1}_{A_n}$
2. $\mathbb{1}_{A_*} = \liminf_n \mathbb{1}_{A_n}$
3. Si $A_* = A^*$, on a :
$$\mathbb{1}_{\lim_n A_n} = \lim_n \mathbb{1}_{A_n} \ .$$

Tribus

Exercice 8 :

Montrer que l'intersection de 2 tribus est une tribu.

Exercice 9 :

Tribus d'un ensemble fini.
Soit $X = \{0,1,2\}$.
- Donner la liste complète des tribus que contient $\mathcal{P}(X)$.

Tribu engendrée

Exercice 10 :

Soit $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \cap [0,1]$ l'ensemble $\{B \cap [0,1], B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$.

1. Montrer que :
$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \cap [0,1] = \{C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \mid C \subset [0,1]\} .$$
2. Montrer que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \cap [0,1]$ est une tribu sur $[0,1]$. On dit que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \cap [0,1]$ est la **tribu trace de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ sur $[0,1]$, et on la note** $\mathcal{B}_{[0,1]}$.

Exercice 11 :

Soit E un ensemble quelconque, (par exemple $\mathbb{N}$)

1. Démontrer que si $\mathcal{E} = \{\{x\}; x \in E\}$, alors en posant $\mathcal{F} = \{A \subset E : A$ dénombrable ou fini ou A^c dénombrable ou fini$\}$ on a $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$

2. Montrer que si E est fini ou dénombrable, alors $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(E)$.

Semi-anneau booléen

Exercice 12 :

Montrer que, avec les notations du cours, $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}_d$ sont des semi-anneaux booléens, mais pas $\mathcal{I}_0$ ni $\mathcal{D}_d$.

Exercice 13 :

Montrer le résultat du cours sur les semi-anneaux d'un espace produit :
Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des semi-anneaux booléens de parties de E et F respectivement. Monter que $\mathcal{I} = \{A \times B \ : \ A \in \mathcal{A} \ \ B \in \mathcal{B}\}$ est un semi anneau booléen de parties de $E \times F$.

Applications et espaces mesurables

Exercice 14 :

Démontrer le théorème du cours sur la somme, le produit etc. de fonctions mesurables:
Théorème : Soient $f,g \in \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}})$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

1. αf, $(f+g)$ quand elle est définie, $f.g$, $\sup(f,g)$, $\inf(f,g)$, $f^+ = \sup(f,0)$, $f^- = \inf(f,0)$ sont des fonctions de $\mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}})$.
2. Soit $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}})$. Alors les fonctions $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ et $\lim_n f_n$ (quand elle existe) sont dans $\mathcal{M}(E,\overline{\mathbb{R}})$.

Exercice 15 :

On rappelle que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite **borélienne** si elle est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ mesurable. On pourra admettre les deux premières questions:

1. Montrer que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant en tout point une limite à gauche et une limite à droite dans $\overline{\mathbb{R}}$ et ayant au plus un ensemble dénombrable de points de discontinuité est borélienne.
   Indications :
   On posera $A = \{x \mid f^+(x) \neq f^-(x)\}$ et on écrira $f = f\mathbb{1}_{A^c} + f\mathbb{1}_A$
2. Montrer que toute application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.
   Indications :
   (a) en ce cas on montrera $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ où $A_n = \{x \mid f^+(x) - f^-(x) > \frac{1}{n}\}$.
   (b) On montrera ou on admettra que A_n est fini.
   (c) On montrera que A est fini ou dénombrable.
3. Les applications suivantes sont-elles boréliennes?

$$\begin{aligned}
f_1 \ &: \ x \mapsto f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \ , \\ 1/x & \text{si } x > 0 \ . \end{cases} \\
f_2 \ &: \ x \mapsto f_2(x) = exp(\cos x) \ . \\
f_3 \ &: \ x \mapsto f_3(x) = \text{partie entiere de x} \ . \\
f_4 \ &: \ x \mapsto f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \ , \\ 0 & \text{si } x = 1 \ . \end{cases}
\end{aligned}$$

Espaces mesurés

Exercice 16 :

Soit $(E,\mathcal{B},\mu)$ un espace mesuré.
Monter que

$\mathcal{B}_\mu = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, B_1,B_2 \in \mathcal{B}$ tel que $B_1 \subset X \subset B_2$ et $\mu(B_2 \setminus B_1) = 0\}$

est une tribu contenant $\mathcal{B}$.

Exercice 17 :

On considère l'espace mesurable $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ et l'application m définie sur $(B_{\mathbb{R}})$ par :

$$m(B) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \mathbb{1}_B(n)\ .$$

Calculer $m([0,2])$, $m(\{2\})$, $m(]-\infty,0])$, $m(\mathbb{N})$, $m(\mathbb{R})$. L'application m est-elle une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$?

Exercice 18 :

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. On rappelle et ce résultat sera revu, que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc positive, alors:

$$\mathbb{E}(X) = \int^* X dP = \int X dP\ .$$

1. Montrer que dans ce cas,
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > n)\ .$$
2. En déduire $\mathbb{E}(X)$, si X suit une loi telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ où $p \in]0,1[$.

Exercice 19 :

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x < 0\ , \\ 1 & \text{si } x \geq 0\ . \end{cases}$$

1. Justifier le fait que f est borélienne.
2. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. L'application est-elle continue $\lambda - p.p.$? Que vaut $\int^* f d\lambda$?
3. Soit δ_0 la mesure de Dirac en zéro sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. L'application est-elle continue $\delta_0 - p.p.$? Que vaut $\int^* f d\delta_0$?

Convergence monotone

Exercice 20 :

Démontrer les résultats du cours sur le lien entre intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et intégrale de Riemann.

1. Soit $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ l'ensemble des réels muni de la mesure de Lebesgue. Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors,
$$\int_{\mathbb{R}}^{*} f d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad (\in \overline{\mathbb{R}}) \quad .$$
2. Soit f continue à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est absolument convergente au sens de Riemann ssi f est Lebesgue intégrable et, dans ce cas :
$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad .$$
3. Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$ compact de $\mathbb{R}$. Montrer
$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx \ .$$
4. Soit f une fonction réelle continue sur $]a,b[$ de limite ∞ en a et b. Si $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente au sens de Riemann alors f est Lebesgue intégrable et
$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$$

Exercice 21 :

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définie par
$$f_n(x) = (1 - e^{-nx^2})e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \quad .$$
Calculer la limite suivante : $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda$.

Exercice 22 :

On rappelle que deux variables aléatoires sont indépendantes ssi $\forall B_1,B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, les événements $\{X \in B_1\}$ et $\{Y \in B_2\}$ sont indépendants donc ssi

$$\mathbb{P}(\{X \in B_1\} \cap \{Y \in B_2\}) = \mathbb{P}(\{X \in B_1\})\mathbb{P}(\{Y \in B_2\}) .$$

Démontrer la proposition suivante:
Si X et Y sont deux variables aléatoires positives et indépendantes, alors

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] .$$

On commencera par établir le résultat pour des fonctions indicatrices, puis pour des variables positives étagées, puis pour des v.a. positives.

Convergence bornée

Exercice 23 :

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \ , \\ 2n - n^2x & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \ , \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f_n.
2. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$.
3. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx .$$

Exercice 24 :

Soit l'espace mesuré $([-1,+1],\mathcal{B}_{[-1,+1]},\lambda)$, λ la mesure de Lebesgue. On considère pour $n \geq 1$ les fonctions f_n définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } -1 < x < 1 \ , \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_{[-1,+1]} f_n d\lambda = 0$.

Exercice 25 :

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue.
On considère la suite $\{f_n,n \geq 1\})$ de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sin(\frac{x}{n})e^{-x} & \text{si } 0 \leq x \ , \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

1. Justifier le fait que pour tout $n \geq 1$, l'application f_n est borélienne.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1})$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\lambda$.

Exercice 26 :

Soit $a > 0$. Posons :

$$f_n(x) = \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1+x^2} \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x) .$$

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,+\infty]} f_n d\lambda .$$

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 27 :

Soit λ la mesure de Lebesgue définie sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Soit F, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\, t \geq 0\,, \quad F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x^2-tx} d\lambda(x)\ .$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $[0+\infty[$.
2. Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$.
3. Évaluer $F'(0)$.

Exercice 28 :

Soit λ la mesure de Lebesgue définie sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Soit F, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, t > 0\,, \quad F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx\ .$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $]0+\infty[$.
2. Montrer que F est dérivable et que

$$\forall\, t > 0\,, \quad F^{'}(t) = -\frac{1}{1+t^2}\ .$$

3. En déduire $F(t)$.

Exercice 29 :

Soit λ la mesure de Lebesgue définie sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Soit Γ, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, t > 0 \quad \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx\ .$$

1. Étudier la continuité de Γ.
2. Montrer que Γ est dérivable.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Gamma(n) = (n-1)!\ .$$

4. calculer $\Gamma(1/2)$ en utilisant le résultat : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
5. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{t\to+\infty} \Gamma(t) \text{ et } \lim_{t\to 0^+} \Gamma(t)\ .$$

Mesures à densité, mesures images

Exercice 30 :

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue.

1. Soit f une application numérique positive mesurable. Rappeler à quelle condition la mesure μ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ est f est une mesure bornée (resp. une probabilité).
2. Soit une mesure bornée μ définie sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ par sa fonction de répartition :

$$\mu(]-\infty;x]) = F(x) = (1-e^{-\alpha x})\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x),\, \alpha > 0\ .$$

   Montrer que cette mesure admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue que l'on précisera. La mesure μ est-elle une mesure de probabilité?
   Indication : on montrera que si F est dérivable et si F' est continue, alors la densité f est F'.
3. La mesure μ admet-elle un moment d'ordre 1 (L'application identité est intégrable)? un moment d'ordre 2 (La fonction $x \mapsto x^2$ est intégrable)? Le cas échéant, les calculer.
4. Reprendre la question précédente en prenant pour mesures les mesures admettant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue, les densités suivantes :

   (a) la densité de Cauchy.
   (b) la densité de Gauss.

Exercice 31 :

Soit μ la probabilité gaussienne centrée réduite sur l'espace $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, dont la densité par rapport à λ est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\ ,x \in \mathbb{R}\ .$$

1. Soit T l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $T(x) = 2x + 5$. Déterminer la mesure image μ_T de μ par T.
2. En déduire que μ_T est une mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
3. Montrer que l'aplication identité est μ_T-intégrable et calculer son intégrale.
4. Répondre aux questions précédentes pour $T(x) = x^2$,$x \in \mathbb{R}$.

Exercice 32 :

Montrer que dans le cas de $\mathbb{R}$ et de la mesure de Lebesgue, le théorème de la mesure image permet de démontrer la formule du changement de variable pratiquée dans l'intégrale de Riemann d'une fonction continue:

Théorème 23 *si T est dérivable croissante alors :*

$$\int_c^d f\circ T(u)T'(u)du \;=\; \int_a^b f(x)dx \text{ où } T([c;d]) = [a;b]\ .$$

si T est dérivable décroissante alors :

$$\int_c^d f\circ T(u)T'(u)du \;=\; -\int_a^b f(x)dx \text{ où } T([c;d]) = [a;b]\ .$$

$\boxed{\text{Mesures produits}}$

Exercice 33 :

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2},\lambda^2)$, où λ^2 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\ , \\ 0 & \text{sinon}\ . \end{cases}$$

1. A t-on $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy$?
   Indications: on utilisera le résultat suivant :
   $$\text{Posons } h(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}\ ,\text{ alors } \frac{\partial}{\partial x}h(x,y) = f(x,y)\ .$$
2. Que peut-on conclure?

Exercice 34 :

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2},\lambda^2)$, où λ^2 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \mathbb{1}_\Delta(x,y)e^{-(x+y)}\ ,$$

où $\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 0\leq y\leq x\}$.

1. Faire le graphe du domaine Δ.

2. Justifier le fait que f est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mesurable.
3. Calculer $\int f d\lambda^2$.

Exercice 35 :

Soit X une variable aléatoire de loi de densité $\mathcal{E}(\lambda)$, et Y une variable aléatoire de loi de densité $\mathcal{E}(\mu)$. On suppose X et Y indépendantes donc que le couple (X,Y) admet pour densité:

$$f(x,y) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \mu e^{-\mu y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) \ .$$

1. Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.
3. Soit $Z = \frac{X}{Y}$. Calculer la fonction de répartition, puis la densité de Z.

$\boxed{\text{Révisions}}$

Exercice 36 :

Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ et $(E,\mathcal{B})$ des espaces mesurables, et $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'applications mesurables de Ω dans E.

1. Soit B un élément de $\mathcal{B}$. On pose alors :
$$\forall x \in \Omega, K(x) = \inf\{p \in \mathbb{N}^* \mid f_p(x) \in B\}, \text{ avec } \quad \inf \emptyset = +\infty .$$
Démontrer que l'application $K : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable.
2. Soit t une application mesurable de Ω dans $\mathbb{N}^*$. Démontrer que l'application φ définie par :
$\begin{array}{cccc} \varphi & \Omega & \longrightarrow & E \\ & x & \mapsto & f_{t(x)}(x). \end{array}$ est mesurable.

Exercice 37 :

Soit $(E,\mathcal{E},\mu)$ un espace mesuré.
Soit $(A_n,\, n \in \mathbb{N})$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}$.

1. Montrer que $\liminf_n A_n = A_*$ et $\limsup_n A_n = A^*$ sont des éléments de $\mathcal{E}$.
2. Montrer que $\mu(A_*) \leq \liminf_n \mu(A_n)$.
3. Montrer que s'il existe n_0 tel que $\mu(\cup_{n=n_0}^{+\infty} A_n) < +\infty$, alors $\limsup_n \mu(A_n) \leq \mu(A^*)$.

Exercice 38 :

Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $\{A_n\}_{n\geq 1}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$.

1. Pour tout $n \geq 2$, on pose
$$B_n = A_n \backslash (\bigcup_{k<n} A_k) ,$$
et $B_1 = A_1$.
Démontrer que $\{B_n\}_{n\geq 1}$ est une suite dans $\mathcal{A}$, constituée de parties deux à deux disjointes de E, telle que
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n .$$
2. En déduire que
$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) .$$

3. Démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty \Longrightarrow \mu(\limsup_n A_n) = 0 \ .$$

Remarque : Ce résultat porte le nom de lemme de Borel-Cantelli et est très utile en probabilités.

Exercice 39 :

Soit n un entier naturel. On définit les applications réelles suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f & : & x \mapsto f(x) = e^{-x^2} \ , \\ g_n & : & x \mapsto g_n(x) = \cos^n x \ . \\ f_n & : & x \mapsto f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} (1-\frac{x^2}{n})^n & \text{si } 0 \leq x < \sqrt{n} \ , \\ 0 & \text{sinon} \ . \end{array} \right. \end{array}$$

1. Vérifier que ces applications sont mesurables.
2. On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. En intégrant par parties, calculer:
$$I_n = \int g_n \mathbb{1}_{[0,\pi/2]} d\lambda \ .$$
3. Montrer que
   (a) $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$
   (b) Montrer ou admettre que :
   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2.4.\ldots(2n)}{1.3.\ldots(2n-1)} = \sqrt{\pi} \ ,$$
   (c) Montrer ou admettre que
   $$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\pi/2} \ .$$
4. Montrer que la suite $(f_n)_n$ est une suite croissante de fonctions positives et en déduire que
$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n d\lambda = \int f \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} d\lambda \ .$$
5. Faire le changement de variable $x^2 = n \sin^2 u$ pour vérifier :
$$\int f_n d\lambda = \int f_n(x) \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}[}(x) dx = \sqrt{n} I_{2n+1} \ .$$

6. En déduire que
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Exercice 40 :

On considère l'application $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx .$$

1. Démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et étudier la limite :
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) .$$
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier la limite
$$\lim_{t\to 0^+} F'(t) .$$
3. Prouver que pour tout $t > 0$, on a :
$$F(t) - F'(t) = \frac{I}{\sqrt{(t)}} \text{ où } I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx .$$
4. En résolvant l'équation différentielle, démontrer que :
$$\forall\, t > 0 \quad F(t) = e^t \left(\frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx \right) .$$
5. En déduire la valeur de I.

Exercice 41 :

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(tx) dx .$$

1. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que φ vérifie une équation différentielle du premier ordre (à préciser).
2. Déterminer l'expression de $\varphi(t)$ pout tout réel t. En déduire l'expression de la transformée de Fourier de la loi normale centrée réduite :
$$\Phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x) \quad \text{avec} \quad \mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} d\lambda(x) .$$

Exercice 42 :

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2},\lambda^2)$, où λ^2 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. On définit l'application h de $\mathbb{R}_+^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$h(x,y) = e^{-xy^2}\sin x \ .$$

1. Montrer que pour tout $b > 0$, h est λ^2-intégrable sur $[0,b] \times [0,+\infty[$. Montrer que
$$\int_0^b \left(\int_0^{+\infty} h(x,y)dy \right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \ .$$
(On utilisera le fait que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)
2. Montrer que $\int_0^b h(x,y)dx = \frac{1}{1+y^4} + g(b,y)$ pour une fonction g à préciser pour laquelle on vérifiera que
$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^{+\infty} g(b,y)dy = 0 \ .$$
3. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^4} dy = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ .$$
4. Déduire de ce qui précède que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ ,$$
et évaluer $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$.

Problème

Exercice 43 :

$$\textbf{Calcul de } \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}dx \quad \text{et de} \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx\ .$$

1. En justifiant la convergence des intégrales, démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:
$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}dx = \frac{2}{t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(tx)}{(x^2+1)^2}dx\ .$$
2. Montrer que l'application φ est paire et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer les limites :
$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to-\infty} \varphi(t)\ .$$
4. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et que :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}^*\ , \quad \varphi'(t) = \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\cos(tx)dx\ .$$
5. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}^*\ , \quad \varphi'(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)}\sin(tx)dx\ .$$
6. Vérifier que :
$$\frac{-x}{x^2+1} = \frac{1}{x(x^2+1)} - \frac{1}{x}\ ;$$
7. En déduire, en justifiant la convergence des deux intégrales :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}^*\ , \quad \varphi'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x(x^2+1)}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x}dx\ .$$
8. Démontrer que l'application :
$$t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x}dx\ .$$
est constante sur $\mathbb{R}^*$.
9. Montrer que φ est deux dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $t > 0$, $\varphi''(t) = \varphi(t)$.
10. Déterminer $\varphi(t)$ pour tout réel t.
11. En utilisant la valeur de $\lim_{t\to 0} \varphi'(t)$, en déduire la valeur de l'intégrale :
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx\ .$$

CPP Grenoble . 2 ième année MAI 2008

Examen : MESURE ET INTÉGRATION

Documents autorisés.	Durée : 2 Heures
Toute question pourra être admise pour faire la ou les suivantes.	
Le sujet comporte deux pages .	
Barême indicatif : I: 5 , II : 4 , III : 5 , IV :6 , V : 3 .	

Exercice 44 :

Soit $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. Pour tout élément A de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ on définit l'élément $-A$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par: $-A = \{-x|\ x \in A\}$. Soit $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} |\ A = -A\}$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$
2. Les applications suivantes sont-elles mesurables de $(\mathbb{R},\mathcal{S})$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$?

$$f: \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},\mathcal{S}) & \longrightarrow & (\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \\ x & \longrightarrow & e^x \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},\mathcal{S}) & \longrightarrow & (\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \\ x & \longrightarrow & cos(x) \end{array}$$

3. Montrer que toute application paire et borélienne est mesurable de $(\mathbb{R},\mathcal{S})$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.
4. Montrer que toute application mesurable de $(\mathbb{R},\mathcal{S})$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est borélienne et paire.

Exercice 45 :

1. Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de fonctions mesurables de $(\Omega,\mathcal{A})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, convergeant ponctuellement vers une fonction f. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int f_{n_0} d\mu < +\infty \ .$$

Montrer qu'alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu \ . \tag{5.1}$$

2. Soit $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda)$ l'espace mesuré des réels où λ désigne la mesure de Lebesgue. On considère la suite de fonctions $g_n(x) = 1\!\!1_{[n;+\infty[}(x)$.
   (a) Montrer que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante qui converge simplement vers la fonction nulle.
   (b) L'égalité (5.1) est-elle vérifiée (avec g_n et λ)?.

Exercice 46 :

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue λ) respectives : $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(x)$ et $f_Y(y) = \mu e^{-\mu y} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(y)$. Soit Z la variable aléatoire, $Z = inf(X,Y)$.

1. Dans quel ensemble Z prend t-elle ses valeurs?
2. Pour t dans cet ensemble, écrire l'événement $\{Z \geq t\}$ en fonction des événements $\{X \geq t\}$ et $\{Y \geq t\}$.
3. En déduire $\mathbb{P}(Z \geq t)$
4. Quelle est la densité de Z (par rapport à λ)?
5. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 47 :

On considère l'application $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t}}{1+x^2} dx \ .$$

1. Démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et étudier la limite
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \ .$$
2. Démontrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier la limite
$$\lim_{t\to 0^+} F'(t) \ .$$

Exercice 48 :

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2},\lambda^2)$, où λ^2 désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$, et $\Delta = [0,1] \times [a,b]$.

$$\text{Soit } f \ : \ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) & \to & (\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \\ (x,y) & \mapsto & x^y 1\!\!1_{\Delta}(x,y) \end{array}$$

1. Justifier le fait que f est mesurable.

2. Justifier le fait que f est λ^2-intégrable.
3. En déduire la valeur de l'intégrale de Riemann :

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx \quad .$$

Table des matières