Maths for fun: Mathématiques des jeux et casse-têtes

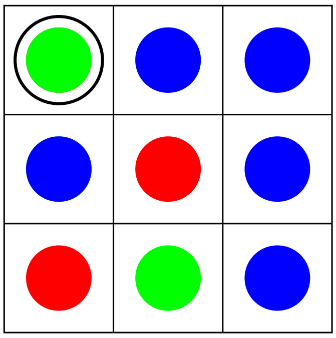
Laurent Fousse `laurent.fousse@imag.fr`

14 décembre 2009

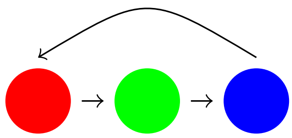
Plan

Un petit jeu à étudier[1]

On considère un clavier magique 3x3 :

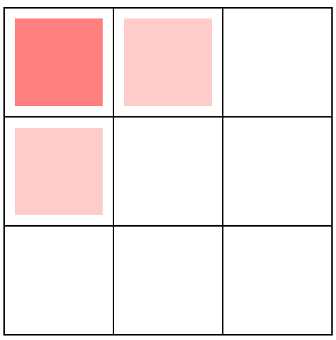


- Chaque case peut cycler sur 3 couleurs ;
- Toucher une case fait avancer sa couleur et celle de ses voisines ;
- Le but est de rendre le clavier monochrome ;
- Est-ce que toutes les positions initiales sont solubles ?
- Quelle est la stratégie ?

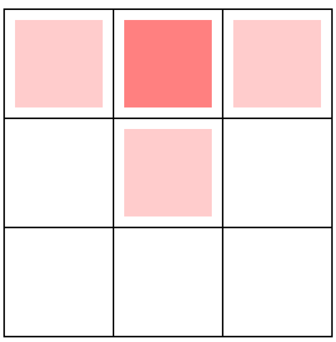


[1] Tiré de *Black & White* de *Lionhead*, sans doute un classique.

Lights Out Puzzle



1	1	
1		



1	1	1
	1	

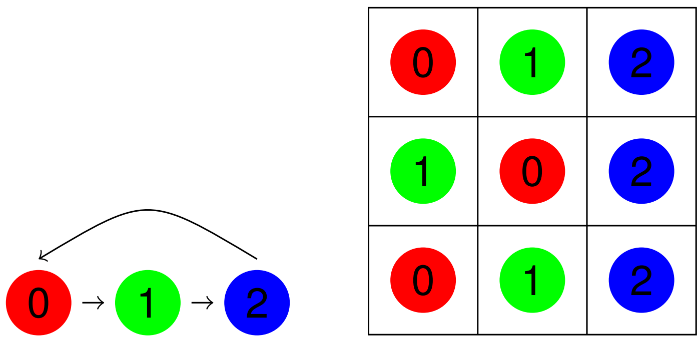
Modélisation

Exemple : $n = 3, c = 3$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -7$$

Modélisation



$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} A^{-1}X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Présentation

- Parentée disputée : Noyes Palmer Chapman (1874)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11 7	12 11
13	14	15	12

Position soluble ?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

11	2	8	9
5	7	10	4
12	3	6	1
13	14	15	

Challenge de Noyes Chapman

Soluble ?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Formalisation

État du jeu

On identifie un état du jeu à la permutation de $\mathcal{S}_{16}$ des labels des cases (la case 16 étant la case vide).

Signature d'une permutation

Il existe un unique homomorphisme ϵ de $\mathcal{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$ tel que $\epsilon(t) = -1$ si t est une transposition.

Formalisation

Permutation paire

Toute permutation se décompose comme produit de transpositions.
On dit que p est une permutation paire si $\epsilon(p) = 1$ et impaire sinon.
Cette définition correspond à la parité du nombre de transpositions utilisées pour écrire p.

Coup élémentaire

Un coup élémentaire valide au jeu de taquin :

- est représentable par un permutation des 16 cases ($\mathcal{S}_{16}$) ;
- échange deux cases voisines ;
- déplace la case vide d'une place dans une direction.

Un coup élémentaire est donc une transposition de $\mathcal{S}_{16}$.

Formalisation

État atteignable

Un état atteignable du jeu est représenté par une permutation qui est égale au produit des transpositions effectuées.

Invariant

Pour un état du jeu de taquin, on définit v la parité de la position de la case vide. Alors

$$\epsilon(p) \cdot v$$

est un invariant du jeu.

Théorème

Les positions solubles sont celles dont l'invariant est égal à celui de la position résolue. Il existe 653837184000 positions solubles.

Présentation

Modélisation

- Une étoile à cinq branches, dont deux présentant une encoche ;
- Un cube (6 faces donc) sur lequel l'étoile peut se déplacer en franchissant certaines arêtes ;
- Une face contient une encoche qu'il faut faire correspondre avec celles de l'étoile.