Maths for fun: Mathématiques des jeux et casse-têtes

Laurent Fousse laurent.fousse@imag.fr

7 décembre 2009

Plan

1. Problématique
   - Présentation
   - Définition d'un jeu
   - Stratégie
2. Jeu résolu
   - Jeu de Nim
3. Casse-tête
   - Présentation
   - Solitaire

Problématique

Mathématiques des jeux...

- Comment se modélise un jeu à *n* (2 joueurs) ?
- À quoi cela sert-il ?
- Quelles questions intéressantes en rapport avec les jeux ?

... et des casse-têtes :

- Est-il soluble ?
- Quelle est sa complexité ?
- Quel modèle pour le représenter ?

Publi-information

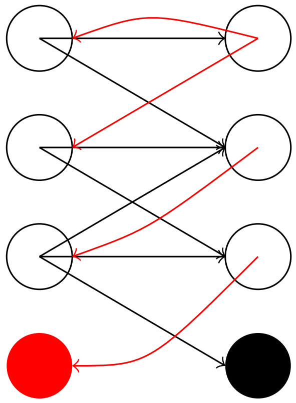
Suivez complètement ces séances pour :

- Épater vos amis avec le Rubik's Cube :
  - compter le nombre de positions accessibles,
  - prouver que toute solution accessible s'atteint en moins de *n* coups,
  - savoir programmer un solveur,
- Lancer des défis insolubles sur le jeu de solitaires (billes) et de taquin,
- Gagner toutes vos parties au jeu de Nim,
- Et savoir résoudre quelques autres casse-têtes.

Satisfait(e) ou remboursé(e).

Définition : jeu à deux joueurs

Graphe $G = (V, E)$ orienté biparti.

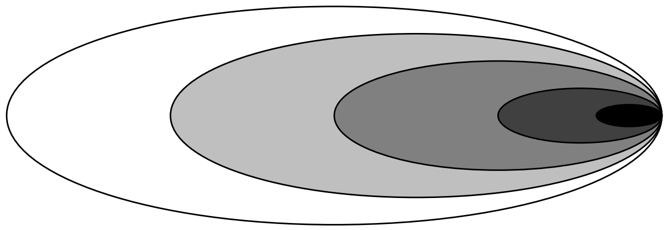


- Nœud = état de la partie ;
- Arête = coup possible ;
- Partie = chemin dans G ;
- États $\mathcal{R}$ victorieux pour rouge ;
- États $\mathcal{N}$ victorieux pour noir ;

Stratégie

- Supposons que Noir commence. A-t-il une stratégie gagnante ?
- On appelle $v : V \longrightarrow \mathcal{P}(V)$ la fonction de transition.

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_0 &= \mathcal{N} \\
\mathcal{N}_{n+1} &= \{y \in V; v(y) \cap \{x \in V; v(x) \subseteq \mathcal{N}_n\} \neq \emptyset\} \\
\mathcal{N}_\infty &= \bigcup_n \mathcal{N}_n
\end{aligned}$$



$\mathcal{N}_n$ est l'ensemble des états du jeu où Noir peut gagner en au plus n coups.

Problèmes

Une stratégie existe donc pour les échecs, les dames, le go, et bien d'autres jeux. Faut-il arrêter de jouer ?

- Le graphe est (souvent) très gros ;
- Problème de complexité en temps et en mémoire.

Un graphe est un objet mathématiquement assez simple :

- recherche de plus de structure (algébrique) ;
- recherche d'invariants ;
- fonctions de valuation.

Exemple de jeu résolu : le jeu de Nim

Règles du jeu

- On dispose de n tas d'objets : $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- À chaque tour, un joueur retire un nombre non nul d'objets d'un seul tas.
- Le gagnant est celui qui retire le dernier objet.

Stratégie gagnante

Fonction de valuation

À un état donné $s = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on associe la valeur

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$$

où $a \oplus b$ désigne le *ou exclusif* entre les représentations binaires des entiers a et b.
Exemple $3 = 11_2$, $5 = 101_2$, $3 \oplus 5 = 110_2 = 6$.

Stratégie gagnante

Lemme

Si $s = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $s' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ sont deux états consécutifs du jeu, alors $f(s) \neq f(s')$.

Corollaire

Si $s \longrightarrow s'$ et $f(s) = 0$ alors $f(s') \neq 0$.

Lemme

Si $f(s) \neq 0$ alors il existe s' tel que $s \longrightarrow s'$ et $f(s') = 0$.

Théorème

Il existe une stratégie gagnante pour le premier joueur ssi $s_0 \neq 0$.

Jeu de Nim : Exemple de partie

À Noir de jouer

$$\begin{array}{rcrr} 11_2 & = & 3 & ||| \\ 101_2 & = & 5 & ||||| \\ 111_2 & = & 7 & ||||||| \\ 1_2 & & & f(s) \end{array}$$

On peut retirer un bâton d'un tas impair pour avoir $f(s') = 0$.

À Rouge de jouer

$$\begin{array}{rcrr} 10_2 & = & 2 & || \\ 101_2 & = & 5 & ||||| \\ 111_2 & = & 7 & ||||||| \\ 0_2 & & & f(s) \end{array}$$

Tout coup nous fera passer à $f(s') \neq 0$. On retire 4 bâtons du troisième tas.

Jeu de Nim : Exemple de partie

À Noir de jouer

$$\begin{array}{rcrr} 10_2 & = & 2 & || \\ 101_2 & = & 5 & ||||| \\ 11_2 & = & 3 & ||| \\ 100_2 & & & f(s) \end{array}$$

On doit retirer 4 bâtons du deuxième tas.

À Rouge de jouer

$$\begin{array}{rcrr} 10_2 & = & 2 & || \\ 1_2 & = & 1 & | \\ 11_2 & = & 3 & ||| \\ 0_2 & & & f(s) \end{array}$$

Tout coup nous fera passer à $f(s') \neq 0$. On retire 2 bâtons du troisième tas.

Jeu de Nim : Exemple de partie

À Noir de jouer

$$\begin{array}{rcll} 10_2 & = & 2 & \| \\ 1_2 & = & 1 & | \\ 1_2 & = & 1 & | \\ 10_2 & & & f(s) \end{array}$$

On doit retirer tous le premier tas.

À Rouge de jouer

$$\begin{array}{rcll} 1_2 & = & 1 & | \\ 1_2 & = & 1 & | \\ 0_2 & & & f(s) \end{array}$$

On retire complètement l'un des deux tas.

Jeu de Nim : Exemple de partie

À Noir de jouer

$$\begin{array}{rcll} 1_2 & = & 1 & | \\ 1_2 & & & f(s) \end{array}$$

On prend le dernier bâton et on gagne.

- La fonction f nous permet de réduire V à seulement deux ensembles : $f^{-1}(0)$ et $V \setminus f^{-1}(0)$.
- Ce critère fournit un algorithme (de complexité linéaire) comme stratégie gagnante.

Version « misère »

On considère le jeu de Nim dans lequel la condition de victoire est inversée, c'est-à-dire que celui qui prend le dernier objet perd. Que devient la stratégie gagnante ?

Présentation

On considère les casse-têtes pouvant se modéliser comme des jeux à un joueur :

- Graphe $G = (V, E)$ où V représente les états et E les transitions possibles.
- Ensemble $\mathcal{R}$ des états résolus (souvent $\#\mathcal{R} = 1$).
- Difficulté consiste à trouver un chemin dans le graphe menant à un état de $\mathcal{R}$.

Interlude : rappels d'algèbre

Groupe

Un ensemble muni d'une opération interne $(E, \cdot)$ est un groupe si :

- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
- chaque élément a un inverse ;
- il existe un élément neutre.

Exemple : on appelle $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Un groupe peut agir sur un ensemble.

Stratégie

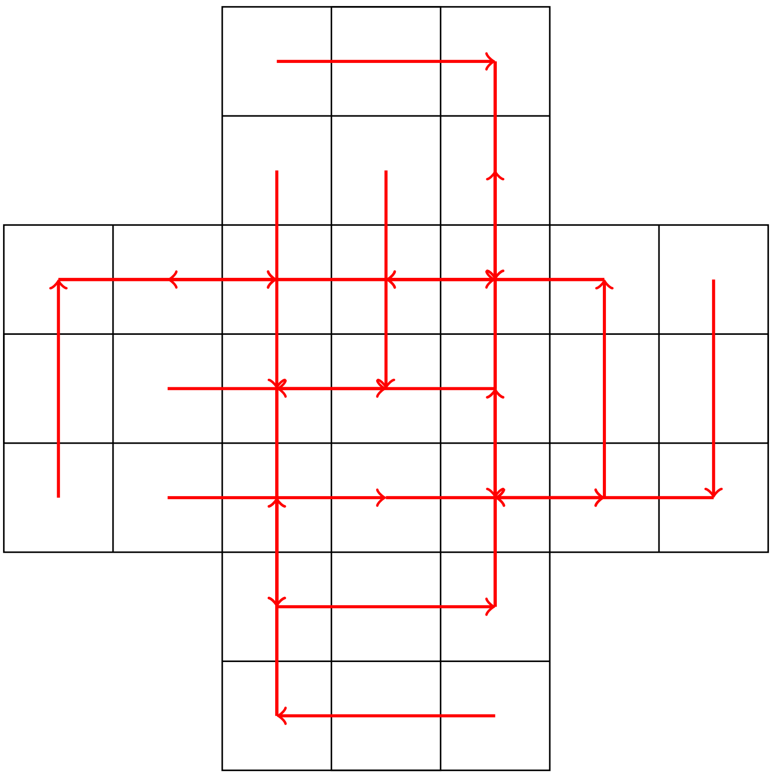
Pour résoudre un casse-tête :

- Trouver un groupe $\mathcal{G}$ qui agit sur son état ;
- Trouver un ensemble de générateurs de $\mathcal{G}$;
- La transition de l'état initial à un état résolu est l'action d'un certain élément $g \in \mathcal{G}$;
- La décomposition de g sur les générateurs fournit un chemin dans le graphe de s_0 vers $\mathcal{R}$.

Pour montrer qu'un casse-tête n'a pas de solution :

- Trouver un invariant f de son état s ;
- Montrer que $f(s_0) \notin f(\mathcal{R})$.

Solitaire (anglais)



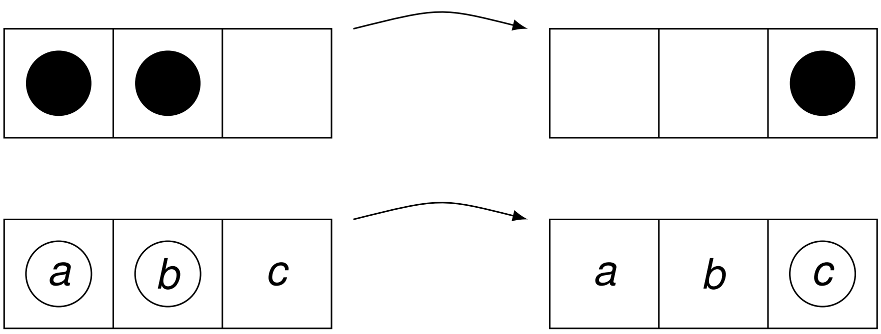
Groupe de Klein

$$G = \{a, b, c, e\}$$

$\times$	a	b	c	e
a	e	c	b	a
b	c	e	a	b
c	b	a	e	c
e	a	b	c	e

$$\begin{array}{ccc} G & \approx & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \\ a & \leftrightarrow & (0,1) \\ b & \leftrightarrow & (1,0) \\ c & \leftrightarrow & (1,1) \\ e & \leftrightarrow & (0,0) \end{array}$$

Groupe de Klein



Solitaire (anglais)

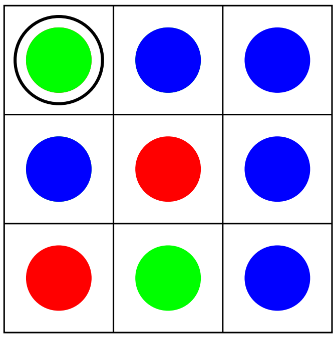
		a	*b*	*c*		
		c	*a*	*b*		
c	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
b	*c*	*a*		*c*	*a*	*b*
a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*
		b	*c*	*a*		
		a	*b*	*c*		

Solitaire (français)

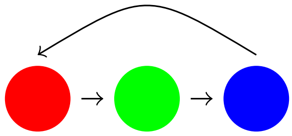
		a	*b*	*c*		
	b	*c*	*a*	*b*	*c*	
c	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
b	*c*	*a*		*c*	*a*	*b*
a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*
	a	*b*	*c*	*a*	*b*	
		a	*b*	*c*		

Un petit jeu à étudier[1]

On considère un clavier magique $3x3$:



- Chaque case peut cycler sur 3 couleurs ;
- Toucher une case fait avancer sa couleur et celle de ses voisines ;
- Le but est de rendre le clavier monochrome ;
- Est-ce que toutes les positions initiales sont solubles ?
- Quelle est la stratégie ?



[1] Tiré de *Black & White* de *Lionhead*, sans doute un classique.