Optimisation convexe : géométrie, modélisation et applications

Jérôme MALICK

chercheur CNRS

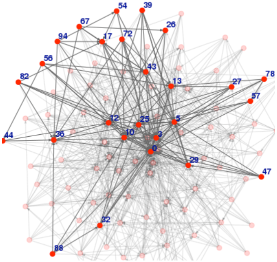
(Laboratoire de maths appliquées de Grenoble LJK – INRIA)

Journées inter-académiques des inspecteurs de maths
19 novembre 2009

Quel est le point commun ?

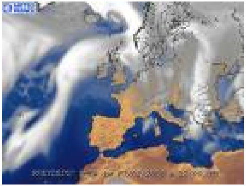
production électrique

robotique, mécanique



graphes, réseaux

risque en finance

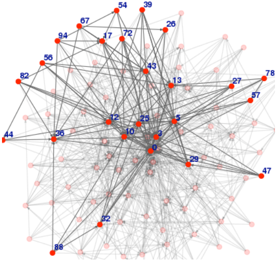


météo

Quel est le point commun ?

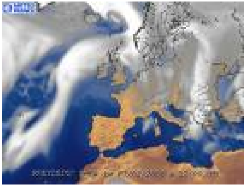
production électrique

robotique, mécanique



graphes, réseaux

risque en finance



météo

Réponse :

optimisation convexe

Des mathématiques en action !

- L'optimisation convexe est une discipline des maths applis...
- ...émergente, utile, subtile – que je souhaite vous présenter !

Des mathématiques en action !

- L'optimisation convexe est une discipline des maths applis...
- ...émergente, utile, subtile – que je souhaite vous présenter !
- **Repères historiques**

1900 Début de l'étude mathématique de la convexité (ex: H. Minkowski)

1947 Algorithme du simplexe pour l'optimisation linéaire (G. Dantzig)
Premières applications militaires puis en "recherche opérationnelle"

1970 Analyse convexe (W. Fenchel, J.-J. Moreau, T. Rockafellar)

1994 Algorithme de points intérieurs (Y. Nesterov & A. Nemirovski)

1990 → 2009

  - nombreuses applications en sciences de l'ingénieur
    (automatique, traitement du signal, réseaux, robotique...)
  - nouvelles familles de problèmes
    (optimisation semidéfinie, optimisation robuste, stochastique...)

- Livres, articles... théorie, algorithmes, applications...
  il y a beaucoup (trop) à dire !... mes objectifs sont modestes

Objectifs de cette présentation

$\boxed{\text{une introduction (illustrée) à l'optimisation convexe}}$

- présenter les bases des mathématiques de l'optimisation
- présenter quelques notions simples de l'analyse convexe
- illustrer leur utilisation dans deux domaines :

production électrique

simulation de syst. dynamiques avec frottement

- **mots-clés :** optimisation, convexité, dualité et modélisation
  (et pas ou peu : non-différentiabilité, algorithmes, numérique,...)
- donner des exemples d'applications des mathématiques
  (démarche : modélisation, résolution, simulations, interprétation,...)

  $\longrightarrow$ introduction personnelle, partielle et partiale !

Plan de la présentation

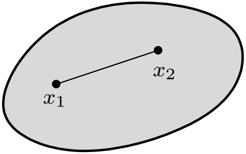
Plan de la présentation

Ensemble convexe

$C \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si

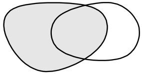
$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

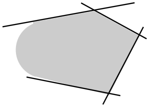
$$\implies \alpha\, x_1 + (1-\alpha) x_2 \in C$$



Exemples :

- Un espace affine $\{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b\}$ est convexe
- Un demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n : \ a^\top x \leqslant \beta\}$ est convexe
- L'intersection (quelconque) d'ensembles convexes est convexe



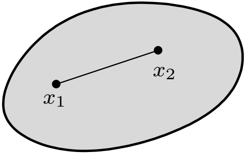


Ensemble convexe

$C \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si

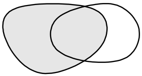
$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

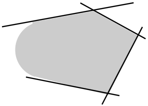
$$\Longrightarrow \ \alpha\, x_1 + (1-\alpha) x_2 \in C$$

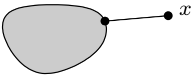


Exemples :

- Un espace affine $\{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b\}$ est convexe
- Un demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n : \ a^\top x \leqslant \beta\}$ est convexe
- L'intersection (quelconque) d'ensembles convexes est convexe







Propriété de base :

- Soit C convexe fermé; alors tout point $x \in \mathbb{R}^n$ a une unique projection sur C ! (caractéristique des ensembles convexes fermés)

Exemple : matrices (semidéfinies) positives

- L'espace des matrices symétriques $\mathcal{S}_n$ muni prod. scalaire canonique
- L'ensemble des matrices (semidéfinies) positives

$$\mathcal{S}_n^+ = \{X \in \mathcal{S}_n : \ u^\top X u \geqslant 0 \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^n\} \qquad \text{est convexe}$$

- Apparition en statistiques : matrices de covariance...

Exemple : matrices (semidéfinies) positives

- L'espace des matrices symétriques $\mathcal{S}_n$ muni prod. scalaire canonique
- L'ensemble des matrices (semidéfinies) positives

$$\mathcal{S}_n^+ = \{X \in \mathcal{S}_n : \ u^\top X u \geqslant 0 \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^n\} \qquad \text{est convexe}$$

- Apparition en statistiques : matrices de covariance...
- Par exemple, dans les modèles en maths financières : matrices de corrélation = matrices semidef. positives avec des 1 sur la diagonale
$\longrightarrow$ ensemble convexe, intersection de $\mathcal{S}_n^+$ avec espace affine

Exemple : matrices (semidéfinies) positives

- L'espace des matrices symétriques $\mathcal{S}_n$ muni prod. scalaire canonique
- L'ensemble des matrices (semidéfinies) positives

$$\mathcal{S}_n^+ = \{X \in \mathcal{S}_n : \; u^\top X u \geqslant 0 \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^n\} \qquad \text{est convexe}$$

- Apparition en statistiques : matrices de covariance...
- Par exemple, dans les modèles en maths financières : matrices de corrélation = matrices semidef. positives avec des 1 sur la diagonale
  $\longrightarrow$ ensemble convexe, intersection de $\mathcal{S}_n^+$ avec espace affine
- Les valeurs propres de $X \in \mathcal{S}_n$ sont réelles. Soit $\lambda \colon \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}^n$

$$\lambda(X) = (\lambda_1(X), \ldots, \lambda_n(X)) \qquad \text{avec } \lambda_1(X) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(X)$$

- On sait que $\mathcal{S}_n^+ = \lambda^{-1}\big((\mathbb{R}_+)^n\big)$

Exemple : matrices (semidéfinies) positives

- L'espace des matrices symétriques $\mathcal{S}_n$ muni prod. scalaire canonique
- L'ensemble des matrices (semidéfinies) positives

$$\mathcal{S}_n^+ = \{X \in \mathcal{S}_n : \; u^\top X u \geqslant 0 \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^n\} \qquad \text{est convexe}$$

- Apparition en statistiques : matrices de covariance...
- Par exemple, dans les modèles en maths financières : matrices de corrélation = matrices semidef. positives avec des 1 sur la diagonale $\longrightarrow$ ensemble convexe, intersection de $\mathcal{S}_n^+$ avec espace affine
- Les valeurs propres de $X \in \mathcal{S}_n$ sont réelles. Soit $\lambda \colon \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}^n$

$$\lambda(X) = (\lambda_1(X), \ldots, \lambda_n(X)) \qquad \text{avec } \lambda_1(X) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(X)$$

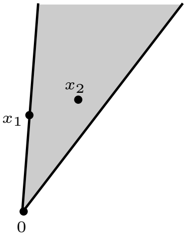
- On sait que $\mathcal{S}_n^+ = \lambda^{-1}\big((\mathbb{R}_+)^n\big)$
- Plus général : si C convexe de $\mathbb{R}^n$, alors $\lambda^{-1}(C)$ convexe de $\mathcal{S}_n$
- On a une expression explicite de la projection sur $\mathcal{S}_n^+$ et $\lambda^{-1}(C)$!
  On peut calculer la projection sur l'ens. des matrices de corrélation

Cône convexe

$C \subset \mathbb{R}^n$ est un cône convexe si

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \leqslant \alpha, \beta$$
$$\implies \alpha\, x_1 + \beta x_2 \in C$$

($\neq$ cône classique)

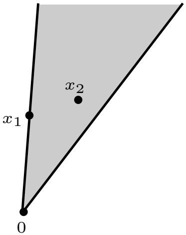


Cône convexe

$C \subset \mathbb{R}^n$ est un cône convexe si

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \leqslant \alpha, \beta$$
$$\implies \alpha\, x_1 + \beta x_2 \in C$$

($\neq$ cône classique)



Exemples :

- Les matrices semidéfinies positives forment un cône convexe fermé $\mathcal{S}_n^+$
- Soit une norme $\|\cdot\|$ dans $\mathbb{R}^n$; alors

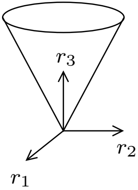
$$C = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ \|x\| \leqslant t\right\}$$

  est un cône convexe fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$

- Cône "du second ordre" dans $\mathbb{R}^3$

$$K_\mu = \left\{r \in \mathbb{R}^3 :\ \|(r_1, r_2)\| \leqslant \mu\, r_3\right\}$$

  pour une ouverture $\mu > 0$



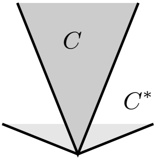
Dualité pour les cônes convexes fermés

$\mathbb{R}^n$ avec produit scalaire $x^\top y = \sum_i x_i y_i$

Le cône dual d'un cône $C \subset \mathbb{R}^n$ fermé

$$C^* = \{y \in \mathbb{R}^n : x^\top y \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in C\}$$

joue le rôle de l'orthogonal $\left((C^*)^* = C \right)$



Exemples :

$$C = V,\ C^* = V^\perp \qquad C = \mathcal{S}_n^+,\ C^* = \mathcal{S}_n^+ \qquad C = K_\mu,\ C^* = K_{\frac{1}{\mu}}$$

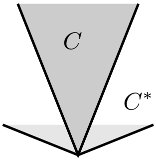
Dualité pour les cônes convexes fermés

$\mathbb{R}^n$ avec produit scalaire $x^\top y = \sum_i x_i y_i$

Le cône dual d'un cône $C \subset \mathbb{R}^n$ fermé

$$C^* = \{y \in \mathbb{R}^n : x^\top y \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in C\}$$

joue le rôle de l'orthogonal ($(C^*)^* = C$)



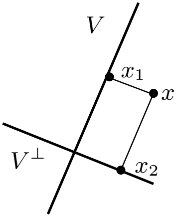
Exemples :

$$C = V,\ C^* = V^\perp \qquad C = \mathcal{S}_n^+,\ C^* = \mathcal{S}_n^+ \qquad C = K_\mu,\ C^* = K_{\frac{1}{\mu}}$$

Décomposition de $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$

$$\mathbb{R}^n \ni x = x_1 + x_2$$

$$x_1 \in V \quad x_2 \in V^\perp$$



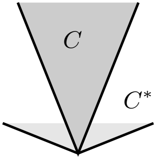
Dualité pour les cônes convexes fermés

$\mathbb{R}^n$ avec produit scalaire $x^\top y = \sum_i x_i y_i$

Le cône dual d'un cône $C \subset \mathbb{R}^n$ fermé

$$C^* = \{y \in \mathbb{R}^n : x^\top y \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in C\}$$

joue le rôle de l'orthogonal ($(C^*)^* = C$)



Exemples :

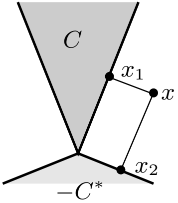
$$C = V,\ C^* = V^\perp \qquad C = \mathcal{S}_n^+,\ C^* = \mathcal{S}_n^+ \qquad C = K_\mu,\ C^* = K_{\frac{1}{\mu}}$$

Décomposition de $\mathbb{R}^n = C \oplus (-C^*)$

$$\mathbb{R}^n \ni x = x_1 - x_2$$

$$C \ni x_1 \perp x_2 \in C^*$$

(Théorème de Moreau)



Fonction convexe

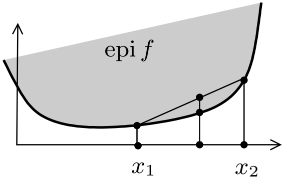
La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe si

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \quad f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

ce qui équivaut à :

$$\operatorname{epi} f = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ f(x) \leqslant t\right\}$$

est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$



Fonction convexe

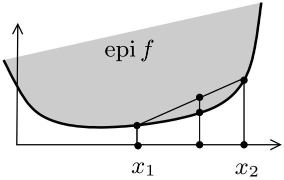
La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe si

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \quad f(\alpha\, x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha\, f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

ce qui équivaut à :

$$\operatorname{epi} f = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ f(x) \leqslant t\right\}$$

est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$



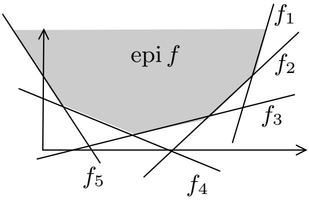
Exemples :

- Les fonctions affines sont convexes
- Un sup de fonctions convexes est convexe

$$f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x) \quad \text{convexe}$$

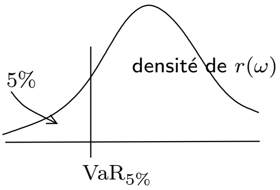
- La plus grande valeur propre de X matrice symétrique

$$\lambda_{\max}(X) = \sup_{u \in \text{sphère}} u^\top X\, u$$



$\Longrightarrow$ non-différentiabilité

Illustration : (non)convexité en finance



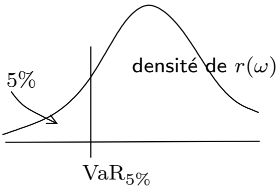
Value-at-risk : mesure de risque pour un placement financier ($\omega \in \mathbb{R}^n$)

- popularisée par JP Morgan (1993)
- institutionalisée par "Bâle II" (2004)

Soit $r(\omega)$ rendement (variable aléatoire)

$$\mathrm{VaR}_{5\%}(\omega) = \max\left\{\alpha : P\big(r(\omega) < \alpha\big) < 5\%\right\}$$

Illustration : (non)convexité en finance



Value-at-risk : mesure de risque pour un placement financier ($\omega \in \mathbb{R}^n$)

- popularisée par JP Morgan (1993)
- institutionalisée par "Bâle II" (2004)

Soit $r(\omega)$ rendement (variable aléatoire)

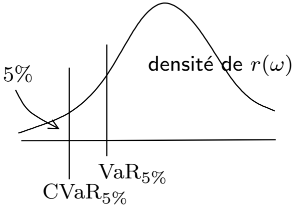
$$\mathrm{VaR}_{5\%}(\omega) = \max\left\{\alpha : P\big(r(\omega) < \alpha\big) < 5\%\right\}$$

Mais "VaR a sous-estimé l'importance des pertes du marché du crédit" (2008)
comportement non-intuitif : il existe $\mathrm{VaR}(\omega_1) = \mathrm{VaR}(\omega_2)$

$$\mathrm{VaR}((\omega_1 + \omega_2)/2) > \mathrm{VaR}(\omega_1) = (\mathrm{VaR}(\omega_1) + \mathrm{VaR}(\omega_2))/2)$$

$\longrightarrow$ manque de convexité !...

Illustration : (non)convexité en finance



Value-at-risk : mesure de risque pour un placement financier ($\omega \in \mathbb{R}^n$)

- popularisée par JP Morgan (1993)
- institutionalisée par "Bâle II" (2004)

Soit $r(\omega)$ rendement (variable aléatoire)

$$\mathrm{VaR}_{5\%}(\omega) = \max\left\{\alpha : P\big(r(\omega) < \alpha\big) < 5\%\right\}$$

Mais "VaR a sous-estimé l'importance des pertes du marché du crédit" (2008)
comportement non-intuitif : il existe $\mathrm{VaR}(\omega_1) = \mathrm{VaR}(\omega_2)$

$$\mathrm{VaR}((\omega_1 + \omega_2)/2) > \mathrm{VaR}(\omega_1) = (\mathrm{VaR}(\omega_1) + \mathrm{VaR}(\omega_2))/2$$

$\longrightarrow$ manque de convexité !... Solution : Conditional VaR

$$\mathrm{CVaR}_\beta(\omega) = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta \mathrm{VaR}_\alpha(\omega)\mathrm{d}\alpha \qquad \text{qui est convexe}$$

$\longrightarrow$ notion de mesure "cohérente" du risque (incluant la convexité)

Conclusion (partielle) sur la convexité

- La convexité : notion incroyablement simple...
- ...mais qui donne naissance à une géométrie et une analyse riches
- ...qui vont évidemment bien au-delà de ce que je vous montre

T. Rockafellar
Convex Analysis
Princeton Press, Serie on Mathematics, 1970

J.-B. Hiriart-Urruty, et C. Lemaréchal
Fundamentals of Convex Analysis
Springer, 2000

M. Berger, et P. Damphousse
Convexité, dans le plan, dans l'espace et au-delà
De la puissance et de la complexité d'une notion simple
Ellipses, Opuscules, 2004

- La convexité est une propriété à repérer, rechercher et exploiter
- Notez la dualité C^* (il y a aussi f^*, et après P^*)
- Aussi : porte d'entrée de l'analyse non-différentiable

Plan de la présentation

Problème d'optimisation

- **Problème :** formulation mathématique

$$\boxed{\left\{\begin{array}{cc} \min & f(x) \\ & x \in C \end{array}\right.}$$

  - variable $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
  - fonction objectif $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
  - ensemble des contraintes $C \subset \mathbb{R}^n$

- **Solution :** trouver $\bar{f} \in \mathbb{R}$ et $\bar{x} \in C$ tel que

$$f(\bar{x}) = \bar{f} \leqslant f(x) \quad \text{pour tout } x \in C$$

Problème d'optimisation

- **Problème :** formulation mathématique

$$\boxed{\left\{\begin{array}{cc} \min & f(x) \\ & x \in C \end{array}\right.}$$

  - variable $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
  - fonction objectif $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
  - ensemble des contraintes $C \subset \mathbb{R}^n$

- **Solution :** trouver $\bar{f} \in \mathbb{R}$ et $\bar{x} \in C$ tel que

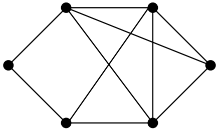
$$f(\bar{x}) = \bar{f} \leqslant f(x) \quad \text{pour tout } x \in C$$

- **Exemple** en sciences expérimentales : ajustement aux données
  - variable : paramètres du modèle
  - fonction objectif : minimiser l'erreur d'approximation
  - contraintes : limites sur les paramètres...

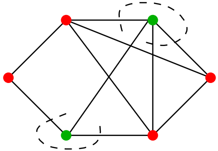
- **Exemple** en finance : gestion de portefeuille
  - variable : quantités investies sur différents placements (ex : ω)
  - fonction objectif : minimiser le risque (ex : CVar)
  - contraintes : de budget, de rendement minimal...

Exemple dans les graphes : coupe maximale

Graphe : ensemble de n noeuds
dont certains sont reliés par des arêtes



Exemple dans les graphes : coupe maximale



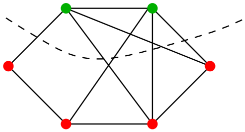
Graphe : ensemble de n noeuds
dont certains sont reliés par des arêtes

Coupe : partition de l'ensemble des noeuds en deux (5 arêtes coupées)

Exemple dans les graphes : coupe maximale

Graphe : ensemble de n noeuds dont certains sont reliés par des arêtes

Coupe : partition de l'ensemble des noeuds en 2

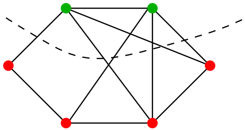


- Problème de la coupe maximale : trouver une coupe qui maximise le nombre d'arêtes coupées – applis : réseaux, physique statistique (!)

Exemple dans les graphes : coupe maximale

Graphe : ensemble de n noeuds dont certains sont reliés par des arêtes

Coupe : partition de l'ensemble des noeuds en 2



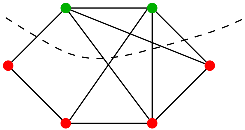
- Problème de la coupe maximale : trouver une coupe qui maximise le nombre d'arêtes coupées – applis : réseaux, physique statistique (!)
- Modélisation :
  - variable : $x \in \mathbb{R}^n$ (x_i pour le noeud i)
  - contrainte : $x_i = 1$ ou -1 (choix de l'ensemble)
  - objectif : nombre d'arêtes coupées (arête $(ij) \iff a_{ij} \in \{0, 1\}$)
    (ij) coupée $\iff a_{ij} = 1$ et $x_i x_j = -1 \iff a_{ij}(1 - x_i x_j)/2 = 1$
- Formulation :

$$\begin{cases} \max & \sum_{ij} a_{ij}(1 - x_i x_j)/2 \\ & x \in \{-1, 1\}^n \end{cases}$$

Exemple dans les graphes : coupe maximale

Graphe : ensemble de n noeuds dont certains sont reliés par des arêtes

Coupe : partition de l'ensemble des noeuds en 2



- Problème de la coupe maximale : trouver une coupe qui maximise le nombre d'arêtes coupées – applis : réseaux, physique statistique (!)
- Modélisation :
  - variable : $x \in \mathbb{R}^n$ (x_i pour le noeud i)
  - contrainte : $x_i = 1$ ou -1 (choix de l'ensemble)
  - objectif : nombre d'arêtes coupées (arête $(ij) \iff a_{ij} \in \{0, 1\}$)
    (ij) coupée $\iff a_{ij} = 1$ et $x_i x_j = -1 \iff a_{ij}(1 - x_i x_j)/2 = 1$
- Formulation : $Q = (-a_{ij}/2)_{ij}$ matrice d'adjacence (facteur $-1/2$)

$$\begin{cases} \min & x^\top Q\, x + \text{cste} \\ & x \in \{-1, 1\}^n \end{cases}$$

- Résolution : problème fini mais très dur ! (sans structure : $n \leqslant 500$)

Résoudre un problème d'optimisation

- En général

  $\boxed{\text{résoudre un problème d'optimisation est très difficile}}$

- Ce qu'on voudrait...
  - Situation idéale : calculer $\bar{x}$ et $\bar{f}$ explicitement
  - Bonne situation : avoir un algorithme qui génère une suite

$$x_k \to \bar{x} \qquad f(x_k) \to \bar{f}$$

- **Exemple** : optimisation linéaire = technologie éprouvée

$$\left\{\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ & {a_i}^\top x \leqslant b_i \quad i \in \{1, m\} \end{array}\right.$$

- théorie et algorithmes (depuis 1947)
- logiciels efficaces et disponibles (20 ans)
- outils pour modéliser sous forme linéaire

Résoudre un problème d'optimisation

- En général

$$\boxed{\text{résoudre un problème d'optimisation est très difficile}}$$

- Ce qu'on voudrait...
  - Situation idéale : calculer $\bar{x}$ et $\bar{f}$ explicitement
  - Bonne situation : avoir un algorithme qui génère une suite

$$x_k \to \bar{x} \qquad f(x_k) \to \bar{f}$$

- **Exemple** : optimisation linéaire = technologie éprouvée

$$\begin{cases} \min & c^\top x \\ & {a_i}^\top x \leqslant b_i \quad i \in \{1, m\} \end{cases}$$

  - théorie et algorithmes (depuis 1947)
  - logiciels efficaces et disponibles (20 ans)
  - outils pour modéliser sous forme linéaire

- Ce qu'on a souvent...
  - Pas de globalité : on a une sous-suite $x_{k'} \to \bar{x}$ minimum local

$$f(x_{k'}) \to f(\bar{x}) = \bar{f} \leqslant f(x) \quad \text{pour tout } x \in C \cap \mathrm{Boule}(\bar{x}, r)$$

  - Sous-optimalité : on a un minorant de la valeur optimale

$$m_k \to \bar{m} < \bar{f} \leqslant f(x) \quad \text{pour tout } x \in C$$

Résoudre un problème d'optimisation convexe

- Problèmes précédents = manque de convexité !
- Pour les problèmes convexes, on est dans la "bonne" situation

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ & x \in C \end{cases} \qquad \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ convexe} \\ C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ {a_i}^\top x = b_i, \ g_j(x) \leqslant 0 \right\} \text{ convexe} \end{array}$$

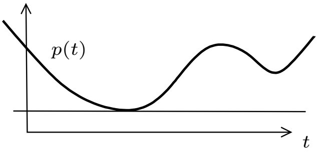
- Les minima locaux sont en fait globaux
- On dispose d'algorithmes, avec contrôle de leur comportement
- Idée grossière : les problèmes convexes peuvent être résolus efficacement avec des algorithmes éprouvés (au moins pour des problèmes de taille petite à moyenne - et même de grande taille en exploitant leur structure)
- En général,

$$\boxed{\text{résoudre un problème d'optimisation convexe est facile}}$$

Exemple : garantir la positivité d'un polynôme (1)

Soit $p(t)$ un polynôme (degré $2d$)
multivarié $t = (t_1, \dots, t_n)$

Question : garantir $p(t) \geqslant 0$?

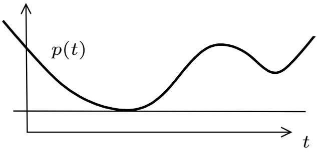


- **Exemple d'applications :**
  - vérification automatique de programmes informatiques
  - stabilité de systèmes

Exemple : garantir la positivité d'un polynôme (1)

Soit $p(t)$ un polynôme (degré $2d$)
multivarié $t = (t_1, \ldots, t_n)$

Question : garantir $p(t) \geqslant 0$?



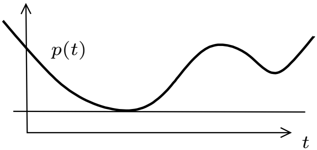
- **Exemple d'applications :**
  - vérification automatique de programmes informatiques
  - stabilité de systèmes
- Première idée

$$\min_{t \in \mathbb{R}^n} \; p(t) \qquad \longrightarrow \text{ problème non convexe, difficile}$$

Exemple : garantir la positivité d'un polynôme (1)

Soit $p(t)$ un polynôme (degré $2d$)
multivarié $t = (t_1, \ldots, t_n)$

Question : garantir $p(t) \geqslant 0$?



- **Exemple d'applications :**
  - vérification automatique de programmes informatiques
  - stabilité de systèmes

- Première idée

$$\min_{t \in \mathbb{R}^n} \; p(t) \qquad \longrightarrow \text{ problème non convexe, difficile}$$

- Meilleure idée : garantir que $p(t)$ s'écrit comme une somme de carrés

$$\text{tester si } \; p(t) = \sum_{i=1}^{r} q_i(t)^2 \qquad \longrightarrow \text{ problème convexe !}$$

Exemple : garantir la positivité d'un polynôme (2)

- Soit $\pi(t)$ une base de l'espace des polynômes (n variables, degré d)
- $p(t)$ est une somme de carré $\iff$ $p(t) = \pi(t)^\top X \, \pi(t)$ avec $X \in \mathcal{S}_n^+$

$$p(t) = \pi(t)^\top X \, \pi(t) = \pi(t)^\top \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i q_i {q_i}^\top \right) \pi(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i ({q_i}^\top \pi(t))^2$$

- Exemple pour $n = 1$ et $d = 2$ avec $\pi(t) = [1, t, t^2]^\top$

$$p(t) = t^4 + 2\,t^2 + 2\,t + 1 = \pi(t)^\top \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \pi(t)$$

- Garantir $p(t)$ somme de carrés $\iff$ trouver $X \in \mathcal{S}_n^+ \cap \{X : \mathcal{A}(X) = b\}$
- Par exemple, en projetant ce convexe fermé (= minimiser la norme)

D. Henrion et J. Malick
À paraître dans : Optimization Methods and Software, 2009

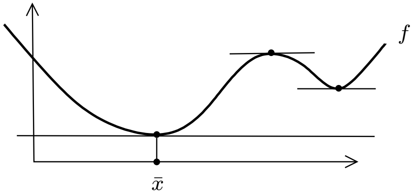
Conditions d'optimalité en optimisation

- Outil important en optimisation
  Conditions d'optimalité = conditions nécessaires vérifiées par $\bar{x}$
- Conditions locales... mais utiles :
  - pour calculer des solutions explicites
  - pour construire des algorithmes
  - pour définir des critères d'arrêts

Conditions d'optimalité en optimisation

- Outil important en optimisation
  Conditions d'optimalité = conditions nécessaires vérifiées par $\bar{x}$
- Conditions locales... mais utiles :
  - pour calculer des solutions explicites
  - pour construire des algorithmes
  - pour définir des critères d'arrêts
- Cas simple, sans contrainte : f différentiable

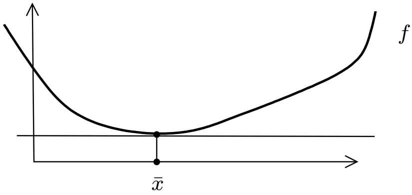
$$\bar{x} \text{ sol. de } \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \Longrightarrow \quad \nabla f(\bar{x}) = 0$$



Conditions d'optimalité en optimisation

- Outil important en optimisation
  Conditions d'optimalité = conditions nécessaires vérifiées par $\bar{x}$
- Conditions locales... mais utiles :
  - pour calculer des solutions explicites
  - pour construire des algorithmes
  - pour définir des critères d'arrêts
- Cas simple, sans contrainte : f différentiable et convexe

$$\bar{x} \text{ sol. de } \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla f(\bar{x}) = 0$$



- Convexité $\longrightarrow$ conditions nécessaires et suffisantes

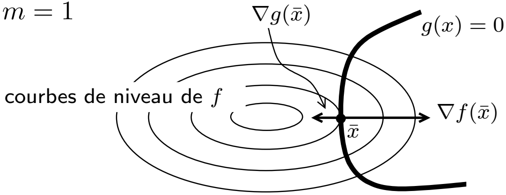
Des conditions d'optimalité... à la dualité (1)

Cas avec contraintes d'égalités : (via le thm des fonctions implicites)

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \; g_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, m\} \qquad \text{(+ hypothèse géométrique)}$$

$$\bar{x} \text{ sol. de } \min_{x \in S} f(x) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \quad \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

Dessin : $n = 2, m = 1$



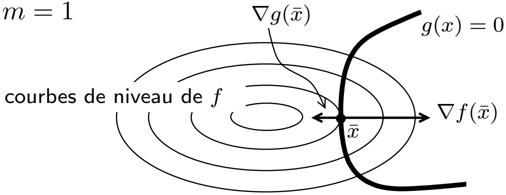
Des conditions d'optimalité... à la dualité (1)

Cas avec contraintes d'égalités : (via le thm des fonctions implicites)

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \; g_i(x) = 0, \; i = 1, \dots, m\} \qquad \text{(+ hypothèse géométrique)}$$

$$\bar{x} \;\text{ sol. de }\; \min_{x \in S} f(x) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \quad \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

Dessin : $n = 2, m = 1$



Remarque : la condition s'écrit avec le lagrangien

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0 \qquad \text{avec} \qquad L(x, \lambda) = f(x) + \textstyle\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

Condition d'optimalité de $\displaystyle \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \bar{\lambda})$

Des conditions d'optimalité... à la dualité (2)

- Cas général : avec deux types de contraintes
  - des égalités $g_i(x) = 0$ avec $i = 1, \ldots, m$
  - plus une contrainte $x \in C$

- On considère la fonction concave $\theta\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$$\theta(\lambda) = \min_{x \in C} L(x, \lambda) = \min_{x \in C} f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

- Il y a une dualité (dite "lagrangienne")

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & g_i(x) = 0, \; x \in C \end{array} \right. \qquad (P^*) \left\{ \begin{array}{ll} \max & \theta(\lambda) \\ & \lambda \in \mathbb{R}^m \end{array} \right.$$

Des conditions d'optimalité... à la dualité (2)

- Cas général : avec deux types de contraintes
  - des égalités $g_i(x) = 0$ avec $i = 1, \ldots, m$
  - plus une contrainte $x \in C$

- On considère la fonction concave $\theta\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$$\theta(\lambda) = \min_{x \in C} \; L(x, \lambda) = \min_{x \in C} \; f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

- Il y a une dualité (dite "lagrangienne")

$$(P) \begin{cases} \min & f(x) \\ & g_i(x) = 0, \;\; x \in C \end{cases} \qquad\qquad (P^*) \begin{cases} \max & \theta(\lambda) \\ & \lambda \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

- **Théorème (dualité faible)**
  Pour un problème quelconque (f, C et g_i quelconques)

$$f(x) \geqslant \bar{f} \geqslant \bar{\theta} \geqslant \theta(\lambda) \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^m \text{ et } x \in C, g_i(x) = 0$$

Des conditions d'optimalité... à la dualité (2)

- Cas général : avec deux types de contraintes
  - des égalités $g_i(x) = 0$ avec $i = 1, \ldots, m$
  - plus une contrainte $x \in C$

- On considère la fonction concave $\theta\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$$\theta(\lambda) = \min_{x \in C} \; L(x, \lambda) = \min_{x \in C} \; f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

- Il y a une dualité (dite "lagrangienne")

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & g_i(x) = 0, \; x \in C \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad (P^*) \left\{ \begin{array}{ll} \max & \theta(\lambda) \\ & \lambda \in \mathbb{R}^m \end{array} \right.$$

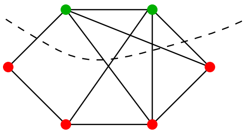
- **Théorème (dualité forte)**
  Pour un problème convexe (f, C convexes et g_i affines) (+ hypo géo)

$$f(x) \geqslant \bar{f} = \bar{\theta} \geqslant \theta(\lambda) \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^m \text{ et } x \in C, g_i(x) = 0$$

Retour sur le problème de la coupe maximale

Problème non-convexe

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \min & x^\top Q\, x \\ & x \in \{-1,1\}^n \\ & ({x_i}^2 = 1,\ i = 1,\dots,n) \end{array} \right.$$



Écrivons le problème dual (convexe) - le lagrangien

$$\begin{aligned} L(x,\lambda) &= x^\top Q\, x + \sum \lambda_i({x_i}^2 - 1) \;=\; -\mathbf{1}^\top \lambda + x^\top\big(Q - \mathrm{Diag}(\lambda)\big)x \\ \theta(\lambda) &= -\mathbf{1}^\top \lambda \;+\; \min_{x\in\mathbb{R}^n} x^\top\big(Q - \mathrm{Diag}(\lambda)\big)x \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} -\mathbf{1}^\top \lambda & \text{si } Q - \mathrm{Diag}(\lambda) \in \mathcal{S}_n^+ \\ -\infty & \text{sinon} \end{array} \right. \end{aligned}$$

On résout le problème convexe

$$(P^*) \left\{ \begin{array}{ll} \max & -\mathbf{1}^\top \lambda \\ & Q - \mathrm{Diag}(\lambda) \in \mathcal{S}_n^+ \end{array} \right.$$

Dualité faible : on obtient un minorant $\bar{\theta}$ de la valeur du la coupe maximale

(En pratique : bonne approximation; en théorie : au pire 8.78% d'erreur)

Conclusions (partielles) sur l'optimisation

- Optimisation : les maths du "mieux faire" (théorie, algorithmes, applis)
- Plusieurs spécialités, dont :
  - commande optimale (= optimisation en dimension infinie)
  - optimisation combinatoire (= optimisation sur les graphes)
  - optimisation convexe (avec de jolies et utiles propriétés)
- Quelques références pédagogiques

J.-B. Hiriart-Urruty
Les mathématiques du mieux faire, vol. 1
Ellipses, Opuscules, 2008

S. Boyd, et L. Vandenberghe
Convex Optimization
Cambridge University Press, 2004

J.-B. Hiriart-Urruty, et C. Lemaréchal
Convex Analysis and Minimization Algorithms
Springer, 1993

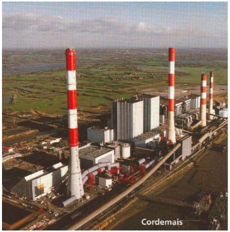
- L'optimisation est enseignée dans les écoles d'ingénieurs
- ...et de plus en plus utilisée dans l'industrie et les services
- On va en voir deux utilisations récentes...

Plan de la présentation

Production électrique en France

La production d'électricité est assurée $n \simeq 200$ centrales

nucléaire 80% pétrole + charbon 3% hydraulique 17%



Depuis 2003, l'organisation de la production est gérée par un logiciel développé par l'INRIA, issu de 20 ans de collaboration EDF - INRIA, autour de C. Lemaréchal (INRIA, Grenoble)

$\longrightarrow$ le coeur numérique de ce logiciel utilise de l'optimisation convexe

Modèle complexe (même simplifié)

- Données : centrales : n $[\simeq 200]$ centrales
  intervalle : T $[= 96]$ (2 jours $\times$ 48 demi-heures)

- Variables : programme de production pour chaque centrale i

$$p_i = \left(p_i^1, \ldots, p_i^T\right) \in P_i \quad \text{contraintes technologiques}$$

- Objectif : minimiser les coûts de production

- Chaque centrale i a ses coûts $c_i(p_i)$ et ses contraintes $p_i \in P_i$

- Contrainte : satisfaire les demandes (connues) d^t aux temps t

- Problème d'optimisation : grande taille et hétérogène

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \min \quad \sum_i c_i(p_i)\,, \\ \quad p_i \in P_i \quad i = 1, \ldots, n \\ \quad \sum_i p_i^t = d^t \quad t = 1, \ldots, T \end{array}\right.}$$

Résolution par dualité

- Problème complexe mais décomposable par dualité !
- Variable primale : plannings de production $p \in P = P_1 \times \cdots \times P_n$
  Variable duale : les "prix" $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^T) \in \mathbb{R}^T$

$$L(p, \lambda) = \sum_i c_i(p_i) + \sum_t \lambda^t \Big(\sum_i p_i^t - d^t\Big) = \sum_i \left(c_i(p_i) + \sum_t \lambda^t (p_i^t - d^t)\right)$$

- Calcul de la fonction duale à λ fixé $= n$ problèmes indépendants !

$$\theta(\lambda) = \min_{p \in P} \; L(p, \lambda) = \sum_i \; \min_{p_i \in P_i} \left(c_i(p_i) + \sum_t \lambda^t (p_i^t - d^t)\right)$$

Résolution par dualité

- Problème complexe mais décomposable par dualité !
- Variable primale : plannings de production $p \in P = P_1 \times \cdots \times P_n$
  Variable duale : les "prix" $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^T) \in \mathbb{R}^T$

$$L(p,\lambda) = \sum_i c_i(p_i) + \sum_t \lambda^t \Big(\sum_i p_i^t - d^t \Big) = \sum_i \Big(c_i(p_i) + \sum_t \lambda^t (p_i^t - d^t) \Big)$$

- Calcul de la fonction duale à λ fixé $= n$ problèmes indépendants !

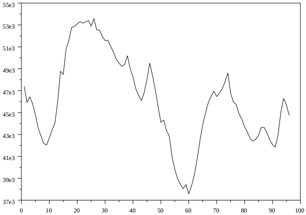
$$\theta(\lambda) = \min_{p \in P} L(p,\lambda) = \sum_i \min_{p_i \in P_i} \Big(c_i(p_i) + \sum_t \lambda^t (p_i^t - d^t) \Big)$$

- Nouveau problème ($=$ problème dual) : maximiser sans contrainte une fonction concave non-différentiable
- Algorithme efficace d'optimisation convexe (résolution en 1/2h)
- Non-convexité $\longrightarrow$ minorant du coût optimal, planning de production sous-optimal, mais information pertinente sur les prix λ

Illustration numérique

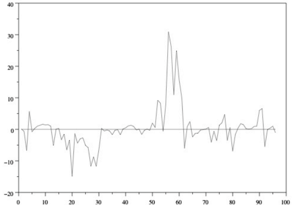
Demande sur 2 jours

(de 35000 MW à 70000 MW)



Écart à la demande $\sum_i p_i - d$

(de -15 MW à 30MW)



Conclusion (partielle) sur production électrique

- Optimisation de la production électrique en France
- Problème complexe $\longrightarrow$ traitement par découplage/dualité qui introduit l'optimisation convexe
- Collaboration EDF - INRIA continue
  - améliorer l'utilisation de l'information duale
  - robustifier l'algorithme (erreurs dans les sous-problèmes)
  - accélérer l'algorithme (grâce à la structure de la fonction convexe)

L. Dubost, R. Gonzalez, et C. Lemaréchal,
Primal-proximal heuristic applied to the French unit-commitment problem
Mathematical Programming, 104, 2005

C. Lemaréchal, et J. Malick
Computation and sensitivity of prices in energy production management
Note technique en préparation, 2010

Plan de la présentation

Systèmes dynamiques avec frottement

Problème : dynamique de systèmes mécaniques avec

- plusieurs objets élémentaires
- pouvant entrer en contact (impact)
- et glisser les uns sur les autres (avec frottement)

Exemples :

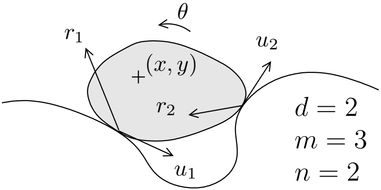
- génie civil (matériaux granulaires), robotique (robot marcheur)
- automobile (pneus, “crash-tests”)
- informatique graphique (effets spéciaux, jeux vidéos)



Difficulté : non-régularités... en particulier frottement

Modélisation (1/3) : mécanique non-régulière

- La dynamique continue difficile est discrétisée
- Dynamique discrète linéaire avec la seule non-linéarité dans la loi de frottement $\longrightarrow$ loi de frottement de Coulomb (cf après)
- Inconnues de la dynamique discrète
  - coordonnées généralisées $q \in \mathbb{R}^m$
  - vitesses généralisées $v = \dot{q} \in \mathbb{R}^m$
  - vitesses relatives aux points de contact $u \in \mathbb{R}^{nd}$
  - forces de contact $r \in \mathbb{R}^{nd}$

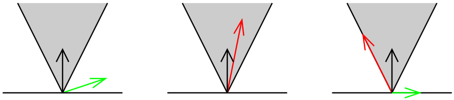


$d = 2$
$m = 3$
$n = 2$

- La physique des phénomènes
  $\longrightarrow$ équation de la dynamique et de la cinématique (cf après)

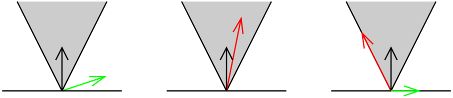
Modélisation (2/3) : frottement de Coulomb

- À chaque contact : e vecteur normal, $\mathbb{R}^3 = e^\perp \oplus \mathbb{R}e$ et $r = (r_T, r_N)$
- Reprenons le cône du second ordre $K_\mu = \{\|r_T\| \leqslant \mu r_N\} \subset \mathbb{R}^3$
- Loi de Coulomb : 3 possibilités pour (u, r)
  - décollage : $r = 0$ et $u_N \geqslant 0$
  - adhérence : $r \in \mathrm{int}(K_\mu)$ et $u = 0$
  - glissement : $r \in \mathrm{fr}(K_\mu)$ et $u_N = 0$ avec u_T opposé à r_T

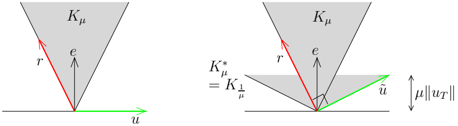


Modélisation (2/3) : frottement de Coulomb

- À chaque contact : e vecteur normal, $\mathbb{R}^3 = e^\perp \oplus \mathbb{R}e$ et $r = (r_T, r_N)$
- Reprenons le cône du second ordre $K_\mu = \{\|r_T\| \leqslant \mu r_N\} \subset \mathbb{R}^3$
- Loi de Coulomb : 3 possibilités pour (u, r)
  - décollage : $r = 0$ et $u_N \geqslant 0$
  - adhérence : $r \in \mathrm{int}(K_\mu)$ et $u = 0$
  - glissement : $r \in \mathrm{fr}(K_\mu)$ et $u_N = 0$ avec u_T opposé à r_T



- Changement de variables $\tilde{u} = u + \mu\|u_T\|e$



- Formulation "convexe" de la loi de Coulomb $K_\mu^* \ni \tilde{u} \perp r \in K_\mu$

Modélisation (3/3) : dynamique discrète

- Dynamique linéaire (f forces, M matrice de masse définie positive)

$$Mv + f = H^\top r$$

- Cinématique linéaire ($H \in \mathbb{R}^{nd \times m}$ et $w \in \mathbb{R}^{nd}$ quelconques)

$$u = Hv + w$$

Modélisation (3/3) : dynamique discrète

- Dynamique linéaire (f forces, M matrice de masse définie positive)

$$Mv + f = H^\top r$$

- Cinématique linéaire ($H \in \mathbb{R}^{nd \times m}$ et $w \in \mathbb{R}^{nd}$ quelconques)

$$u = Hv + w \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{u} = Hv + w + Es$$

avec le changement de variable $u \rightarrow \tilde{u}$, et la variable supplémentaire

$$s = (\|\tilde{u}_T^1\|, \ldots, \|\tilde{u}_T^n\|)$$

- Problème complet : avancer d'un pas de temps revient à résoudre

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccc} Mv + f & = & H^\top r \\ \tilde{u} & = & Hv + w + Es \\ K_\mu^* \ni \tilde{u} & \perp & r \in K_\mu \\ s^i & = & \|\tilde{u}_T^i\| \end{array} \right.} \quad \Longrightarrow \quad \text{problème de réalisabilité}$$

Modélisation (3/3) : dynamique discrète

- Dynamique linéaire (f forces, M matrice de masse définie positive)

$$Mv + f = H^\top r$$

- Cinématique linéaire ($H \in \mathbb{R}^{nd\times m}$ et $w \in \mathbb{R}^{nd}$ quelconques)

$$u = Hv + w \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{u} = Hv + w + Es$$

avec le changement de variable $u \to \tilde{u}$, et la variable supplémentaire

$$s = (\|\tilde{u}_T^1\|, \ldots, \|\tilde{u}_T^n\|)$$

- Problème complet : avancer d'un pas de temps revient à résoudre

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} Mv + f & = & H^\top r \\ \tilde{u} & = & Hv + w + Es \\ K_\mu^* \ni \tilde{u} & \perp & r \in K_\mu \\ s^i & = & \|\tilde{u}_T^i\| \end{array}\right.} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{optimisation convexe}$$

Optimisation convexe + point fixe

- Équations et inclusions bleues = conditions d'optimalité du problème d'optimisation convexe paramétrique

$$\left\{\begin{array}{ll} \min \quad \frac{1}{2}v^\top M v + f^\top v & \text{(fonction quadratique convexe)} \\ \quad Hv + w + Es \in K_\mu^* & \text{(contraintes convexes, coniques)} \end{array}\right.$$

Optimisation convexe + point fixe

- Équations et inclusions bleues = conditions d'optimalité du problème d'optimisation convexe paramétrique

$$\begin{cases} \min \quad \frac{1}{2} v^\top M v + f^\top v & \text{(fonction quadratique convexe)} \\ \quad Hv + w + Es \in K_\mu^* & \text{(contraintes convexes, coniques)} \end{cases}$$

- On calcule facilement la solution $v(s)$ qui donne $\tilde{u}(s) = H^\top v + Es$

- Problème incrémental = équation de point fixe à résoudre

$$F(s) = s \qquad \text{avec} \qquad F^i(s) = \|\tilde{u}_T^i(s)\|$$

Optimisation convexe + point fixe

- Équations et inclusions bleues = conditions d'optimalité du problème d'optimisation convexe paramétrique

$$\begin{cases} \min & \frac{1}{2}v^\top Mv + f^\top v & \text{(fonction quadratique convexe)} \\ & Hv + w + Es \in K_\mu^* & \text{(contraintes convexes, coniques)} \end{cases}$$

- On calcule facilement la solution $v(s)$ qui donne $\tilde{u}(s) = H^\top v + Es$
- Problème incrémental = équation de point fixe à résoudre

$$F(s) = s \qquad \text{avec} \qquad F^i(s) = \|\tilde{u}^i_T(s)\|$$

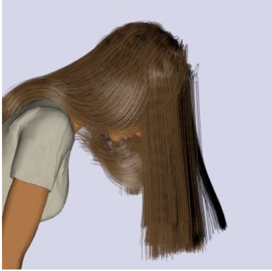
- Intérêt théorique :

> un théorème de point fixe (Brouwer) donne l'existence d'une solution au problème incrémental (sous une hypo naturelle)

- Intérêt pratique : résolution numérique efficace - en isolant et traitant de front ce qui est facile (convexe)

Illustration : mouvement de cheveux

- Informatique graphique : simuler des personnages et leurs interactions avec leur environnement
- Exemple : simuler une chevelure en contact avec les épaules
- **Applications :** loisirs numériques (films d'animation, jeux vidéo), prototypage en cosmétologie...



- 2 simulations :
  1. pour fixer les idées : un cheveu en contact avec une sphère tournante
  2. un personnage qui tourne la tête
- Frottements :
  - pas de frottement (ou frottement visqueux) $\longrightarrow$ peu réaliste
  - le frottement de Coulomb $\longrightarrow$ plus réaliste

Conclusion (partielle) sur la mécanique avec frottement

- Simuler la dynamique de systèmes mécaniques exige un traitement particulier du frottement
- Problème complexe $\longrightarrow$ isoler la convexité permet de
  - démontrer l'existence de solutions
  - construire un algorithme de résolution
- Ces thématiques de recherche sont celles de l'équipe BIPOP de l'INRIA (logiciel de simulation SICONOS)

  `http://bipop.inrialpes.fr/`

- Résultats récents - thèse de Florent Cadoux (2009)

V. Acary, F. Cadoux, C. Lemaréchal, et J. Malick
Convex optimization approach for Coulomb friction problems
Soumis pour publication, 2009

F. Bertails, F. Cadoux, et V. Acary
FIBERS: fine interactions between entangled rods
À paraître dans : Transactions on Graphics, 2010

Plan de la présentation

Fin de cette histoire...

- De nombreux problèmes en "sciences de l'ingénieur" (production, gestion, finance, analyse de données, statistique...) se formulent comme des problèmes d'optimisation

- L'optimisation convexe est une branche importante et émergente de l'optimisation... avec de nombreuses applications ($\leqslant$ 20 ans)

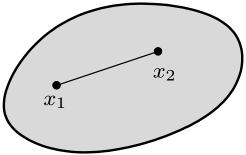
- Convexité $\longrightarrow$ propriétés globales (ex : minima locaux sont globaux)

- Convexité $\longrightarrow$ une riche théorie de la dualité
  - méthode systématique pour calculer des bornes sur les valeurs optimales
  - conditions d'optimalité nécessaires et suffisantes
  - informations supplémentaires (sensibilité des solutions, interprétation, garantie de convergence, garantie de réalisabilité...)

- Convexité $\longrightarrow$ problèmes d'optimisation plus faciles

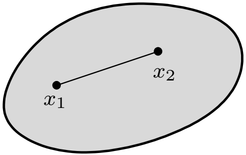
Étonnante notion : la convexité

La convexité est une notion géométrique très simple dont les conséquences sont très riches... dans de nombreuses branches des mathématiques et de leurs applications



Étonnante notion : la convexité

La convexité est une notion géométrique très simple dont les conséquences sont très riches... dans de nombreuses branches des mathématiques et de leurs applications



Constat : la convexité est presque absente dans l'enseignement secondaire mais aussi bac $+2$, capes, agreg' (sauf quelques masters)

C'est paradoxal, car la convexité

- est au coeur de nombreuses technologies qui nous entourent
- est une voie facile et peu ingrate pour faire de la géométrie
- est un moyen amusant d'initier au raisonnement mathématique

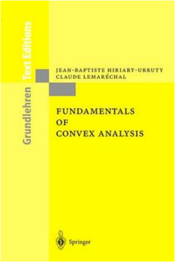
Ouvrage collectif, IREM de Strasbourg
Le livre du problème, vol. 4 : la convexité
CEDIC, Formation des maîtres en maths, 1974

Et pour finir

- Pour revoir cette présentation, noter les références,... et plus !

  `http://bipop.inrialpes.fr/people/malick`

- Pour une bonne introduction ($\longrightarrow$ cours ? niveau prépa ?)



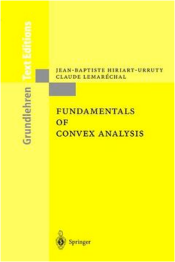
J.-B. Hiriart-Urruty et C. Lemaréchal
Fundamentals of Convex Analysis
Springer-Verlag, 2002

Et pour finir

- Pour revoir cette présentation, noter les références,... et plus !

  `http://bipop.inrialpes.fr/people/malick`

- Pour une bonne introduction ($\longrightarrow$ cours ? niveau prépa ?)



J.-B. Hiriart-Urruty et C. Lemaréchal
Fundamentals of Convex Analysis
Springer-Verlag, 2002

$\boxed{\text{Merci !}}$