Introduction à l'arithmétique par intervalles

Nathalie Revol
INRIA, LIP, ENS-Lyon
`Nathalie.Revol@ens-lyon.fr`

École Jeunes Chercheurs en Algorithmique et Calcul Formel
Session *Arithmétique des ordinateurs*

Grenoble, 29 mars - 2 avril 2004

Plan (commenté) du cours

- **définition de l'arithmétique par intervalles** pour savoir de quoi on parle
- **avantages et inconvénients** dès le début, pour justifier la suite
- **optimisation globale :** exemple de problème où l'arithmétique par intervalles fait ce qu'aucune autre arithmétique n'est capable de faire
- **Newton :** exemple de problème où l'arithmétique par intervalles fait ce qu'aucune autre arithmétique n'est capable de faire
  et brique pour l'optimisation globale
- **résolution de contraintes :** algorithmes
  illustration des principes fondamentaux en arithmétique par intervalles

Plan du cours

- **définition de l'arithmétique par intervalles**

  objets
  opérations
  propriétés algébriques (perdues)
  implantation

- **avantages et inconvénients**
- **optimisation globale**
- **Newton**
- **résolution de contraintes**

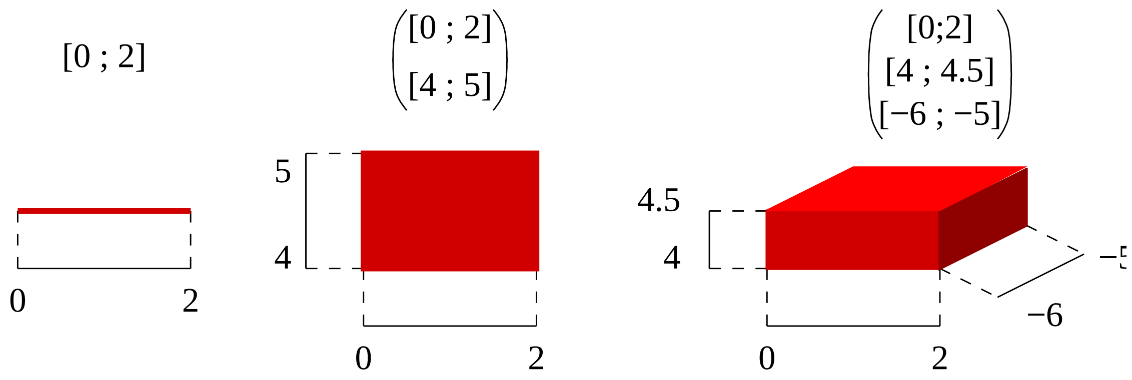
Objets manipulés en arithmétique par intervalles

(Moore 1966, Kulisch 1983, Neumaier 1990, Rump 1994, Alefeld & Mayer 2000, Jaulin 2001)

Les nombres sont remplacés par des intervalles.

- π remplacé par $[3.14159, 3.14160]$
- donnée d mesurée avec une erreur $\pm\varepsilon$ remplacée par $[d-\varepsilon, d+\varepsilon]$
- résultat cherché sur tout l'intervalle $[-10, 10]$.

Vecteur intervalle : composantes = intervalles.



Opérations en arithmétique par intervalles

Définition abstraite : le résultat d'une opération $\diamond$ entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ est

$$\boldsymbol{x} \diamond \boldsymbol{y} = \{x \diamond y \,|\, x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y}\}$$

En pratique, formules :

$$\begin{array}{rcl}
[\underline{x}, \overline{x}] + [\underline{y}, \overline{y}] & = & [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}] \\
[\underline{x}, \overline{x}] - [\underline{y}, \overline{y}] & = & [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}] \\
[\underline{x}, \overline{x}] \times [\underline{y}, \overline{y}] & = & [\min(\underline{x} * \underline{y}, \underline{x} * \overline{y}, \overline{x} * \underline{y}, \overline{x} * \overline{y}), \max(\text{idem})] \\
[\underline{x}, \overline{x}]^2 & = & [\min(\underline{x}^2, \overline{x}^2), \max(\underline{x}^2, \overline{x}^2)] \text{ si } 0 \notin [\underline{x}, \overline{x}] \\
 & & \text{et } [0, \max(\underline{x}^2, \overline{x}^2)] \text{ sinon} \\
1/[\underline{y}, \overline{y}] & = & [\min(1/\underline{y}, 1/\overline{y}), \max(1/\underline{y}, 1/\overline{y})] \text{ si } 0 \notin [\underline{y}, \overline{y}] \\
[\underline{x}, \overline{x}] / [\underline{y}, \overline{y}] & = & [\underline{x}, \overline{x}] \times (1/[\underline{y}, \overline{y}]) \text{ si } 0 \notin [\underline{y}, \overline{y}]
\end{array}$$

Fonctions en arithmétique par intervalles

Définition abstraite : le résultat d'une opération f sur $\boldsymbol{x}$ est

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathsf{Hull}\{f(x) \mid x \in \boldsymbol{x}\}$$

En pratique, fonctions élémentaires :

$$\begin{array}{lcl} \exp([\underline{x}, \overline{x}]) & = & [\exp \underline{x}, \exp \overline{x}] \text{ puisque } \exp \text{ est croissante,} \\ \operatorname{acoth}([\underline{x}, \overline{x}]) & = & [\operatorname{acoth} \overline{x}, \operatorname{acoth} \underline{x}] \text{ si } [\underline{x}, \overline{x}] \not\ni 0 \ : \ \operatorname{acoth} \text{ est décroissante} \\ \sin[\pi/3, \pi] & = & [0, 1] \\ \vdots & & \end{array}$$

On utilise la monotonie (comme pour les opérations), au moins par morceaux.

Exemples

Expression polynomiale $\boldsymbol{x}^3 - 2\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x} - 3$, avec $\boldsymbol{x} = [-5, 2]$:

$$
\begin{aligned}
& [-5,2]^3 - 2\,[-5,2]^2 + [-5,2] - 3 \\
= \;\; & [-125, 8] - 2\,[0, 25] + [-5, 2] - 3 \\
= \;\; & [-125, 8] - [0, 50] + [-5, 2] - 3 \\
= \;\; & [-183, 7]\,.
\end{aligned}
$$

Exemples

Expression en plusieurs variables $\sin \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x} \exp \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^2 \sqrt{\boldsymbol{z}}$
avec $\boldsymbol{x} = [-\pi, \pi/4]$, $\boldsymbol{y} = [-1, 1]$ et $\boldsymbol{z} = [1, 4]$:

$$
\begin{aligned}
& \sin [-\pi, \pi/4] + 2\,[-\pi, \pi/4] \times \exp [-1, 1] - [-1, 1]^2 \times \sqrt{[1, 4]} \\
= \; & \left[-1, \sqrt{2}/2\right] + [-2\pi, \pi/2] \times [1/e, e] - [0, 1] \times [1, 2] \\
= \; & \left[-1, \sqrt{2}/2\right] + [-2\pi e, \pi e/2] - [0, 2] \\
= \; & \left[-3 - 2\pi e, \sqrt{2}/2 + \pi e/2\right]
\end{aligned}
$$

Propriétés algébriques (perdues)

La soustraction n'est pas la réciproque de l'addition :

si $\boldsymbol{x} = [2,3]$, $\boldsymbol{y} = [-3,5]$ et $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = [-1,8]$

$$\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y} = [-1,8] - [-3,5] = [-6,11] \supset \boldsymbol{x} = [2,3]$$

ou encore

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = [2,3] - [2,3] = [-1,1] \neq 0$$

En effet, $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = \{x - y \,|\, x \in \boldsymbol{x},\ y \in \boldsymbol{x}\} \supset \{x - x \,|\, x \in \boldsymbol{x}\} = \{0\}$.

La division n'est pas la réciproque de la multiplication :

$$\text{si } \boldsymbol{x} = [2,3] \;\; \boldsymbol{x}/\boldsymbol{x} = [2,3]\,/\,[2,3] = [2/3, 3/2] \ni 1.$$

Propriété essentielle : tout résultat contient le résultat exact.

La multiplication de x par x n'est pas égale à l'élévation au carré :

si $\boldsymbol{x} = [-3, 2]$ $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} = [-3, 2] \times [-3, 2] = [-6, 9]$
alors que $\boldsymbol{x}^2 = \{x^2 \mid x \in \boldsymbol{x}\} = [0, 9]$.

La multiplication est sous-distributive par rapport à l'addition :

si $\boldsymbol{x} = [-2, 3]$, $\boldsymbol{y} = [1, 4]$ et $\boldsymbol{z} = [-2, 1]$,

$$\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) & = & \{x \times (y + z) \mid x \in \boldsymbol{x},\ y \in \boldsymbol{y},\ z \in \boldsymbol{z}\} \\
& = & [-2, 3] \times ([1, 4] + [-2, 1]) \\
& = & [-2, 3] \times [-1, 5] \\
& = & [-10, 15] \\
\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z} & = & \{x \times y + x' \times z \mid x \in \boldsymbol{x},\ x' \in \boldsymbol{x},\ y \in \boldsymbol{y},\ z \in \boldsymbol{z}\} \\
& = & [-2, 3] \times [1, 4] + [-2, 3] \times [-2, 1] \\
& = & [-8, 12] + [-6, 4] \\
& = & [-14, 16]
\end{array}$$

Implantation

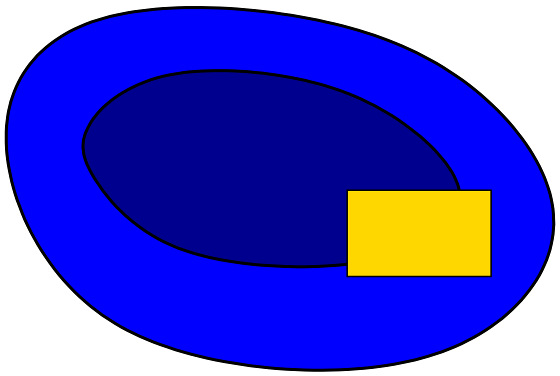
- **opérations arithmétiques et algébriques :**
  pour retourner un intervalle contenant $[\underline{x}, \overline{x}] - [\underline{y}, \overline{y}] = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}]$
  il faut retourner un intervalle contenant $[\bigtriangledown(\underline{x} - \overline{y}), \bigtriangleup(\overline{x} - \underline{y})]$
  OK si arithmétique IEEE-754 disponible (cf. cours AT)

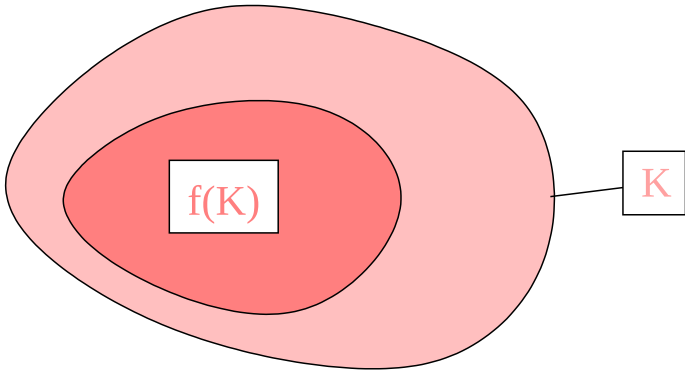
- **fonctions mathématiques :**
  pour retourner un intervalle contenant $\exp([\underline{x}, \overline{x}]) = [\exp \underline{x}, \exp \overline{x}]$
  il faut retourner un intervalle contenant $[\bigtriangledown(\exp \underline{x}), \bigtriangleup(\exp \overline{x})]$
  mais ce n'est pas prévu par la norme IEEE-754...
  Solution : écrire ses propres fonctions math. avec arrondis dirigés . . .
  ou utiliser une bibliothèque qui les implante, cf. MPFR (PZ *et al.*).

Plan du cours

- **définition de l'arithmétique par intervalles**
- **avantages et inconvénients**
  - \+ calcul ensembliste
  - \+ optimisation globale
  - – surestimation des résultats
  - – tous les problèmes sont NP-durs
- **optimisation globale**
- **Newton**
- **résolution de contraintes**

Calcul ensembliste



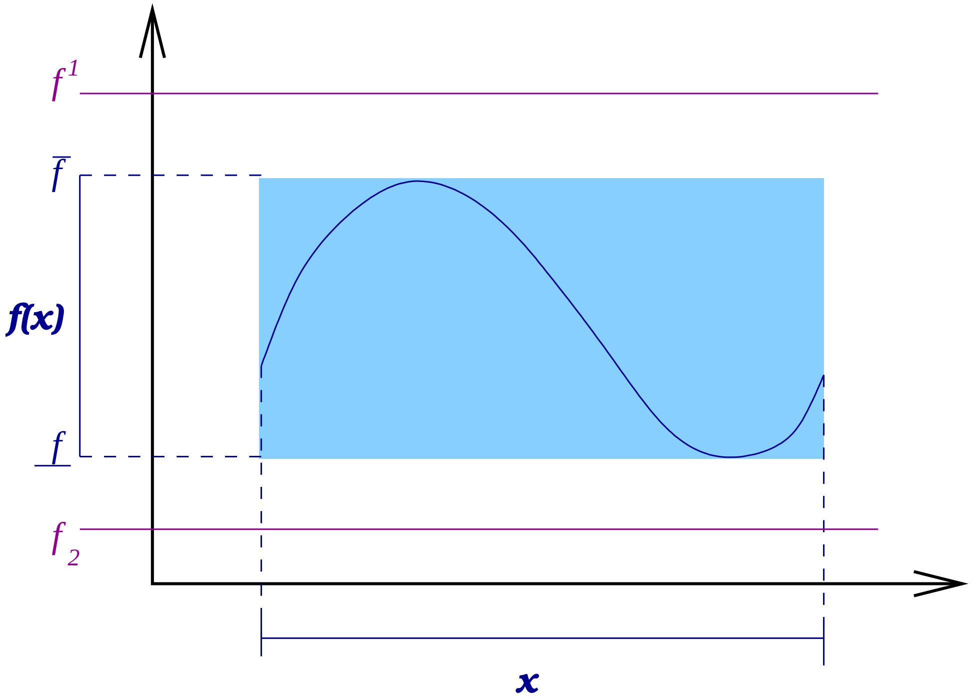


À gauche : **comportement** sûr ? contrôlable ? dangereux ?
toujours contrôlable.

À droite : **théorème de Brouwer-Schauder :**
f admet un unique point fixe sur K.

Calcul ensembliste : optimisation

Question : sur $\boldsymbol{x}$, les extrema de la fonction f sont-ils $< f^1$? $> f_2$?



Non si $f(\boldsymbol{x}) = [\underline{f}, \overline{f}]$ est inclus strictement dans $[f_2, f^1]$.

Arithmétique par intervalles : inconvénient le résultat dépend de l'expression

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et I un intervalle.

Exemple : $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$, $I = [-1, 3]$

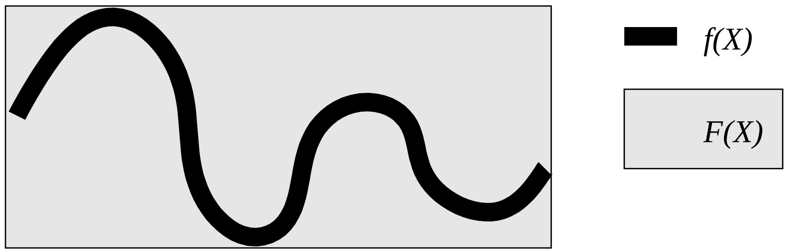
$$I^2 - 2 * I + 1 = [-1, 3]^2 - 2[-1, 3] + 1 = [0, 9] + [-6, 2] + 1 = [-5, 12]$$

et en écrivant $x^2 - 2 * x + 1 = x * (x - 2) + 1$

$$I * (I - 2) + 1 = [-1, 3] * ([-1, 3] - 2) + 1 = [-1, 3] * [-3, 1] + 1 = [-8, 4]$$

alors que $F(I) = f(I) = ([-1, 3] - 1)^2 = [0, 4]$
(en utilisant $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$).
Cf. aussi perte de propriétés algébriques : **décorrélation des variables** (*variable dependency*).

Arithmétique par intervalles : inconvénient
Wrapping effect (effet enveloppant)



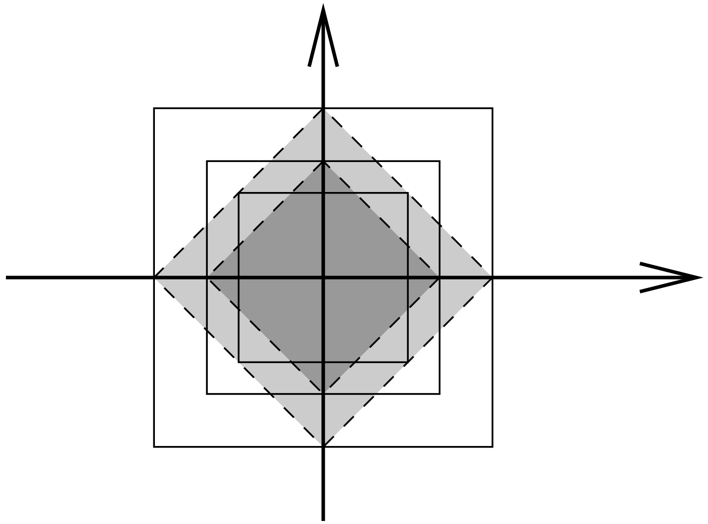


image de $f(\boldsymbol{x})$
avec $f\ :\ \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

2 rotations successives de $\pi/4$
du petit carré central

Arithmétique par intervalles : inconvénient (presque) tous les problèmes sont NP-durs

Rohn 1994 ff, Kreinovich. . .

- évaluer une fonction sur un pavé
- évaluer une fonction sur un pavé à ε près
- résoudre un système linéaire
- résoudre un système linéaire à $1/4n^4$ près
- déterminer si la solution d'un système linéaire est bornée
- calculer la norme $\|\boldsymbol{A}\|_{\infty,1}$ d'une matrice
- déterminer si une matrice par intervalles est régulière
- . . .

Plan du cours

- **définition de l'arithmétique par intervalles**
- **avantages et inconvénients**
- **optimisation globale**

  algorithme élémentaire
  algorithme de Hansen
  optimisation globale sous contraintes
- **Newton**
- **résolution de contraintes**

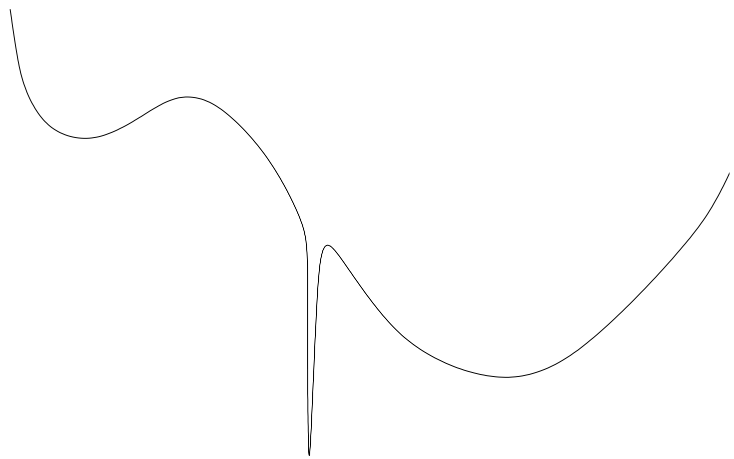
Optimiser une fonction continue

Problème : $f : I\!R^n \to I\!R$, trouver x^* et f^* tels que

$$f^* = f(x^*) = \min_x f(x)$$

Hypothèses :

- recherche dans un pavé $\boldsymbol{x}_0$
- $x^* \in$ intérieur $(\boldsymbol{x}_0)$, pas sur le bord
- f de classe $\mathcal{C}^2$



Optimiser une fonction continue

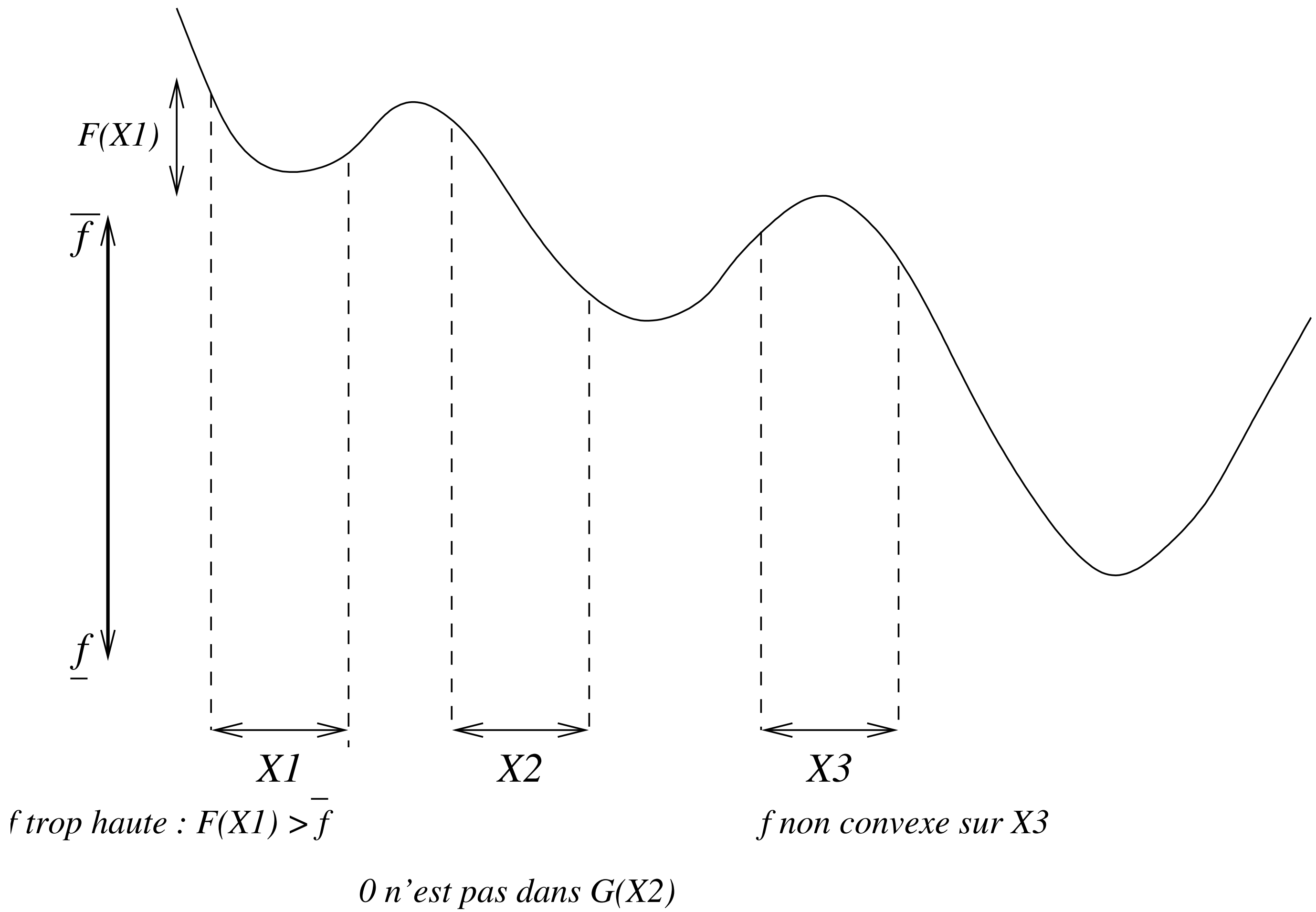
(Ratschek and Rokne 1988, Hansen 1992, Kearfott 1996. . .)

On cherche le minimum de f fonction continue sur un pavé $\boldsymbol{x}_0$.

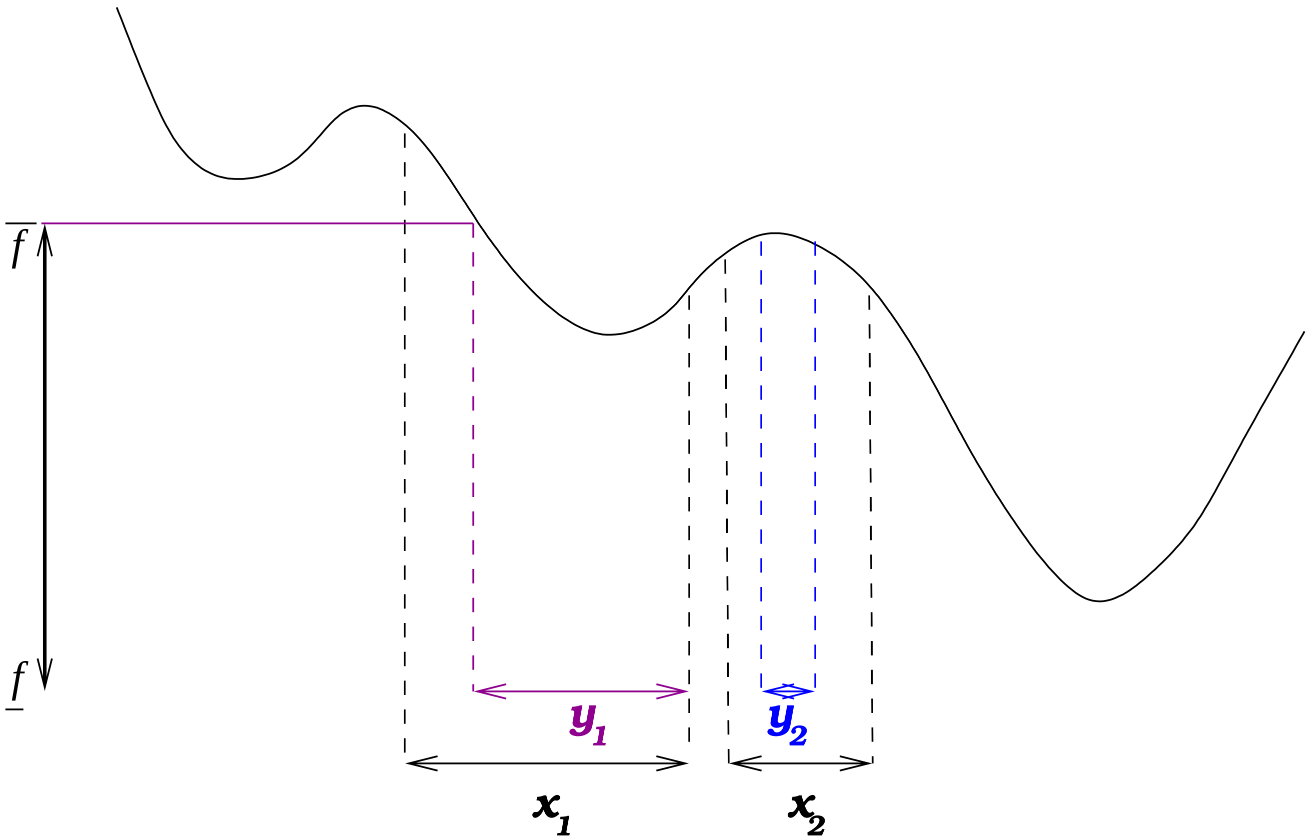
$\boldsymbol{x}_0$ pavé à examiner
$\bar{f}$ majorant courant de f^*

tant qu'il reste un pavé $\boldsymbol{x}$ à examiner
    si $f(\boldsymbol{x}) > \bar{f}$ alors
        rejeter $\boldsymbol{x}$
    sinon
        màj $\bar{f}$: si $f(mid(\boldsymbol{x})) < \bar{f}$ alors $\bar{f} = f(mid(\boldsymbol{x}))$
        couper $\boldsymbol{x}$ en 2 : $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$
        examiner $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$

Optimiser une fn continue : algorithme de Hansen principe des différentes procédures de rejet



Optimiser une fn continue : algorithme de Hansen principe des différentes procédures de réduction



Optimiser une fonction continue
algorithme de Hansen

$\mathcal{L}$ = liste des pavés en attente := $\{\boldsymbol{x}_0\}$

tant que $\mathcal{L} \neq \emptyset$ **faire**

sortir $\boldsymbol{x}$ de $\mathcal{L}$

rejeter $\boldsymbol{x}$ **?**

oui si $f(\boldsymbol{x}) > \bar{f}$

oui si Grad$f(\boldsymbol{x}) \not\ni 0$

oui si $Hf(\boldsymbol{x})$ à diagonale non > 0

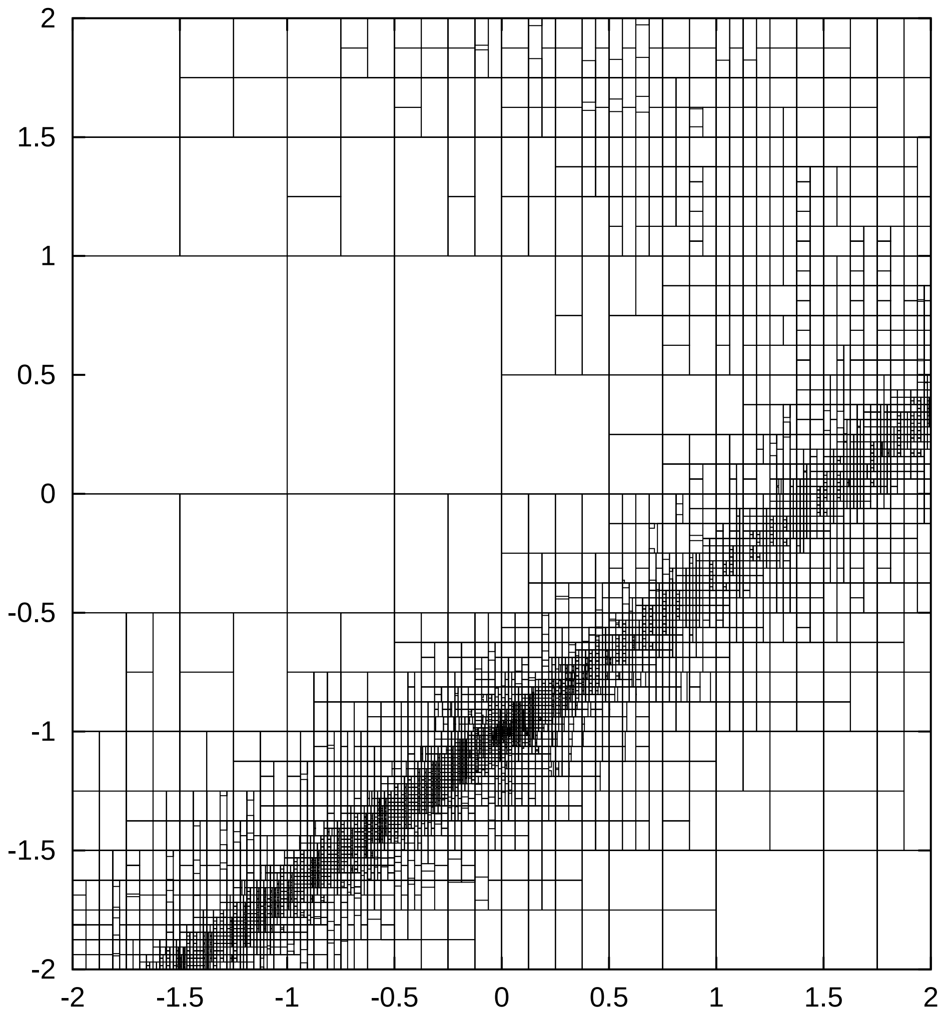
réduire $\boldsymbol{x}$

Newton sur le gradient

résoudre $\boldsymbol{y} \subset \boldsymbol{x}$ tel que $f(\boldsymbol{y}) \leq \bar{f}$

couper $\boldsymbol{y}$ **en 2** : $\boldsymbol{y}_1$ et $\boldsymbol{y}_2$

ranger $\boldsymbol{y}_1$ et $\boldsymbol{y}_2$ dans $\mathcal{L}$


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

Optimisation sous contraintes

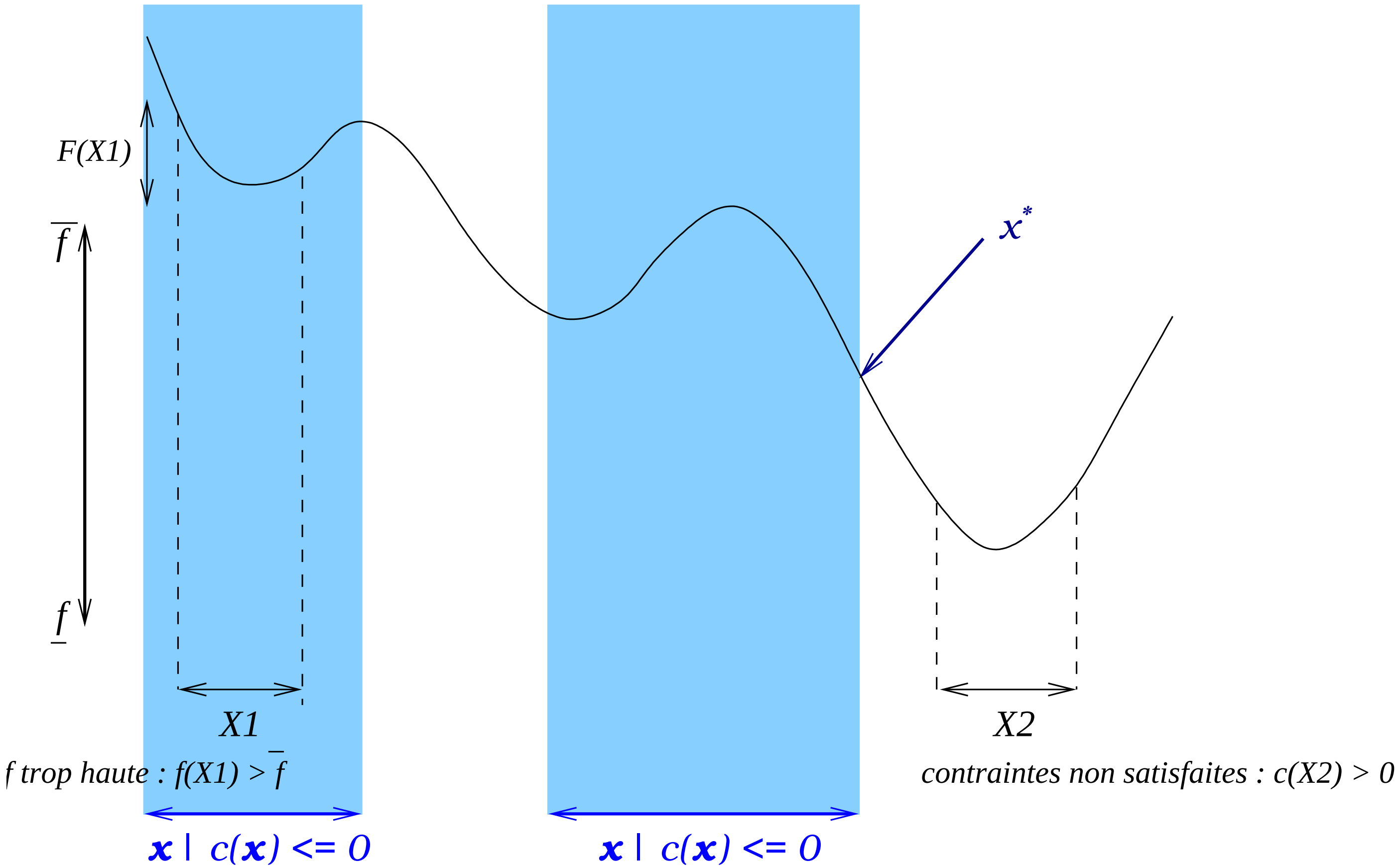
Problème : $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,
trouver x^* et f^* tels que

$$f^* = f(x^*) = \min_{\{x | c(x) \leq 0\}} f(x)$$

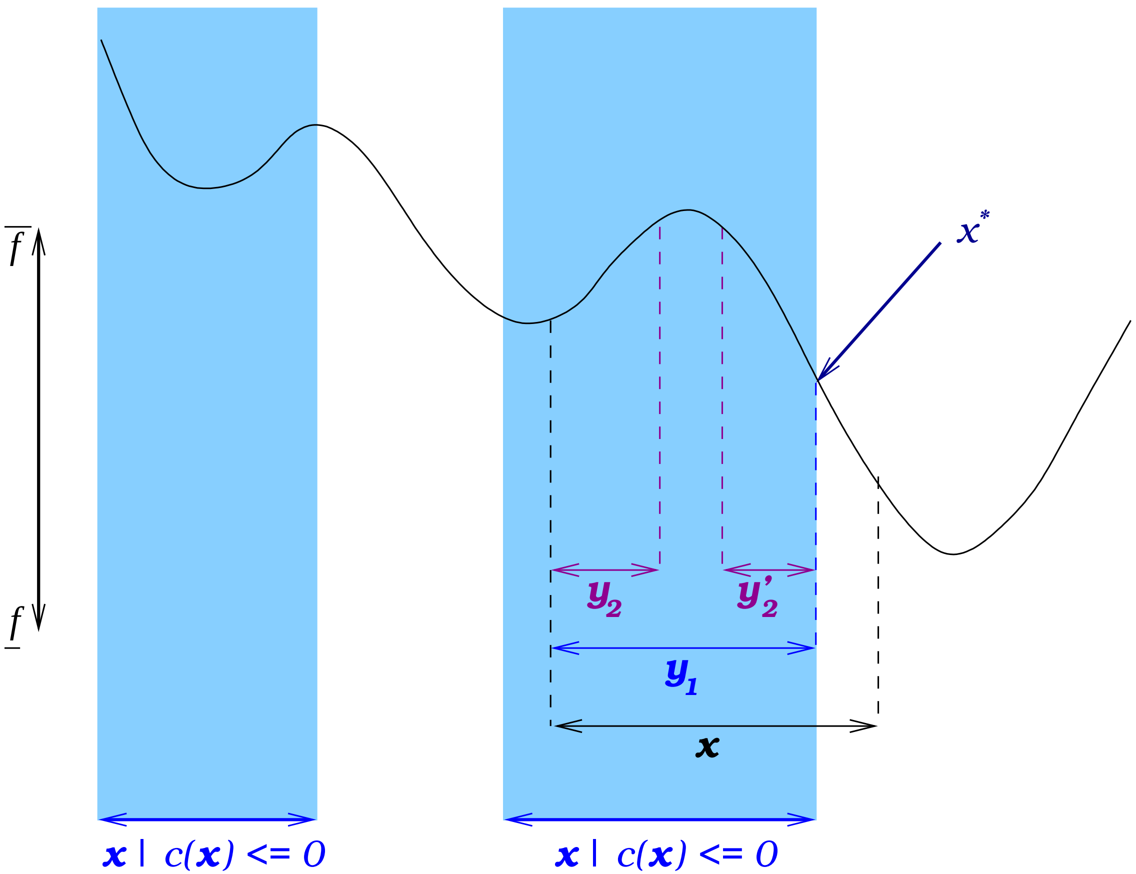
Hypothèses :

- recherche dans un pavé $\boldsymbol{x}_0$
- f de classe $\mathcal{C}^2$
- c de classe $\mathcal{C}^1$

Optimisation sous contraintes $c(x) \leq 0$ principe des différentes procédures de rejet



Optimisation sous contraintes $c(x) \leq 0$
principe des différentes procédures de réduction



Optimisation sous contraintes $c(x) \leq 0$

$\mathcal{L} := \{\boldsymbol{x}_0\}$
tant que $\mathcal{L} \neq \emptyset$ **faire**
  sortir $\boldsymbol{x}$ de $\mathcal{L}$
  rejeter $\boldsymbol{x}$ **?**
    oui si $f(\boldsymbol{x}) > \bar{f}$
    oui si Grad$f(\boldsymbol{x}) \not\ni 0$
    oui si f non convexe sur $\boldsymbol{x}$
  réduire $\boldsymbol{x}$
    résoudre $\boldsymbol{y} \subset \boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{y}) \leq \bar{f}$
    Newton sur le gradient
  couper $\boldsymbol{y}$ **en 2** : $\boldsymbol{y}_1$ et $\boldsymbol{y}_2$
    ranger $\boldsymbol{y}_1$ et $\boldsymbol{y}_2$ dans $\mathcal{L}$

$\mathcal{L} := \{\boldsymbol{x}_0\}$
tant que $\mathcal{L} \neq \emptyset$ **faire**
  sortir $\boldsymbol{x}$ de $\mathcal{L}$
  rejeter $\boldsymbol{x}$ **?**
    oui si $f(\boldsymbol{x}) > \overline{f}$
    oui si $c(\boldsymbol{x}) > 0$
  réduire $\boldsymbol{x}$
    résoudre $\boldsymbol{y} \subset \boldsymbol{x}$ tel que $c(\boldsymbol{y}) \leq 0$
    Newton sur le Lagrangien
  couper $\boldsymbol{y}$ **en 2** : $\boldsymbol{y}_1$ et $\boldsymbol{y}_2$
    ranger $\boldsymbol{y}_1$ et $\boldsymbol{y}_2$ dans $\mathcal{L}$

Plan du cours

- **définition de l'arithmétique par intervalles**
- **avantages et inconvénients**
- **optimisation globale**
- **Newton**

  besoin d'une itération spécifique
  algorithme
  propriétés : preuve d'existence et unicité
- **résolution de contraintes**

Résoudre un système non linéaire : Newton
Pourquoi une itération spécifique ?

Formule ponctuelle :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Équivalent intervalle :

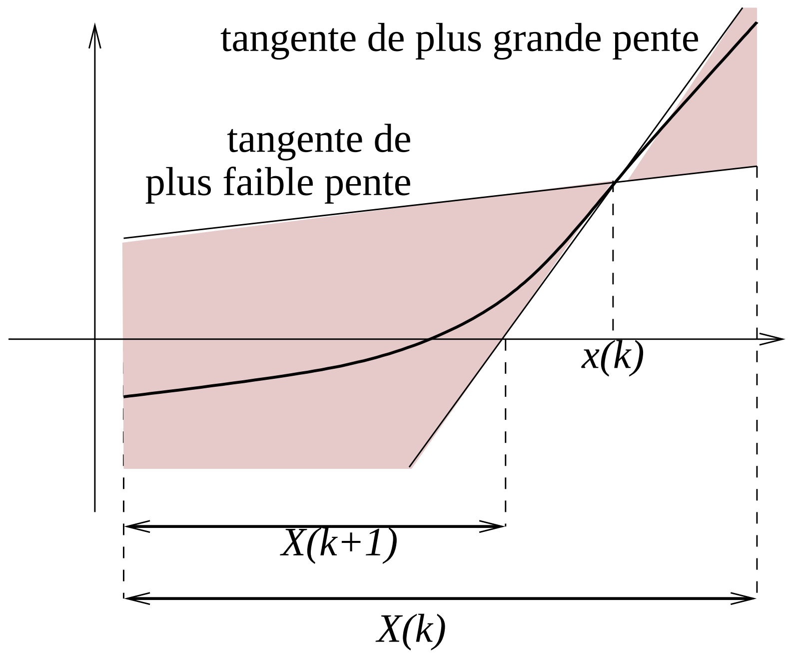
$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \frac{f(\boldsymbol{x}_k)}{f'(\boldsymbol{x}_k)}$$

$$w(\boldsymbol{x}_{k+1}) = w(\boldsymbol{x}_k) + w\left(\frac{f(\boldsymbol{x}_k)}{f'(\boldsymbol{x}_k)}\right) > w(\boldsymbol{x}_k)$$

divergence !

Algorithme de Newton par intervalles
principe d'une itération

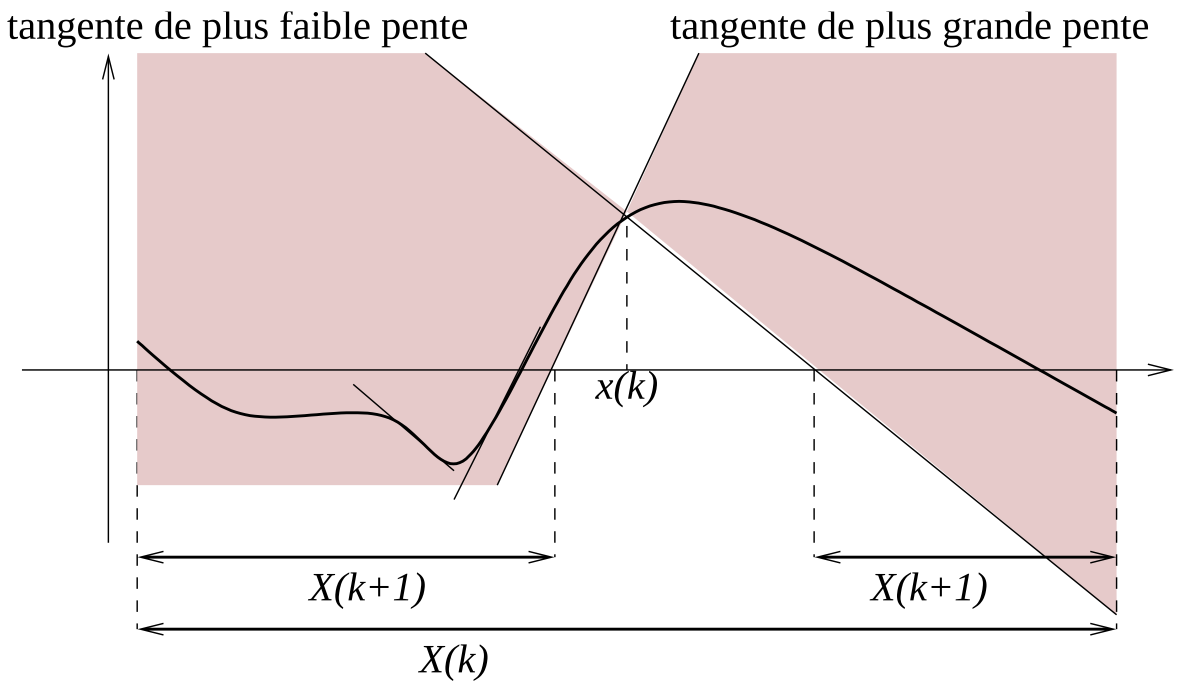
(Hansen & Greenberg 83, Baker Kearfott 95-97, Mayer 95, van Hentenryck et al. 97)



$$\boldsymbol{x}_1 := \left(x - \frac{F(\{x\})}{F'(\boldsymbol{x})} \right) \bigcap \boldsymbol{x}$$

Algorithme de Newton par intervalles
principe d'une itération

(Hansen & Greenberg 83, Baker Kearfott 95-97, Mayer 95, van Hentenryck et al. 97)



$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) := \left(x - \frac{F(\{x\})}{F'(\boldsymbol{x})} \right) \bigcap \boldsymbol{x}$$

Interval Newton algorithm

Input: F, F', $\boldsymbol{x}_0$ // $\boldsymbol{x}_0$ initial search interval

Initialization: $\mathcal{L} = \{\boldsymbol{x}_0\}$, $\alpha = 0.75$ //any value in $]0.5, 1[$ is suitable

Loop: while $\mathcal{L} \neq \emptyset$

Suppress $(\boldsymbol{x}, \mathcal{L})$

$x :=$ mid$(\boldsymbol{x})$

$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) := \left(x - \frac{F(\{x\})}{F'(\boldsymbol{x})}\right) \bigcap \boldsymbol{x}$ // $\boldsymbol{x}_1$ and $\boldsymbol{x}_2$ can be empty

if $w(\boldsymbol{x}_1) > \alpha w(\boldsymbol{x})$ or $w(\boldsymbol{x}_2) > \alpha w(\boldsymbol{x})$ then $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) :=$ bisect$(\boldsymbol{x})$

if $\boldsymbol{x}_1 \neq \emptyset$ and $F(\boldsymbol{x}_1) \ni 0$ then

if $w(\boldsymbol{x}_1)/|\text{mid}(\boldsymbol{x}_1)| \leq \varepsilon_{\boldsymbol{x}}$ or $w(F(\boldsymbol{x}_1)) \leq \varepsilon_Y$ then Insert $\boldsymbol{x}_1$ in Res

else Insert $\boldsymbol{x}_1$ in $\mathcal{L}$

same handling of $\boldsymbol{x}_2$

Output: Res, a list of intervals that may contain the roots.

Algorithme de Newton par intervalles propriétés

Existence et unicité d'un zéro sont prouvées :
s'il n'y a pas de trou et si le nouvel itéré (avant $\bigcap$) est contenu dans l'intérieur du précédent.

Existence d'un zéro prouvée :

- à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires :
  OK si $f(\inf(\boldsymbol{x}))$ et $f(\sup(\boldsymbol{x}))$ sont de signes opposés. (Théorème de Miranda en dimension supérieure).
- grâce au théorème de Schauder : si le nouvel itéré (avant $\bigcap$) est contenu dans le précédent.

Plan du cours

- **définition de l'arithmétique par intervalles**
- **avantages et inconvénients**
- **optimisation globale**
- **Newton**
- **résolution de contraintes**

  définition
  algorithme
  cas particulier d'un système linéaire

Contraintes

Cleary 1987, Benhamou et al. 1999, Jaulin et al. 2001

Problème :

$$\begin{cases} c_1(x_1, \ldots, x_n) & = & 0 \\ \vdots & & \\ c_p(x_1, \ldots, x_n) & = & 0 \end{cases}$$

que l'on réécrit :

$$\begin{array}{llll} & y_i & = & x_i & \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ & y_k & = & y_i \diamond y_j & \text{pour } n+1 \leq k \leq m \text{ et } i, j < k \\ & & & & y_k \text{ variable intermédiaire} \\ \text{ou} & y_k & = & \varphi(y_i) & \text{pour } n+1 \leq k \leq m \text{ et } i < k \end{array}$$

Contraintes : algorithme de résolution

Initialisations : $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ donnés

$\boldsymbol{y}_1 := \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n := \boldsymbol{x}_n$

Propagation

pour $k = n + 1$ à m

$\boldsymbol{y}_k := \boldsymbol{y}_i \diamond \boldsymbol{y}_j$ ou $\boldsymbol{y}_k := \varphi(\boldsymbol{y}_i)$

Rétro-propagation

pour $k = m$ à n

si $\boldsymbol{y}_k$ est défini comme $\boldsymbol{y}_i \diamond \boldsymbol{y}_j$ alors

$\boldsymbol{y}_i := \left(\boldsymbol{y}_k \diamond^{-r} \boldsymbol{y}_j\right) \cap \boldsymbol{y}_i$

$\boldsymbol{y}_j := \left(\boldsymbol{y}_i \diamond^{-l} \boldsymbol{y}_k\right) \cap \boldsymbol{y}_j$

sinon si $\boldsymbol{y}_k$ est défini comme $\varphi(\boldsymbol{y}_i)$ alors

$\boldsymbol{y}_i := \varphi^{-1}(\boldsymbol{y}_k) \cap \boldsymbol{y}_i$

Algorithme de résolution de contraintes : $\begin{cases} x_1 x_2^2 - 2x_3 & = & 0 \\ \cos x_1 + x_3 & = & 0 \end{cases}$

$\boldsymbol{x}_1 = [0, 2\pi/3]$, $\boldsymbol{x}_2 = [-1, 1]$, $\boldsymbol{x}_3 = [-1/2, 3]$		$\boldsymbol{y}_1 = [0, 2\pi/3]$, $\boldsymbol{y}_2 = [-1, 1]$, $\boldsymbol{y}_3 = [-1/2, 3]$
itér. 1 : propagation	$\boldsymbol{y}_4 = \boldsymbol{y}_2^2$	$\boldsymbol{y}_4 = [0, 1]$
	$\boldsymbol{y}_5 = \boldsymbol{y}_1 \boldsymbol{y}_4$	$\boldsymbol{y}_5 = [0, 2\pi/3]$
	$\boldsymbol{y}_6 = 2\boldsymbol{y}_3$	$\boldsymbol{y}_6 = [-1, 6]$
	$\boldsymbol{y}_7 = \boldsymbol{y}_5 - \boldsymbol{y}_6$	$\boldsymbol{y}_7 = [-6, 1 + 2\pi/3] \ni 0$
	$\boldsymbol{y}_8 = \cos \boldsymbol{y}_1$	$\boldsymbol{y}_8 = [-1/2, 1]$
	$\boldsymbol{y}_9 = \boldsymbol{y}_8 + \boldsymbol{y}_3$	$\boldsymbol{y}_9 = [-1, 4] \ni 0$
rétro-propagation	$\boldsymbol{y}_9 = \boldsymbol{y}_8 + \boldsymbol{y}_3$	$\begin{cases} \boldsymbol{y}_8 = (\boldsymbol{y}_9 - \boldsymbol{y}_3) \cap \boldsymbol{y}_8 = [-1/2, 1/2] \\ \boldsymbol{y}_3 = (\boldsymbol{y}_9 - \boldsymbol{y}_8) \cap \boldsymbol{y}_3 = [-1/2, 1/2] \end{cases}$
	$\boldsymbol{y}_8 = \cos \boldsymbol{y}_1$	$\boldsymbol{y}_1 = \cos^{-1} \boldsymbol{y}_8 \cap \boldsymbol{y}_1 = [\pi/3, 2\pi/3]$
	$\boldsymbol{y}_7 = \boldsymbol{y}_5 - \boldsymbol{y}_6$	$\begin{cases} \boldsymbol{y}_5 = (\boldsymbol{y}_7 + \boldsymbol{y}_6) \cap \boldsymbol{y}_5 = [0, 2\pi/3] \\ \boldsymbol{y}_6 = (\boldsymbol{y}_5 - \boldsymbol{y}_7) \cap \boldsymbol{y}_6 = [0, 2\pi/3] \end{cases}$
	$\boldsymbol{y}_6 = 2\boldsymbol{y}_3$	$\boldsymbol{y}_3 = (1/2\boldsymbol{y}_6) \cap \boldsymbol{y}_3 = [0, 1/2]$
	$\boldsymbol{y}_5 = \boldsymbol{y}_1 \boldsymbol{y}_4$	$\begin{cases} \boldsymbol{y}_1 = (\boldsymbol{y}_5 / \boldsymbol{y}_4) \cap \boldsymbol{y}_1 = [\pi/3, 2\pi/3] \\ \boldsymbol{y}_4 = (\boldsymbol{y}_5 / \boldsymbol{y}_1) \cap \boldsymbol{y}_4 = [0, 1] \end{cases}$
	$\boldsymbol{y}_4 = \boldsymbol{y}_2^2$	$\boldsymbol{y}_2 = \pm\sqrt{\boldsymbol{y}_4} \cap \boldsymbol{y}_2 = [-1, 1]$

Algorithme de résolution de contraintes : $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 x_2^2 - 2x_3 & = & 0 \\ \cos x_1 + x_3 & = & 0 \end{array} \right.$

$\boldsymbol{x}_1 = [0, \frac{2\pi}{3}],\ \boldsymbol{x}_2 = [-1, 1],\ \boldsymbol{x}_3 = [-\frac{1}{2}, 3]$		$\boldsymbol{y}_1 = [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}],\ \boldsymbol{y}_2 = [-1, 1],\ \boldsymbol{y}_3 = [0, \frac{1}{2}]$ $\boldsymbol{y}_4 = [0, 1],\ \boldsymbol{y}_5 = [0, 2\pi/3],\ \boldsymbol{y}_6 = [0, 1]$ $\boldsymbol{y}_7 = 0,\ \boldsymbol{y}_8 = [-1/2, 1/2],\ \boldsymbol{y}_9 = 0$
2. propagation	$\boldsymbol{y}_4 = \boldsymbol{y}_2^2$	$\boldsymbol{y}_4 = [0, 1]$
	$\boldsymbol{y}_5 = \boldsymbol{y}_1 \boldsymbol{y}_4$	$\boldsymbol{y}_5 = [0, 2\pi/3]$
	$\boldsymbol{y}_6 = 2\boldsymbol{y}_3$	$\boldsymbol{y}_6 = [0, 1]$
	$\boldsymbol{y}_8 = \cos \boldsymbol{y}_1$	$\boldsymbol{y}_8 = [-1/2, 1/2]$
rétro-propagation	$\boldsymbol{y}_9 = \boldsymbol{y}_8 + \boldsymbol{y}_3$	$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{y}_8 = (\boldsymbol{y}_9 - \boldsymbol{y}_3) \cap \boldsymbol{y}_8 = [-1/2, 0] \\ \boldsymbol{y}_3 = (\boldsymbol{y}_9 - \boldsymbol{y}_8) \cap \boldsymbol{y}_3 = [0, 1/2] \end{array} \right.$
	$\boldsymbol{y}_8 = \cos \boldsymbol{y}_1$	$\boldsymbol{y}_1 = \cos^{-1} \boldsymbol{y}_8 \cap \boldsymbol{y}_1 = [\pi/2, 2\pi/3]$
	$\boldsymbol{y}_7 = \boldsymbol{y}_5 - \boldsymbol{y}_6$	$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{y}_5 = (\boldsymbol{y}_7 + \boldsymbol{y}_6) \cap \boldsymbol{y}_5 = [0, 1] \\ \boldsymbol{y}_6 = (\boldsymbol{y}_5 - \boldsymbol{y}_7) \cap \boldsymbol{y}_6 = [0, 1] \end{array} \right.$
	$\boldsymbol{y}_6 = 2\boldsymbol{y}_3$	$\boldsymbol{y}_3 = (1/2\boldsymbol{y}_6) \cap \boldsymbol{y}_3 = [0, 1/2]$
	$\boldsymbol{y}_5 = \boldsymbol{y}_1 \boldsymbol{y}_4$	$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{y}_1 = (\boldsymbol{y}_5 / \boldsymbol{y}_4) \cap \boldsymbol{y}_1 = [\pi/2, 2\pi/3] \\ \boldsymbol{y}_4 = (\boldsymbol{y}_5 / \boldsymbol{y}_1) \cap \boldsymbol{y}_4 = [0, 2/\pi] \end{array} \right.$
	$\boldsymbol{y}_4 = \boldsymbol{y}_2^2$	$\boldsymbol{y}_2 = \pm\sqrt{\boldsymbol{y}_4} \cap \boldsymbol{y}_2 = [-\sqrt{2/\pi}, \sqrt{2/\pi}]$
$\boldsymbol{x}_1 = [0, \frac{2\pi}{3}],\ \boldsymbol{x}_2 = [-1, 1],\ \boldsymbol{x}_3 = [-\frac{1}{2}, 3]$		$\boldsymbol{y}_1 = [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}],\ \boldsymbol{y}_2 = [-\sqrt{2/\pi}, \sqrt{2/\pi}],\ \boldsymbol{y}_3 = [0, \frac{1}{2}]$

Problème $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 x_2^2 - 2x_3 & = & 0 \\ \cos x_1 + x_3 & = & 0 \end{array} \right.$

avec $\boldsymbol{x}_1 = [0, \frac{2\pi}{3}]$, $\boldsymbol{x}_2 = [-1, 1]$, $\boldsymbol{x}_3 = [-\frac{1}{2}, 3]$.

Solution optimale obtenue en deux itérations :

$\boldsymbol{x}_1 = [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$, $\boldsymbol{x}_2 = [-\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}]$, $\boldsymbol{x}_3 = [0, \frac{1}{2}]$.

Résolution de systèmes linéaires : Hansen-Sengupta

Problème : résoudre $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ qui s'écrit aussi :

$$\boldsymbol{A}_{i,1}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \boldsymbol{A}_{i,i}\boldsymbol{x}_i + \ldots + \boldsymbol{A}_{i,n}\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{b}_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

On cherche Hull $(\Sigma_{\exists\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}))$ = Hull $(\{x \; : \; \exists A \in \boldsymbol{A}, \; \exists b \in \boldsymbol{b}, Ax = b\})$.

Pré-traitement : multiplier le système par $mid(\boldsymbol{A})^{-1}$.
Nouveau système $= mid(\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Espoir : itération contractante.

Algorithme : appliquer l'itération de Gauss-Seidel

tant que convergence non atteinte faire

pour $i = 1$ à n faire

$$\boldsymbol{x}_i := \left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j \neq i} \boldsymbol{A}_{i,j}\boldsymbol{x}_j\right) / \boldsymbol{A}_{i,i}$$

Conclusion

Arithmétique par intervalles

- permet de résoudre des problèmes insolubles par d'autres techniques
- permet de se rapprocher du calcul ensembliste
- rend effectifs des théorèmes qui n'en avaient pas l'air (Schauder)
- permet de rechercher tous les zéros d'une fonction ou ses extrema globaux
- renvoie des résultats trop larges
- est plus coûteuse que l'arithmétique flottante $\Rightarrow$ résolution de problèmes plus petits

Conclusion

Morale

- oublier ses préjugés :
  - ne pas utiliser aveuglément des algorithmes qui ont bonne presse
  - considérer des algorithmes qui ont mauvaise presse (Gauss-Seidel)
- préférer des itérations contractantes

Credo personnel

Quand on a une itération contractante : bissection (mais complexité exponentielle) ou mieux, on peut atteindre une précision arbitraire. . . pourvu que l'arithmétique sous-jacente le permette
$\Rightarrow$ arithmétique par intervalles en précision arbitraire : bibliothèque MPFI et algorithmes (Newton, systèmes linéaires. . .)

Solving linear systems
Hansen & Sengupta's algorithm

Linear system: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ with $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{b}$ given.
Problem: compute an enclosure of
Hull $(\Sigma_{\exists\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})) =$ Hull $(\{x \,:\, \exists A \in \boldsymbol{A},\ \exists b \in \boldsymbol{b}, Ax = b\})$.

Hansen & Sengupta's algorithm
compute C an approximation of mid$(\boldsymbol{A})^{-1}$
apply Gauss-Seidel to $C\boldsymbol{Ax} = C\boldsymbol{b}$ until convergence:
$\boldsymbol{x}^{k+1} = M^{-1}N\boldsymbol{x}^k + M^{-1}C\boldsymbol{b}$ with $M =$ triu$(C\boldsymbol{A})$ and $N = M - C\boldsymbol{A}$.

Idea:
$C\boldsymbol{A}$ is diagonally dominant (?), the iteration matrix has a spectral radius < 1 (?) and this iteration is a contraction.

Hansen & Sengupta's algorithm automatic adaptation of the working precision

First need: being able to improve the current interval $\boldsymbol{x}$
$\Rightarrow$ increase the working precision when $w(\boldsymbol{x}) = 1$ "ulp".

Second need: being able to refine the Gauss-Seidel iteration evaluation.
Notation: $[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}] =$ bisect $(\boldsymbol{x})$
one iteration applied to $\boldsymbol{x}$ (resp. to $\boldsymbol{x_1}$, resp. to $\boldsymbol{x_2}$) gives $\boldsymbol{y}$ (resp. $\boldsymbol{y_1}$, resp. $\boldsymbol{y_2}$)
increase the working precision if $w(\boldsymbol{y_1}) \geq w(\boldsymbol{y})$ or $w(\boldsymbol{y_2}) \geq w(\boldsymbol{y})$.

How to increase the working precision : many possible choices, for us it is doubled.

Interval Newton algorithm with arbitrary precision

Input: F, F', $\boldsymbol{x}_0$ $\quad$ // $\boldsymbol{x}_0$ initial search interval

Initialization: $\mathcal{L} = \{\boldsymbol{x}_0\}$, $\alpha = 0.75$ $\quad$ //any value in $]0.5, 1[$ is suitable

Loop: while $\mathcal{L} \neq \emptyset$

Suppress $(\boldsymbol{x}, \mathcal{L})$

Increase the working precision if needed

$x :=$ mid$(\boldsymbol{x})$

$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) := \left(x - \frac{F(\{x\})}{F'(\boldsymbol{x})}\right) \bigcap \boldsymbol{x}$ $\quad$ // $\boldsymbol{x}_1$ and $\boldsymbol{x}_2$ can be empty

if $w(\boldsymbol{x}_1) > \alpha w(\boldsymbol{x})$ or $w(\boldsymbol{x}_2) > \alpha w(\boldsymbol{x})$ then $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) :=$ bisect$(\boldsymbol{x})$

if $\boldsymbol{x}_1 \neq \emptyset$ and $F(\boldsymbol{x}_1) \ni 0$ then

if $w(\boldsymbol{x}_1)/|\text{mid}(\boldsymbol{x}_1)| \leq \varepsilon_{\boldsymbol{x}}$ **and** $w(F(\boldsymbol{x}_1)) \leq \varepsilon_Y$ then Insert $\boldsymbol{x}_1$ in Res

else Insert $\boldsymbol{x}_1$ in $\mathcal{L}$

same handling of $\boldsymbol{x}_2$

Output: Res, a list of intervals that may contain the roots.