Simulation de la turbulence par la méthode particulaire.

Table des matières

Première partie

Présentation du problème et de la méthode particulaire

Préface

Actuellement, il existe trois approches fondamentales pour résoudre un problème en mécanique des fluides: l'approche théorique, l'approche expérimentale et l'approche numérique. Chacune possède ses avantages et ses inconvénients. La meilleure approche serait de concilier ces trois approches dans l'étude du problème.

L'approche numérique a l'avantage d'avoir un coût relativement réduit par rapport ux méthodes expérimentales. Toutes les données du problème sont contrôlees par l'utilisateur et les résultats peuvent être obtenus dans tous les points du domaine d'étude. L'inconvénient provient du fait que les résultats sont presque toujours des approximations.

Ce projet est consacré à la validation de méthode numérique de couplage particules-grille dans l'étude et la simulation d'écoulements incompressibles en Turbulence Homogène Isotrope, tridimensionnelle. Notre espoir se tourne sur le fait que cette méthode simule correctement l'évolution d'un champ turbulent, suivant essentiellement deux critères : approcher les résultats obtenus par les méthodes spectrales (méthode numérique de référence dans l'étude de la turbulence) et reproduire correctement les considérations développées en théorie de la turbulence homogène isotrope.

Les méthodes particulaires se basent sur la discrétisation du champ de vorticité et la description lagrangienne des équations gouvernant l'écoulement, qui une fois résolues, déterminent l'évolution des champs à calculer. Les méthodes particulaires classiquent jouissent du fait que seul la partie du domaine de calcul où la vorticité est non nulle, est prise en compte, du traitement rigoureux des conditions aux limites à l'infini.

En simulation numériques, il est désirable d'utiliser des méthodes numériques qui conviennent à la physique du problème. Les méthodes de couplage particules-grille combinent le principe des méthodes particulaires et les schémas basés sur un maillage eulérien. Les méthodes particulaires et les schémas eulériens sont donc utilisées dans la même partie du domaine, oû chacune est employée pour discrétiser différentes parties des équations gouvernantes. La grille eulérienne est implémentée pour calculer efficacement le champ de vitesse et prendre en compte les conditions aux limites, tandis le schéma particulaire permet la résolution exacte de la convection.

Chapitre 1

Etude des écoulements incompressibles

1.1 Origine des équations de Navier-Stokes

Le système d'équations qui gouverne le mouvement d'un fluide homogène et visqueux dans un domaine Ω, se bâtit sur base des lois de conservations et de comportement du fluide newtonien:

- **Conservation de la masse:**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\, div\, \mathbf{u} = 0$$

- **Conservation de la quantité de mouvement:**

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_i$$
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

- **Loi de comportement:**

$$\sigma_{ij} = -p\, \delta_{ij} + \lambda\, \epsilon_{ll}\, \mathbf{u}\, \delta_{ij} + 2\, \mu\, \epsilon_{ij}\, \mathbf{u}$$

- **Contrainte d'incompressibilité:**

$$div\, \mathbf{u} = 0$$

Les notations utilisées sont les suivantes:

$\mathbf{u}$ est le vecteur vitesse de composantes (u_1, u_2, u_3)

$\rho(\mathbf{x}, t)$ est la masse volumique

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ est la densité volumique des forces extérieures agissant sur le fluide

$p(\mathbf{x}, t)$ représente la pression du fluide

$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ sont les composantes du tenseur des contraintes; sa symétrie résulte de la conservation du moment de la quantité de mouvement.

$\epsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$ sont les composantes du tenseur de déformation

λ et μ sont les coefficients de viscosité.

Les conditions aux limites découlant respectivement des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont

$$\mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

si $\partial\Omega$ est une paroi fixe (sinon c'est la vitesse relative qui est nulle)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

$\mathbf{n}$ étant le vecteur unitaire de la normale extérieure à Ω et $\vec{F}$ la densité surfacique de l'effort appliqué au point considéré par la paroi $\partial\Omega$ sur le fluide. En fait, la loi de conservation de la masse impose seulement

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

c'est la prise en compte du frottement visqueux sur la paroi qui entraîne l'annulation de la vitesse tangentielle.

1.2 Présentation du problème

Nous désirons étudier le comportement d'un fluide newtonien incompressible dans un domaine Ω, pour des nombres de Reynolds tres élevés. Dans notre cas, notre domaine est de forme cubique et de conditions aux limites tripériodiques.

Il s'agira dès lors de résoudre le système suivant (composé de 4 équations à 4 inconnues u_1, u_2, u_3, p), en respectant la contrainte d'incompressibilité et en tenant compte des conditions aux limites tripériodiques.

Trouver le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ *et le gradient de pression vérifiant le système suivant :*

$$\begin{cases} div\, \mathbf{u} = 0 & dans\, \Omega, \\ \rho_0(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}) = -\dfrac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \triangle u_i & dans\, \Omega, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) & sur\, \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

sachant que la densité ρ_0 *est fixée par l'hypothèse d'incompressibilité et que la viscosité dynamique* $\nu = \dfrac{\mu}{\rho_0}$ *est connue. Nous avons également négligé les forces extérieures* $\mathbf{f}$*.*

Remarquons que la pression peut être considérée comme le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité.

1.3 Formulation vitesse-tourbillon des équations

Dans la section précédente nous avons présenté la formulation vitesse-pression des équations de Navier-Stokes.

Les principales difficultés liées à la résolution de ces équations en variables primitives résident dans :

- la non-linéarité des équations

- la présence de la contrainte d'incompressibilité qui doit être satisfaite à tout instant

- le traitement de la pression pour laquelle les conditions aux limites ne sont pas explicitiment connues.

La formulation vitesse-tourbillon que nous présentons est celle utilisée par les méthodes vortex. Elle est obtenue en prenant le rotationnel du système (1.1) :

Nous définissons le vecteur vorticité par :

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}$$

Nous obtenons dès lors l'équation du tourbillon

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \omega - (\omega \cdot \nabla)\, \mathbf{u} = 0$$

où

$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\omega$ correspond au terme de conduction

$(\omega \cdot \nabla)\,\mathbf{u}$ correspond au terme de déformation

Le terme de stretching n'apparait qu'en trois dimension. Ce terme affecte profondément la dynamique de l'écoulement. Il est en particulier responsable du processus d'intensification vorticitaire. L'étirement de la vorticité est considéré comme le méchanisme par lequel l'énergie est transférée des grandes échelles aux petites échelles.

Loi de Biot-Savart

Il s'agit à présent de résoudre le système de Navier-Stokes sous la formulation vitesse-tourbillon. La difficulté qui apparait est le couplage entre la vitesse et le vecteur tourbillon.

C'est pourquoi, nous introduisons la loi de Boit-Savart, qui permet de relier le champ de vitesse au champ de tourbillon par une représentation intégrale.

Désignons par G la solution élémentaire du Laplacien en dimension trois.

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}|\mathbf{x}|$$

Le noyau K est la fonction matricielle telle que:

$$K \star \omega(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} \times \omega(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = curl(G \star \omega)$$

Nous obtenons dès lors le champ de vitesse, à partir de la vorticité, en calculant:

$$u(\mathbf{x}) = K \star \omega(\mathbf{x})$$

Chapitre 2

Méthodes des particules tourbillons

Préface

Les méthodes vortex sont basées sur la discrétisation du champ de vorticité et sur la description lagrangienne des équations qui gouvernent l'écoulement. Ces méthodes consistent à disposer des particules dans les régions où la vorticité n'est pas nulle et de suivre l'évolution de la position et de la circulation de ces particules. Le domaine de calcul s'adapte donc aux caractéristiques intrinsèques de l'écoulement. Ceci constitue un premier avantage par rapport aux méthodes eulériennes où le calcul se réalise sur les points d'une grille fixe. De plus, la méthode vortex permet le traitement rigoureux des conditions aux limites à l'infini. Enfin, le traitement de la convection par le transport des particules permet une prise en compte précise et stable de la partie non-linéaire des équations de Navier-Stokes et n'introduit donc aucune dissipation numérique.

2.1 Méthode vortex purement lagrangienne

2.1.1 Ecoulement non-visqueux

Considérons les équations eulériennes de Navier-Stokes, sous la formulation vitesse-tourbillon:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} & dans\, \Omega, \\ \omega(\mathbf{x}, 0) = \omega_0(\mathbf{x}) & sur\, \Omega, \\ \mathbf{u} = K \star \omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Supposons que la vitesse $\vec{u}$ est connue, nous élaborons la méthode particulaire de la manière suivante:

Nous approchons le champ de vorticité initial par une combinaison linéaire de masses de Dirac

$$\omega_0(x) \approx \omega_0^h(x) = \sum_p \alpha_p \, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$$

Le vecteur $\alpha_p = h^3 \omega_0(\mathbf{x}_p)$ est la circulation associée à la particule p, qui peut être obtenue par le produit de la valeur locale de la vorticité ω_p par le volume v_p autour de la particule p , et $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$ est la masse de Dirac centrée au point $\mathbf{x}_p$

En considérant que $\mathbf{u}^h$ est une approximation du champ de vitesse $\mathbf{u}$, la méthode vortex du problème d'Euler 3D consiste à résoudre approximativement le système (2.1), dont la solution sera notée par

$$\omega^h(x, t) = \sum_p \alpha_p(t) \, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p^h(t))$$

où

$\mathbf{x}_p^h(t) = \mathbf{x}^h(t, \mathbf{x}_p, 0)$ sont les courbes caractéristiques au système de coordonnée lagrangienne associées à la vitesse calculée $\mathbf{u}^h$.

Il nous reste à établir le couplage entre le champ de tourbillon et le champ de vitesse, à l'aide de la loi de Boit-Savart. Le noyau K a une singularité à l'origine qui peut être supprimée à l'aide d'une convolution avec une fonction régularisante. Nous le résumons par:

$$\mathbf{u}_\varepsilon^h(\mathbf{x}, t) = K_\varepsilon \star \omega = \sum_p K_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \star \alpha_p$$

où

$$K_\varepsilon = K \star \zeta_\varepsilon$$

et la fonction ζ_ε est obtenue à partir d'une fonction de régularisation, appelée "cut-off", suivant le changement d'échelle:

$$\zeta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-3}\zeta(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$$

Cette fonction de R^3 vérifie les propriétés du moment jusqu'à l'ordre r $\geq$2,

$$\begin{cases} \int_{R^3} \zeta(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1 \\ \int_{R^3} \mathbf{x}^\alpha \zeta(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0 \quad 1 \leq |\alpha| \leq r-1 \\ \int_{R^3} |\mathbf{x}|^r |\zeta(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty \end{cases} \tag{2.2}$$

Le système à résoudre par méthode vortex s'écrit désormais de la manière suivant:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{x}^h(t;\mathbf{x}_p,0) = \mathbf{u}_\varepsilon^h(\mathbf{x}^h(t;\mathbf{x}_p,0),t) \\ \mathbf{x}^h(t;\mathbf{x}_p,0) = \mathbf{x}_p \\ \frac{d}{dt}\alpha_p(t) = \nabla \mathbf{u}_\varepsilon^h(\mathbf{x}_p^h(t),t)\alpha_p(t) \\ \alpha_p(0) = \alpha_p \\ \mathbf{u}_\varepsilon = K_\varepsilon \star \omega \end{cases} \tag{2.3}$$

Remarquons qu'un candidat naturel pour approcher la vorticité exacte ω est le champ de vorticité approximé et régularisé

$$\omega_\varepsilon^h = \omega^h \star \zeta_\varepsilon$$

Dès lors, le champ de vitesse régularisé $\mathbf{u}_\varepsilon$ peut être vu comme le champ de vitesse exacte associé à la vorticité ω_ε^h.

2.1.2 Ecoulement visqueux

Le schéma numérique prenant en compte les effets de diffusion est réalisé de manière à conserver le caractère lagrangien des méthodes vortex. Dans un schéma temporelle, il est naturel de considérer successivement en sous-étapes la contribution visqueuse et non-visqueuse des équations.

Algorithme de viscous splitting

L'évolution du champ de vorticité est gouvernée par l'expression

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\omega - (\omega \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = \nu \triangle \omega$$

Le champ de vitesse est obtenu en résolvant l'équation de Poisson ($\triangle \mathbf{u} = -\nabla \times \omega$).

L'évolution de l'écoulement est considérée en pas de temps discrets. A chaque étape, le champ de vorticité est convecté ($(\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\omega$) et diffusé ($\nu \triangle \omega$). L'algorithme du Viscous Splitting consiste donc à considérer successivement les effets convectifs et diffusifs. Cet algorithme peut impliquer plusieurs sous-étapes afin d'augmenter la précision du Viscous Splitting.

Les deux étapes de l'algorithme s'expriment de la manière suivante:

- **Convection:**

$$\frac{\partial\, \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\omega \quad = \quad (\omega \cdot \nabla)\,\mathbf{u} \tag{2.4}$$

- **Diffusion:**

$$\frac{\partial\, \omega}{\partial t} \quad = \quad \nu \triangle \omega \tag{2.5}$$

Sous la forme lagrangienne:

- **Convection:**

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} \quad = \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}_p) \tag{2.6}$$

$$\frac{d\,\omega_p}{dt} \quad = \quad (\omega \cdot \nabla)\,\mathbf{u} \tag{2.7}$$

- **Diffusion:**

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} \quad = \quad 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{d\,\omega_p}{dt} \quad = \quad \nu \triangle \omega(\mathbf{x}_p) \tag{2.9}$$

où $\mathbf{x}_p$ et ω_p dénotent la position et la vorticité associés à chaque élément fluide.

Dans l'algorithme, dans la première sous-étape, les éléments fluide sont transportés avec la vitesse de l'écoulement local. La diffusion agit sur ces nouvelles positions afin de modifier le champ de vorticité de l'écoulement

Il nous reste à évaluer l'opérateur de diffusion. En différences finies, cet opérateur est facilement approché car on connait à tout moment les voisins de chaque noeuds et leurs distances. En méthode vortex, les points de grille sont définis par les particules qui se déplacent avec la vitesse du fluide. Parmi plusieurs approches développées pour le calcul de la diffusion, nous en retiendrons une plus particulièrement.

Méthode d'échange de circulation (Particule Strength Exchange)

Le but de cette approche déterministe est d'obtenir une évaluation consistante de l'opérateur $\nu\triangle\omega(x_p)$. L'idée principale est de remplacer cette opérateur de diffusion par une intégrale. La motivation se justifie par le fait que les intégrales sont mieux approchées par les méthodes particulaires que les opérateurs différentiels du second ordre.

Décrivons à présent cette méthode résultante:

Soit η, le noyau satisfaisant les propriétés de moment suivantes:

$$\begin{cases} \eta \in R^d \\ \displaystyle\int_{R^d} \mathbf{x}^\alpha \eta(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0 \qquad if\ 1 \leq |\alpha| \leq R+1, \alpha \notin (...,2,...) \\ \displaystyle\int_{R^d} \mathbf{x}^\alpha \eta(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 2 \qquad if\ 1 \leq |\alpha| \leq R+1, \alpha \in (...,2,...) \\ \displaystyle\int_{R^d} |\mathbf{x}|^{r+2} |\eta(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} < \infty \end{cases} \tag{2.10}$$

Pour $\varepsilon > 0$, nous définissons $\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-3}\,\eta(\dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$, nous considérons l'opérateur intégral $\triangle_\varepsilon$ défini par

$$\triangle_\varepsilon \omega(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-2} \int (\omega(\mathbf{y}) - \omega(\mathbf{x}))\, \eta_\varepsilon(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{y} \tag{2.11}$$

Pour conclure, il nous reste à appliquer la méthode PSE à l'algorithme de Splitting.

Le schéma considère

$$\omega^h(\mathbf{x},t) = \sum_p \alpha_p(t)\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p^h(t))$$

où les trajectoires des particules $\mathbf{x}_p^h$ sont calculées par le champ de vitesse $\mathbf{u}^h = K_\varepsilon \star \omega^h$ et $\omega^h(t)$ obéit au système d'équations différentielles ordinaires correspondant à la deuxième étape du Viscous-Splitting.

$$\frac{d\,\omega_p^h}{dt} = \nu\,\varepsilon^{-2} \sum_q (v_q\,\omega_q^h - v_p\,\omega_p^h)\,\eta_\varepsilon(\mathbf{x}_q^h - \mathbf{x}_p^h) \tag{2.12}$$

Enfin, l'expression (2.11) nous fournit une approximation intégrale de l'opérateur de Laplace, vérifiant le résultat:

Théorème *Sous les hypothèses (2.10), si* $\omega \in W^{r+2,p}(R^3)$ *pour* $p \in [1, +\inf]$*, alors l'estimation suivante est vérifiée:*

$$||\triangle_\varepsilon \omega - \triangle \omega||_{0,p} \leq C\varepsilon^r ||\omega||_{r+2,p}$$

Preuve

Démontrons le résultat pour $p = \infty$. Considérons le développement de Taylor de ω au point x, jusqu'à l'ordre $r+2$:

$$\omega(\mathbf{y}) = \omega(\mathbf{x}) + \omega(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \nabla)\,\omega(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{1}{(r+1)!}(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \nabla)^{(r+1)}\omega(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{r+2}||\omega||_{r+2,\infty})$$

En injectant ce développement dans le membre de droite de (2.11), et par (2.10), la contribution des termes de la forme $\int(\mathbf{y}-\mathbf{x})^\alpha \eta_\varepsilon(\mathbf{y}-\mathbf{x})d\mathbf{y}$ s'annule excepté pour les termes

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) \int (y_1 - x_1)^2\,\eta_\varepsilon(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,d\mathbf{y} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) \int (y_2 - x_2)^2\,\eta_\varepsilon(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,d\mathbf{y}$$
$$+ \frac{\partial^2\omega}{\partial x_3^2}(\mathbf{x}) \int (y_3 - x_3)^2\,\eta_\varepsilon(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,d\mathbf{y} + ||\omega||_{r+2,\infty}\,\mathcal{O}(\int |\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{r+2}\,\eta_\varepsilon(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,d\mathbf{y})$$

Après le changement de variable $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{\varepsilon}$ dans les intégrales, nous obtenons,

$$\triangle_\varepsilon \omega(\mathbf{x}) = \triangle\omega(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^r)$$

Analyse de la stabilité

Considérons le système (2.12) que nous intégrons par un schéma d'Euler explicite avec un pas de temps $\triangle t$

$$\omega_p^{n+1} = \omega_p^n + \frac{\nu\triangle t}{\varepsilon^2} \sum_q (v_q\,\omega_q^n - v_p\,\omega_p^n)\,\eta_\varepsilon(\mathbf{x}_q^n - \mathbf{x}_p^n) \tag{2.13}$$

Sous une autre forme,

$$\omega_p^{n+1} = \omega_p^n(1 - \nu\triangle t\,\varepsilon^{-2}\sum_q v_q\,\eta_\varepsilon(\mathbf{x}_q^n - \mathbf{x}_p^n)) + \nu\triangle t\,\varepsilon^{-2}\sum_q v_q\,\omega_q^n\,\eta_\varepsilon(\mathbf{x}_q^n - \mathbf{x}_p^n)$$

Si nous considérons une fonction cut-off positive, et si

$$\nu\triangle t\,\varepsilon^{-2}\sum_q v_q\,|\eta_\varepsilon(\mathbf{x}_q^n - \mathbf{x}_p^n)| \leq 1$$

alors,

$$\max_p |\,\omega_p^{n+1}| \leq \max_p |\,\omega_p^n|$$

Lorsque

$$\sum_q v_q\,|\eta_\varepsilon(\mathbf{x}_q^n - \mathbf{x}_p^n)| \approx C = \int \eta(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \tag{2.14}$$

nous obtenons la condition de stabilité, pour le schéma d'Euler explicite:

$$\frac{\nu\triangle t\,C}{\varepsilon^2} \leq 1$$

Remarquons que l'approximation (2.14) n'est valable que si la fréquence de remaillage est élevée.

2.2 Méthode de couplage particules-grilles

En simulation numérique, il est préférable d'utiliser des méthodes numériques adaptée à la physique du problème.

Nous nous intéressons à présent aux méthodes numériques hybrides qui consistent à superposer une distribution de particules et une grille eulérienne sur le domaine. Les méthodes vortex lagrangiennes et les schémas eulériens sont utilises successivement afin de discrétiser différentes parties des équations. Ces méthodes sont connues sous le nom de Vortex-In-Cell.

La convection est résolue de manière exacte en déplacant les particules sur les caractéristiques, tandis que le calcul des vitesses sur la grille permet un gain de temps et une précision considérables. Cette méthode profite de la précision du traitement lagrangien des équations de Navier-Stokes tout en diminuant le coût de calcul.

2.2.1 Description de la méthode de couplage

Nous rappelons que les principales difficultés liées à la résolution du système d'équations (1.1) en variables primitives résident dans :

- la non-linéarité des équations

- la présence de la contrainte d'incompressibilité qui doit être satisfaite á tout instant

- le traitement de la pression pour laquelle les conditions aux limites ne sont pas explicitiment connues.

La méthode de couplage permet de surmonter toutes ces difficultés. En effet, le passage à la formulation vitesse-tourbillon permet de dissocier à chaque pas de temps le calcul de vitesse et de vorticité. Il évite aussi le calcul de la pression, par le fait que $\nabla \times \nabla p = 0$. De plus, comme le champ de vitesse est à divergence nulle, nous pouvons introduire une fonction ψ telle que $u = \nabla \times \psi$. L'introduction d'une fonction de courant permet de satisfaire implicitement la condition d'incompressibilité.

L'écriture du système d'équation de Navier-Stokes se réduit à

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\omega = (\omega \cdot \nabla)\,\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \omega & dans\,\Omega, \\ \omega(\mathbf{x}, 0) = \omega_0(\mathbf{x}) & sur\,\Omega, \\ \nabla^2 \psi = -\omega & dans\,\Omega, \\ \mathbf{u} = \nabla \times \psi & dans\,\Omega \end{cases} \tag{2.15}$$

Nous définissons sur le domaine de calcul une distribution de particules et une grille eulérienne. L'objectif du schéma numérique est de conserver un traitement lagrangien de la convection en déplaçant les particules sur les caractéristiques et d'assurer la prise en compte des conditions aux limites et le calcul des vitesses en utilisant des techniques de type différences-finies sur la grille.

Les méthodes particules sont parfaitement adaptées au traitement numérique de la convection en particulier grâce à leur stabilité inconditionnelle.

L'évolution des vitesses des particules se fait en méthode vortex pure à l'aide de solveurs multipôlaires rapides. En géométrie simple, les solveurs différences finies utilisant les techniques de Transformé de Fourier Rapide restent plus rentable.

Il devient naturel de faire cohabiter une grille eulérienne et une distribution de particules dans le domaine de calcul.

Formalisme de la méthode VIC

Considérons le domaine de calcul défini par

$$\Omega = \{(x,y,z); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$$

La grille eulérienne est définie par

$$G_h = \{\mathbf{x}_{ijk} = (a + ih_x, c + jh_y, e + kh_z; 0 \leq i \leq M, 0 \leq j \leq N, 0 \leq k \leq P\}$$

La distribution des particules $\{x_p(t), v_p, p \in\}$ qui définit les coordonnées lagrangiennes sur le domaine de calcul est donnée au temps initial par $\{x_p^0, v_p, p \in\}$, et v_p sont les volumes des cellules particules. Comme la distribution des particules est initialement uniforme, ces volumes correspondent à $v_p = h^3$. De plus, nous associons à chaque particule x_p sa circulation initiale correspondante Γ_p^0.

Le déplacement par la vitesse du fluide de cette grille initiale de particules nous donne les positions à chaque instant de ces particules en résolvant le système différentiel:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}_p}{dt}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_p(t), t) \\ \mathbf{x}_p(0) = \mathbf{x}_p^0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Algorithme discret de résolution

Pour permettre l'échange d'information entre la grille et les particules, on introduit deux noyaux d'interpolation η_ε et W_ε. Présentons une étape de l'algorithme discret de résolution du système (2.15), par intégration temporelle à l'aide du schéma d'Euler.

1. Assignement de la vorticité sur les points de grille

$$\omega_x^n(\mathbf{x}_{i,j,k}) = \sum_p v_p \omega_x^n(\mathbf{x}_p^n)\eta_\varepsilon(\mathbf{x}_{i,j,k} - \mathbf{x}_p^n)$$

$$\cdots$$

2. Calcul de ψ sur la grille par solveur Poisson

$$\nabla^2 \psi_{i,j,k}^n = -\omega_{i,j,k}^n$$

3. Calcul des vitesses sur la grille, par différences finies

$$u_x^n(\mathbf{x}_{i,j,k}) = \frac{\partial}{\partial y}\psi_z^n(\mathbf{x}_{i,j,k}) - \frac{\partial}{\partial z}\psi_y^n(\mathbf{x}_{i,j,k})$$

$$\dots$$

4. Calcul du terme de stretching sur la grille par différences finies

$$Stretch^n(\mathbf{x}_{i,j,k}) = (\omega^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n$$

5. Interpolation de la vitesse et du stretching sur les particules

$$u_x^n(\mathbf{x}_p) = \sum_{i,j,k} u_x^n(\mathbf{x}_{i,j,k}) W_\varepsilon(\mathbf{x}_p^n - \mathbf{x}_{i,j,k})$$

$$\dots$$

$$Stretch_x^n(\mathbf{x}_p^n) = \sum_{i,j,k} Stretch_x^n(\mathbf{x}_{i,j,k}) W_\varepsilon(\mathbf{x}_p^n - \mathbf{x}_{i,j,k})$$

$$\dots$$

6. Evolution des particules

$$\mathbf{x}_p^{n+1} = \mathbf{x}_p^n + \triangle t(u_x^n(\mathbf{x}_p^n), u_y^n(\mathbf{x}_p^n), u_z^n(\mathbf{x}_p^n))$$

7. Première étape du Viscous Splitting

$$\omega_p^\star = \omega_p^n + \triangle t(Stretch_x^n(\mathbf{x}_p^n), Stretch_y^n(\mathbf{x}_p^n), Stretch_z^n(\mathbf{x}_p^n))$$

8. Remeshing

9. Calcul du terme de diffusion par PSE

10. Deuxième étape du Viscous Splitting

$$\omega_p^{n+1} = \omega_p^\star + \nu \triangle t \triangle_\varepsilon \omega_p^n$$

2.2.2 Transfert Particules-grilles

Transfert des particules sur la grille

En méthode vortex, la vorticité en un point donné est reconstitué à partir des valeurs sur les particules par :

$$\omega^h(\mathbf{x},t) = \sum_q v_q(t)\omega_q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q^h(t))$$

Les valeurs de la vorticité sur les points de grille $\mathbf{x}_{i,j,k}$ sont calculés en utilisant la convolution de ω par une fonction d'interpolation η_ε.

$$\omega_\varepsilon(x) = (\omega \star \eta_\varepsilon)(\mathbf{x}) = \sum_q v_q(t)\omega_q \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q^h(t))$$

On en déduit les valeurs de la vorticité sur les points de grille:

$$\omega_{i,j,k} = \sum_q v_q(t)\omega_q \eta_\varepsilon(\mathbf{x}_{i,j,k} - \mathbf{x}_q^h(t))$$

L'erreur produite par le produit de convolution dépend de la fonction η_ε. En particulier, si on utilise une fonction Cut-off d'ordre r, l'erreur est de l'ordre de $\mathcal{O}(\varepsilon^r)$, d'après le lemme suivant:

Lemme *Soit une fonction Cut-off η à symétrie radiale et ayant les propriétés suivantes, appelées moments d'ordre r:*

$$\begin{cases} \int_{R^d} \eta(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1 \\ \int_{R^d} \mathbf{x}^\alpha \eta(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0 \qquad if\ 1 \leq |\alpha| \leq r-1, r \geq 2 \\ \int_{R^d} |\mathbf{x}|^2 \eta(\mathbf{x})d\mathbf{x} < \infty \end{cases} \tag{2.17}$$

Alors, on a pour toute fonction $\omega \in W^{r,p}(R^d), 1 \leq p \leq \infty$

$$||\omega - \omega \star \eta_\varepsilon||_{0,p} \leq C\varepsilon^r ||\omega||_{r,p}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ε et de $\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{\varepsilon^d}\eta(\dfrac{\mathbf{x}}{r})$

En conclusion, pour retrouver $\omega_{i,j,k}$ à partir des valeurs particulaires, on a eu besoin de discrétiser une intégrale avec une erreur de l'ordre de $\mathcal{O}(h^m)$ où h est le paramètre de discrétisation et m ne dépend que de la régularité de ω et de faire une convolution d'erreur $\mathcal{O}(\varepsilon^r)$.

Transfert des particules sur la grille

La grille utilisée étant une grille eulérienne fixe, l'interpolation des données sur les particules se fait suivant la théorie classique d'interpolation.

2.2.3 Méthode de remaillage

Dans les méthodes particulaires, le champ de la vorticité est calculé à partir des circulations $\{\Gamma, p \in J\}$ sur les particules $\{\mathbf{x}_p(t), p \in J\}$

$$\omega(\mathbf{x}_p(t), t) = \sum_q \Gamma_q(t)\zeta_\varepsilon(\mathbf{x}_p(t) - \mathbf{x}_q(t))$$

où ζ est la fonction de cut-off et ε le paramètre de recouvrement.

Ces particules se déplacent avec le fluide suivant les caractéristiques de l'écoulement. Si h est le paramètre de définition de la distribution des particules, ε doit être choisi supérieur à h. Une simulation particulaire, ne vérifiant pas l'hypothèse de recouvrement, relève de la modélisation et non de la simulation directe. Cette condition est nécessaire pour assurer une bonne précision des calculs particulaires.

Au cours de l'évolution du système, la distribution des particules évolue, et l'hypothèse de recouvrement est susceptible de ne plus être satisfaite dans tout le domaine.

La méthode de remaillage consiste à redistribuer périodiquement la distribution particulaire, ce qui permet d'éviter les distortions des particules, et de conserver la condition de recouvrement.Pour ce faire, nous devons être capable de calculer des nouvelles positions $\{\tilde{\mathbf{x}}_q(t), q \in I\}$ définissant une grille régulière, et les circulations $\{\tilde{\Gamma}_q(t), q \in I\}$ sur cette nouvelle distribution de particules à partir des anciennes positions et circulations de particules. Autrement dit, le problème de remaillage est ramené à un problème d'interpolation d'un maillage non uniforme $\{\mathbf{x}_p\}$ sur un maillage uniforme $\{\tilde{\mathbf{x}}_q\}$.

Si Q est le noyau de la formule d'interpolation utilisé, les nouvelles circulations sont données par:

$$\tilde{\Gamma}_q = \sum_{p \in J} \Gamma_p Q(\frac{\tilde{\mathbf{x}}_q - \mathbf{x}_p}{h})$$

Conservation des moments par la méthode de remaillage

Nous mesurons la qualité d'une technique de remaillage par sa capacité de conserver les moments successifs de la vorticité:

$$J(\alpha) = \sum_p \Gamma(\mathbf{x}_p)\mathbf{x}_p^\alpha$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est multi-indice, α_i un entier.

Le lemme suivant donne les conditions de conservation des moments par la formule de remaillage

Lemme *Si la fonction de remaillage Q est à symétrie radiale, et vérifie les propriétés suivantes:*

$$\begin{cases} (i) & \sum_q Q(\mathbf{y}_q) = 1 \\ (ii) & \sum_q Q(\mathbf{y}_q)\tilde{\mathbf{y}}_q^\alpha = 0 \quad 1 \leq |\alpha| < r, r \geq 2 \end{cases} \tag{2.18}$$

y_q est un recouvrement uniforme de R^3 de pas unitaire, alors la méthode de remaillage proposée conserve les moments $J(\alpha)$ pour $|\alpha| < r$

Noyaux de remaillage

Nous distinguons deux types de noyaux de remaillage.

Nous avons d'une part les noyaux Λ_r qui permettent la conservation des moments d'ordre inférieur à r. Ils sont construits en résolvant le système linéaire qui provient des conditions de conservation des moments. Nous mentionnons uniquement le noyau d'interpolation cubique (utilisé par après)

$$\Lambda_3(x) = \begin{cases} \frac{(1-|x|^2)(2-|x|)}{2} & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{(1-|x|)(2-|x|)(3-|x|)}{6} & \text{si } 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Nous avons d'autre part des noyaux d'interpolation plus régulier. Ils sont de ce fait moins sensible aux oscillation numériques. Mais, ils ne conservent pas les moments d'ordre élevé.

Interpolation de classe C^2

$$M_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(2-|x|)^3 - \frac{4}{6}(1-|x|)^3 & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{1}{6}(2-|x|)^3 & \text{si } 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Ce noyau a un effet régularisant, mais ne possèdent une précision que d'ordre 2. La construction de noyau à la fois réguliers et précis peut se faire par combinaison d'un noyau régulier et de sa dérivée. Nous construisons un nouveau noyau appelé $M_4^{'}$ d'ordre trois qui permet à la fois de conserver les moments d'ordre 2 (circulation, impulsion linéaire et impulsion angulaire) et de préserver la régularité. Il est construit à partir du noyau M_4 et de sa dérivée:

$$M_4^{'}(x) = \alpha M_4(x) + \beta \frac{d}{dx} M_4(x)$$

Ensuite, nous calculons α et β de facon à conserver les moments linéaires et quadratiques.

$$\int_{R^3} M_4^{'}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 1 \tag{2.19}$$

$$\int_{R^3} \mathbf{x}^{\alpha} M_4^{'}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0, \quad 1 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 3 \tag{2.20}$$

Nous obtenons dès lors

$$M_4^{'}(x) = \begin{cases} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2} & \text{si } 0 < |x| < 1 \\ \frac{-x^3 + 5x^2 - 8x + 4}{2} & \text{si } 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$$

C'est essentiellement ce noyau-là qui sera utilisé lors de l'implémentation de la méthode VIC.

Chapitre 3

Implémentation de la méthode VIC

3.1 Initialisation de la méthode particulaire

Comme nous l'avons décrit dans la section "Description de la méthode de couplage", nous devons disposer de la distribution des particules ainsi que de leur circulation initiale afin de pouvoir lancer notre algorithme de résolution.

3.2 Corps de l'implémentation

Dans cette section, nous détaillons l'implémentation des différentes étapes de l'algorithme discret, au travers des choix des discrétisations spatiales, de l'intégration temporelle et de la stabilité associée, des types de noyaux pour l'assignement et la diffusion.

3.2.1 Assignement de la vorticité sur la grille

L'assignement de la vorticité sur une grille eulérienne se réalise à l'aide de

$$\omega_{i,j,k} = \sum_q v_q(t)\, \omega_q\, \eta_\varepsilon(\mathbf{x}_{i,j,k} - \mathbf{x}_q^h(t))$$

où le noyau η_ε correspond à M_4'.

Ce choix se justifie par le fait que ce noyau d'ordre trois permet à la fois de conserver les moments d'ordre 2 (circulation, impulsion linéaire et impulsion angulaire) et de préserver la régularité.

3.2.2 Calcul de la fonction de courant

Le solveur que nous utilisons pour résoudre l'équation de Poisson est solveur d'ordre 2 en espace, qui permet la prise en compte de conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann.

En utilisant ce solveur, nous préservons le caractère plurielle du code VIC pour la prise en compte de conditions aux limites (du type périodique ou non-périodique).

Evidemment, comme nous étudions la turbulence homogène isotrope, nos conditions aux limites sont du type périodiques dans les trois directions. C'est pourquoi, nous implémenterons par la suite un solveur utilisant les Transformées de Fourier Rapides (FFT), qui permettront une résolution plus précise et plus rapide de l'équation de Poisson.

3.2.3 Calcul des vitesses et du terme de stretching

Le calcul des vitesses et du terme de stretching s'effectue à l'aide de différences finies d'ordre 4 en espace.

En ce qui concerne le terme de stretching, nous utilisons sa forme conservative $\nabla(\omega : \mathbf{u})$. Celle-ci est équivalente à sa forme primitive $(\omega \cdot \nabla)\,\mathbf{u}$, puisque

$$\nabla(\omega : \mathbf{u}) = (\omega \cdot \nabla)\,\mathbf{u} + \mathbf{u}\,(\nabla\omega)$$

$$\nabla\omega = 0$$

Nous reviendrons par la suite au problème de la divergence nulle de la vorticité.

3.2.4 Interpolation de la vitesse et du terme de stretching sur les particules

L'interpolation de la vitesse et du terme de stretching se réalise également à l'aide du noyau M_4' pour les mêmes raisons invoquées dans la section de l'assignement.

3.2.5 Evolution des particules

Nous considérons le système d'équation différentielles ordinaires (2.16), que nous intégrons temporellement par le schéma Runge-Kutta d'ordre 2. (Voir Annexe 1)

3.2.6 Première étape du Viscous Splitting

L'intégration temporelle s'effectue également par le schéma RK 2. Nous détaillons la condition de stabilité associée à la première étape du Viscous-Splitting..

Condition de stabilité

La condition de stabilité se référant à la première étape du Viscous-Splitting résulte d'un raisonnement physique et intuitif.

Le pas de temps choisi devra vérifier deux contraintes dfférentes que nous résumons de la maniè re suivante:

(i) Nous imposons le fait que la trajectoire de deux particules-tourbillons ne puissent se croiser lors d'un pas de temps, c'est-à-dire que le produit $\triangle t \cdot |\omega|_{max}$ est d'ordre 1. Cette condition se traduit par l'inégalité:

$$\triangle t \leq |\omega|_{max}^{-1}$$

(ii) Nous imposons le même type de condition sur le terme de stretching, dès lors le produit $\triangle t \cdot |\lambda|_{max}$ est également d'ordre 1, où λ_{max} est la valeur propre maximale de la matrice S_{ij} :

$$\triangle t \leq |\lambda|_{max}^{-1}$$

Cette condition n'existe pas en deux dimension.

Nous proposerons par la suite une étude plus approfondie de l'influence du pas de temps sur les résultats.

3.2.7 Remaillage

Le remaillage se présente sous la forme d'une interpolation, réalisée par le noyau M_4'.

Nous effectuons le remaillage avant le calcul de diffusion, ce qui nous permet d'appeler la routine de diffusion avec une distribution uniforme de particules, dont les positions sont connues de manières exactes.

Le remaillage se réalise dès lors à chaque pas de temps. Nous établirons la comparaison de résultats pour des fréquences de remaillage variées, que se soit au niveau de leurs qualités, de l'introduction de dissipation numérique,...

3.2.8 Deuxième étape du Viscous Splitting: Diffusion

Le calcul du terme de diffusion se réalise par le modèle PSE. Le noyau utilisé est le suivant

$$\eta_1(\frac{r}{\sigma}) = \frac{C}{1+(\frac{r}{\sigma})^{10}}$$

où C est la constante à calculer afin de vérifier les moments (2.10), r est la norme du vecteur de composante (x, y, z) et $\sigma = \delta h$, h est la taille de la maille. Dans un premier temps, nous avons choisi $\delta = 1$. Par la suite, nous montrerons des résultats pour différentes valeurs de δ. Ce paramètre correspond à l'épaisseur du noyau.

Nous avons déterminer la valeur de la constante C, calcul effectué en Annexe 1.

de manière analytique (valeur exacte) : $C = \dfrac{15}{\pi^2} = 0.6579$

de manière discrète (27 points voisins) : $C = 0.6376$

de manière discrète (125 points voisins) : $C = 0.6522$

Etant donné que nous remaillons à chaque pas de temps avant la diffusion, la position des particules est uniforme et entièrement connue lors de l'appel de la routine de diffusion. Suivant que nous utilisons 27 ou 125 points voisins pour le PSE, nous considérons la constante discrète correpondante, afin que les moments discrets soient vérifiés exactement.

Comme les étapes d'advection et de diffusion n'ont pas la même sensibilité par rapport aux schémas, il est légitime de choisir le schéma d'intégration qui convient le mieux à la diffusion. Nous effectuons une intégration temporelle par Euler explicite.

Condition de stabilité

La discussion sur la condition de stabilité a déjà été réalisée dans la section Particle Strenght Exchange. Afin de satisfaire cette condition, nous prendrons un pas de temps $\triangle t \leq \frac{\varepsilon^2}{C\nu}$

Chapitre 4

La Turbulence Homogène Isotrope

4.1 Définition de la turbulence

La vie de tous les jours nous donne une connaissance intuitive de la turbulence des fluides, cependant il nous est difficile d'y associer une définition précise et rigoureuse. Afin d'apporter une réponse, il est important de remarquer que la turbulence n'est pas une caractéristique du fluide, mais qu'il s'agit du régime d'un écoulement. C'est pourquoi, notre démarche consistera à définir la turbulence par un ensemble de propriétés que possède l'écoulement.

• **Imprédictibilité** Un écoulement doit être imprédictible, dans le sens où toute incertitude concernant l'écoulement à l'instant initial aura tendance à s'amplifier au cours du temps de manière telle à rendre impossible une prédiction déterministe de son évolution.

• **Capacité de mélange** Un écoulement turbulent doit être capable de mélanger les quantités transportées beaucoup plus rapidement que si seul le processus de diffusion moléculaire était impliqué.

• **Caractère tridimensionnel et rotationnel**

4.2 Phénoménologie de la turbulence homogène isotrope

4.2.1 Concepts d'homogénéité et d'isotropie

Introduisons, avant tout, les notions de moyenne d'ensemble et de moment:

Considérons $u^{(i)}(\mathbf{x}, t)$ une composante du champ de vitesse au temps t et de position $\mathbf{x}$, mesurée durant l'expérience i. *La moyenne d'ensemble* du produit de n de ces composantes aux points $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\mathbf{x}_n$ et aux temps $t_1, t_2, ..., t_n$ est donnée par:

$$< u(\mathbf{x}_1, t_1) \cdot u(\mathbf{x}_2, t_2)...u(\mathbf{x}_n, t_n) >= \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} u^{(i)}(\mathbf{x}_1, t_1) \cdot u^{(i)}(\mathbf{x}_2, t_2)...u^{(i)}(\mathbf{x}_n, t_n)$$

Le moment d'ordre n du champ de vitesse est la moyenne d'ensemble de tout produit tensoriel de n composantes du champ de vitesse.

• **Homogénéité** La turbulence est dite *homogène* si toutes les quantités moyennes construites sur l'ensemble de points $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\mathbf{x}_n$, aux temps $t_1, t_2, ..., t_n$, sont invariantes sous toute translation de l'ensemble $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\mathbf{x}_n)$.

• **Isotropie** La turbulence homogène est dite *isotrope* si toutes les quantités moyennes construites sur l'ensemble de points $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\mathbf{x}_n$ aux temps $t_1, t_2, \cdots, t_n$sont invariantes sous toute rotation simultanée de l'ensemble $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\mathbf{x}_n)$ et des axes de coordonnées. La conséquence immédiate est que

$$< \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) >= 0$$

4.2.2 Echelles de la turbulence

Un écoulement turbulent est la superposition de tout un ensemble de mouvements d'échelles très variées. L'analyse spectrale révèle en effet que l'énergie est répartie sur une gamme de fréquence très étendue. A l'intérieur des mouvements de grandes échelles se forment des mouvements de plus petite échelle qui, eux-mêmes, renferment des mouvements d'échelle encore plus petite. Cependant, il existe une limite inférieure à la taille des mouvements turbulents. Celle-ci est liée à la viscosité. En effet, au fur et à mesure que l'échelle de longueur diminue, le nombre de Reynolds associé diminue et, lorsqu'il devient assez faible, la viscosité joue son rôle qui est de transformer la viscosité en chaleur. Trois grandes échelles sont définies en théorie de la turbulence.

L'*échelle intégrale* l est représentative des grandes échelles de l'écoulement. Celle-ci est définie par

$$l = \frac{q^3}{\epsilon}$$

avec $q^2 = < \mathbf{u}^2 >$ est la variance de la variable aléatoire associée au champ de vitesse.

L'*échelle de Kolmogorov* η est représentative des échelles de dissipation de l'écoulement, c'est-à-dire là où la viscosité joue son rôle. Celle-ci est définie par

$$\eta = (\frac{\nu^3}{\epsilon})^{\frac{1}{4}}$$

Enfin, l'*échelle de Taylor* λ est une échelle intermédiaire parfois utilisée en turbulence surtout par les expérimentateurs. Celle-ci est définie par

$$\lambda^2 = \frac{< \mathbf{u}^2 >}{< (\nabla \times \mathbf{u})^2 >}$$

A partir de l'échelle intégrale, il est possible de définir une échelle de temps caractéristique. Il s'agit du temps de retournement du tourbillon, qui donne un ordre de grandeur du temps mis par une parcelle fluide piégée dans ce tourbillon pour en faire un tour complet. Nous définissons cette grandeur temporelle par:

$$T_{ret} = \frac{l(0)}{V_{char}}$$

où V_{char} est la vitesse caractérisique des tourbillons calculée par $V_{char} = (< u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 >)^{\frac{1}{2}}$, et $l(0)$ représente l'échelle intégral initiale.

Dans la présentation de nos résultats, l'échelle de temps sera désormais adimensionnlisée par le temps de retournement.

4.2.3 Energie Cinétique

Nous définissons l'énergie cinétique par unité de masse par les relations suivantes:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} < \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^2 >= \int_0^{+\infty} E(k,t)\, dk$$

où $E(k,t)$ représente la densité d'énergie dans l'espace de Fourier.

En turbulence homogène isotrope, nous pouvons mettre en évidence la loi de conservation détaillée de l'énergie cinétique,

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} E(k,t)\, dk + 2\nu \int_0^{+\infty} k^2 E(k,t)\, dk = 0 \tag{4.1}$$

Ce résultat montre que l'énergie cinétique moyenne est conservée par les termes non-linéaires des équations de Navier-Stokes et dissipée par viscosité moléculaire au taux $2\nu \int_0^{+\infty} k^2 E(k,t) dk$.

De plus, l'évolution de la densité d'énergie spectrale est donnée par

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = T(k,t) - 2\nu k^2 E(k,t) \tag{4.2}$$

où $T(\mathbf{k}, t)$ est le terme de transfert d'énergie cinétique, trouvant son origine dans la non-linéarité des équations de Navier-Stokes. Le flux d'énergie cinétique depuis les nombres d'onde $< k$ vers les nombres d'onde $> k$ est alors défini par

$$\Pi(k,t) = \int_k^{+\infty} T(k',t)\, dk'$$

Le résultat de conservation d'énergie (4.1) implique

$$\int_0^{+\infty} T(k',t)\, dk' = 0$$

Dès lors,

$$\Pi(k,t) = - \int_0^{k} T(k',t)\, dk'$$

Supposons à présent que nous introduisons une force extérieure $F_0(k)$ servant à compenser la perte d'énergie cinétique par diffusion moléculaire. Nous supposons que la turbulence ainsi produite est stationnaire de telle sorte que le spectre et le transfert d'énergie soient indépendants de t. Ce terme de forçage est concentré sur une bande spectrale dans le voisinage du nombre d'onde k_i. Dans ces conditions, nous avons pour $k \neq k_i$

$$T(k,t) = 2\nu k^2 E(k,t)$$

et pour k fixé,

$$\lim_{\nu \to 0} T(k) = 0 \tag{4.3}$$

Posons ensuite

$$\epsilon = \int_0^{+\infty} F_0(k)\, dk$$

ϵ représente donc le taux d'injection d'énergie cinétique dans notre système. En intégrant (4.2) de 0 à ∞, nous obtenons

$$\epsilon = 2\nu \int_0^{+\infty} k^2 E(k)\, dk \tag{4.4}$$

ce qui montre que l'injection d'énergie cinétique est équilibrée par les forces moléculaires de dissipation.

Finalement en intégrant (4.3), de 0 à $k \neq k_i$, nous déduisons,

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \to 0} \Pi(k) &= 0,\ k < k_i && (4.5) \\ \lim_{\nu \to 0} \Pi(k) = \Pi(\infty) &= 0,\ k < k_i && (4.6) \end{aligned}$$

Nous arrivons à la conclusion que pour la turbulence isotrope stationnaire forçée à un taux ε dans une bande spectrale étroite autour de k_i, et dans la limite du nombre de Reynolds infini, le flux d'énergie $\Pi(k)$ est indépendant de k et est égal à ε pour $k > k_i$, ε étant le taux de dissipation visqueuse.

4.2.4 La théorie de Kolmogorov

D'après les conclusions auxquelles nous sommes arrivés dans la section Energie Cinétique, ε est un paramètre très important qui contrôle le flux d'énergie des grandes échellles où il est injecté vers les petites échelles où il sera dissipé par viscosité.

C'est pourquoi, la théorie de Kolmogorov suppose que le spectre d'énergie aux nombres d'ondes supérieures à k_i dépend uniquement de ε et k.

A l'aide d'une analyse dimensionnelle basée sur le théorème de Vashy-Buckingham, nous obtenons:

$$E(k) = C_K \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \tag{4.7}$$

où C_K est une constante universelle, appelée constante de Kolmogorov.

La loi de Kolmogorov n'est pas valable pour toutes les échelles de l'écoulement: en-dessous de k_i, le spectre sera influencé par le forçage (s'il a lieu) et par les interactions non-locales. Au-delà d'un grand nombre d'onde k_d, appelé le nombre d'onde de Kolmogorov, la dissipation visqueuse va amortir les perturbations de la vitesse. Le spectre d'énergie présente donc trois zones bien distinctes : une zone d'injection, une zone inertielle en $\mathbf{k}^{-\frac{5}{3}}$ et une zone de dissipation.

4.2.5 Cascade d'énergie

L'interprétation physique de la cascade d'énergie peut se formuler comme suit. Le gradient de vitesse moyenne responsable du mouvement turbulent crée des structures dont l'orientation est telle qu'elle permet un taux de transfert appréciable entre le mouvement moyen et le mouvement turbulent. Ce sont les structures énergétiques qui font partie des plus grosses structures rencontrées dans l'écoulement. Ces structures, soumises au phénomène d'étirement tourbillonnaire donnent naissance à des structures plus petites tout en leur transférant de l'énergie. Ce processus se répète jusqu'à ce que les structures deviennent si petites pour que la viscosité puisse agir et détruire en chaleur toute l'énergie qui alimente ces petites structures. Cette chaîne d'événements est appelée cascade d'énergie.

4.2.6 Enstrophie

L'enstrophie est définie par la variance de la vorticité

$$D(t) = \frac{1}{2} < \omega^2 > \tag{4.8}$$

En turbulence homogène, il est possible d'obtenir le résultat suivant

$$D(t) = \int_0^{+\infty} k^2 E(k)\, dk$$

L'enstrophie est dès lors complètement déterminée par le spectre d'énergie.

Deuxième partie

Simulation numérique directe de la Turbulence par VIC

Préface

La Simulation Numérique Directe consiste à simuler de manière explicite toutes les échelles de l'écoulement, des plus petites aux plus grandes. Il s'agira de construire un maillage suffisamment fin pour pouvoir capter l'échelle de dissipation de Kolmogorov, et de définir un domaine de calcul plus grand que l'échelle intégral.

A l'aide de ce type de Simulation, nous aurons accès à toutes les grandeurs et toutes les statisques liées à l'écoulement. Etant donné que nous n'introduisons aucun modèle, la S.N.D nous permettra de valider de nouvelles méthodes numériques, de comprendre de phénomènes physiques.

A priori, il n'y a donc aucune difficulté à resoudre numériquement les équations de Navier-Stokes gouvernant la physique d'un écoulement turbulent. Nous prenons ces équations et nous leur appliquons une discrétisation imposée par la méthode numérique choisie. Si sur le plan théorique, aucune limitation n'est apparue, il n'en est pas de même sur le plan de l'implémentation. En effet, comme nous l'avons déjà mentionné, les phénomènes turbulents mettent en jeu une gamme d'échelles très variées. De ce fait, les discrétisations mises en oeuvre devront présenter une résolution suffisante pour capturer ces différentes échelles. Le nombre total de degrés de liberté poour représenter un écoulement turbulent est de l'ordre de $R_l^{\frac{9}{4}}$, où $R_l = \frac{v \cdot l}{\nu}$ est le nombre de Reynolds associé à l'échelle intégrale.

Par exemple, si nous voulons simuler de la turbulence atmosphérique, les plus grandes échelles atteignent quelques kilomètres et les plus petites échelles sont de l'ordre de quelques millimètres et ce, dans les trois directions. Ceci implique le calcul de quelques 10^{20} degrés de liberté !

Chapitre 5

Recherche de la condition initiale

5.1 Conditions à remplir

L'échelle de longueur la plus grande qui peut être représentée dans la simulation est la taille du domaine de calcul. Si L_D est la longueur d'un des côtés du domaine, le nombre d'onde minimum correspondant est égal à $\frac{2\pi}{L_D}$. De plus, pour la taille du domaine et le nombre de points de grilles donnés, le nombre d'onde le plus grand, k_{max}, et donc la plus petite échelle de longueur résolue est prescrite.

Considérons une simulation numérique directe dans laquelle les effets des échelles non-résolues sur les échelles résolues sont négligeables. Dès lors, la plus petite échelle résolue peut être reliée à la longueur de Kolmogorov η. Eswaran et Pope ont déterminé que $\eta k_{max} > 1$ est nécessaire pour que les plus petites échelles soient résolues adéquatement.

Afin de maximiser le nombre de Reynolds, il est commun de prendre k_{min} aussi grand que possible en comparaison à $\frac{1}{l}$. On peut montrer également par raisonnement dimensionnel que l'évolution du champ de vitesse dépend fortement de l'allure du spectre d'énergie cinétique aux petits nombres d'onde.

5.2 Condition initiale choisie

5.2.1 Anneau de vorticité

En premier lieu, nous avons tester la périodicité du code sur un écoulement simple. Il s'agit d'un anneau de vorticité, qui se dissipe et se convecte au cours du temps.

5.2.2 Champ à nombre de Reynolds élevé

Notre domaine de calcul est une boîte cubique de côté de longueur 2π. Le premier paramètre à fixer est la résolution N de nos calculs.

Une fois N fixé, l'initialisation se réalise par la construction du spectre d'énergie initiale dont nous fixons la pente infra-rouge s_0 et le pic k_I. Le spectre d'énergie cinétique initial en k est

$$E(k,0) = B_{s_0} \frac{u_0^2}{k_I(0)} (\frac{k}{k_I(0)})^{s_0} exp(-\frac{s_0}{2}(\frac{k}{k_I(0)})^2)$$

B_{s_0} est une constante de normalisation choisie telle que $\frac{1}{2}u_0^2 = \int_0^{k_C} E(k,0)dk = \frac{3}{2}$.

La norme du champ de vitesse sera dès lors fixée par le spectre d'énergie tandis que la phase sera choisie de manière aléatroire, suivant une fonction de distribution gaussienne.

En fonction de la résolution choisie, nous déterminons le coefficient de viscosité minimal tel que nous vérifions encore le critère $\eta \cdot k_{max} > 1$.

Notre choix définitif s'est porté sur les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} N &= 128^3 \\ k_I &= 4 \\ s_0 &= 4 \\ \nu &= 0.005 \\ R_\lambda &= 97.7 \end{aligned}$$

Ces valeurs nous permettent d'obtenir à l'initialisation une valeur de $\eta \cdot k_{max} = 1.62$, ce qui nous permet de vérifier le critère de résolution. Toutes nos simulations futures se réaliseront sur base de ces paramètres. Il sera préciser si un choix différent est effectué. Nous visualisons le spectre initial sur la figure (Fig.5.2.2).

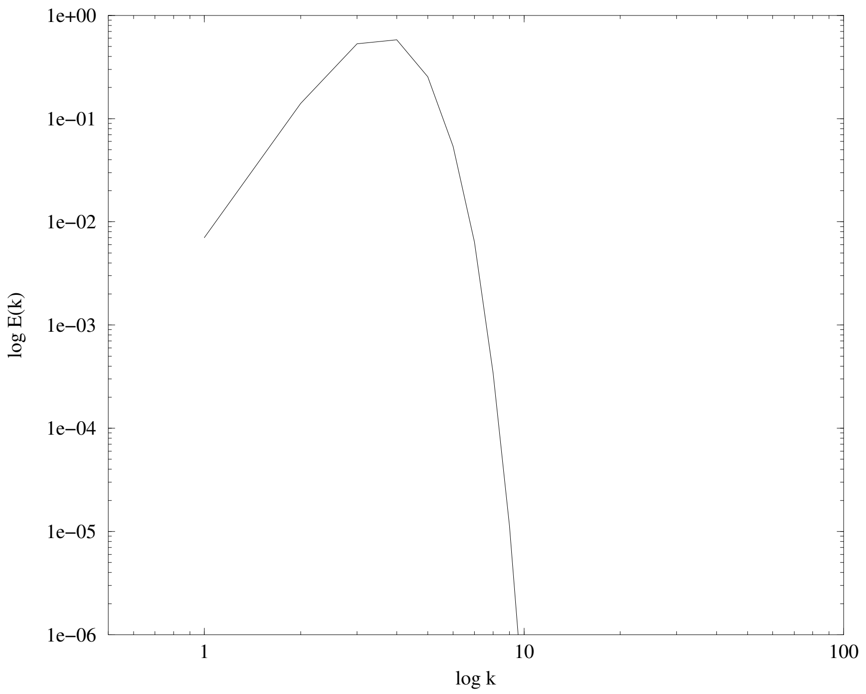


FIG. 5.1: *Spectre d'énergie initial de pente* $s_0 = 4$ *et de pic* $k_I = 4$

Pour fixer les idées, nous répertorions les paramètres essentiels de la configuration de base de la méthode VIC:

Résolution de la grille	$N = 128^3$
Nombre de particules max.	$m = 128^3$
Viscosité adimensionelle	$\nu = 0.005$
Nombre de Reynolds	$R_\lambda = 97.7$
Fréquence de remaillage	*tous les* $\triangle t$
Noyau de remaillage	M_4'
Noyau de diffusion	η_1
Epaisseur du noyau	$\delta = 1$

Chapitre 6

Comparaison Méthode Vortex et Méthode Spectrale

Avant-propos

La simulation à l'aide des méthodes spectrales est réalisée avec les mêmes champs initiaux et nombre de Reynolds. La résolution est également fixée à 128^3.

Il est important de signaler qu'il semble a priori illusoire de vouloir atteindre pour une même résolution, la précision obtenue par méthode spectrale. Remarquons également que les résultats spectraux ne sont pas déaliasés. Nous ne pourrons faire confiance à ces derniers que sur une gamme de fréquence s'étendant jusqu'à $\frac{2}{3}$ du nombre d'onde maximum.

Nous présentons à la fois la comparaison méthodes vortex et spectrale et le comportement théorique de la THI, sans lequel les méthodes spectrales n'auraient pu être validées.

6.1 Critère de résolution

Comme nous l'avons décrit précédemment, avant de se lancer dans la simulation de la turbulence, il fallait veiller à choisir une résolution suffisante nous permettant de simuler explicitement toutes les échelles contenues dans l'écoulement.

Le critère correspondait à $k_{max}\eta > 1$. En figure (6.1), nous présentons l'évolution temporelle de ce critère calculé sur base des méthodes spectrales. Cette évolution nous indique que l'écoulement est effectivement bien résolu par ces dernières. Nous espérons que les méthodes vortex réaliseront le même type de performance.

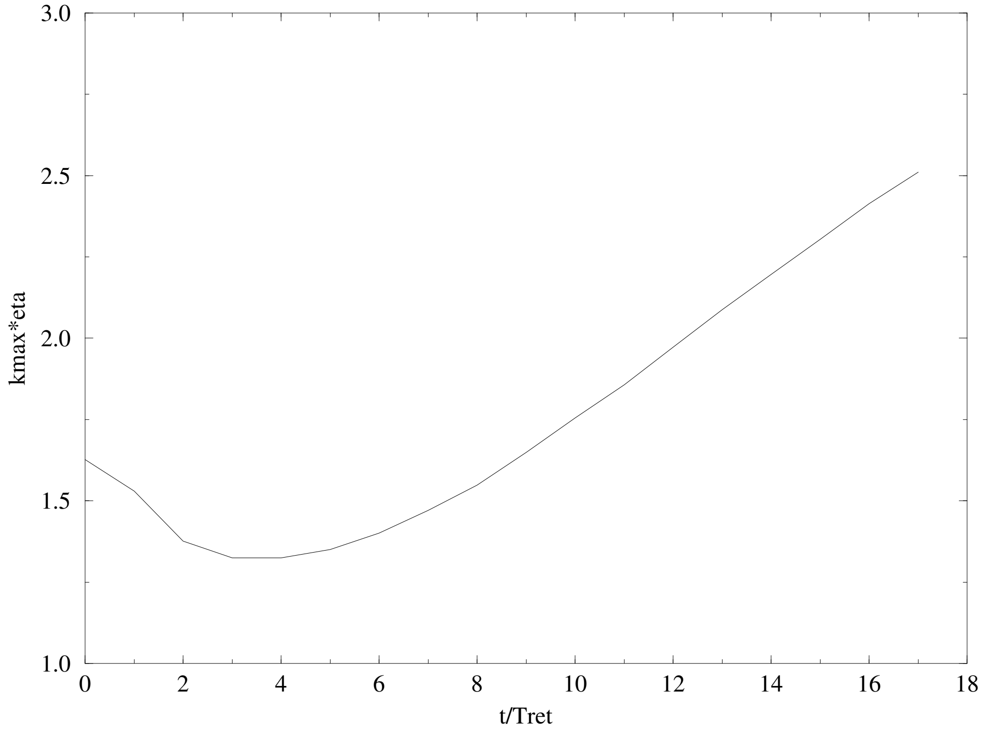


FIG. 6.1: *Evolution du critère de résolution, calculé pour la méthode spectrale.*

6.2 Evolution du spectre d'énergie

L'évolution temporelle du spectre d'énergie est décrite par l'équation (4.2). La fonction de transfert en turbulence isotrope est négative dans les petits nombres d'onde et positive dans les grands nombres d'onde, indiquant une tendance de la cascade d'énergie des larges vers les petites échelles.

Avant de comparer les résultats provenant des deux méthodes, commentons brièvement l'évolution des spectres d'énergie entrenue.

Soit la turbulence tridimensionnelle isotrope dans laquelle on injecte de l'énergie cinétique par un forçage extérieur à grande échelle pour compenser l'énergie dissipée à petite échelle par la viscosité. L'énergie est injectée à un taux ϵ au nombre d'onde k_I caractéristique des gros tourbillons. Elle cascade au même taux ε vers les grands k le long de la cascade de Kolmogorov, et elle est finalement dissipée (toujours au taux ε) par la viscosité dans la zone de dissipation au nombre d'onde de Kolmogorov. Dans ce processus, la turbulence dissipe l'énergie cinétique au taux fini ε déterminé par l'injection d'énergie dans le système.

INSERER FIGURE LESIEUR

Dans notre cas, nous considérons l'évolution du spectre d'énergie dont le pic initial se trouve en $k_I(0)$, en turbulence décroissante. Notre taux de dissipation est déterminé par

$$\varepsilon = 2\nu \int_0^{k_C} k^2 E(k,t) dk$$

D'après la figure (6.2), nous remarquons clairement l'extension des spectres vers les grands nombres d'onde, dû aux interactions non-linéaires et l'énergie cascadée vers les petites échelles. Le spectre de Kolmogorov en $k^{-\frac{5}{3}}$ aurait dû s'établir après un temps $t_* = 5T_{ret}$, malheureusement notre résolution est trop faible pour le faire apparaître. Par contre, les spectres décroissent auto-similairement, comme il est prévu. On observe aussi vers les nombres d'onde plus petits que le pic du spectre (donc les échelles plus grandes que l'échelle l des gros tourbillons contenant l'essentiel de l'énergie), un transfert d'énergie significatif.

Ce phénomène s'interprète par un effet de résonnance non-linéaire entre tourbillons de taille l. On peut montrer que les transferts d'énergie élémentaires ne se font qu'entre trois vecteurs d'onde dont l'un est la somme des deux autres, c'est-à-dire qui forment les trois côtés d'un triangle. Dans le langage des ondes, on appelle cela une condition de résonnance. En turbulence, ceci est dû au caractère non-linéaire de l'équation du mouvement. Si l'on prend deux vecteurs d'onde $\mathbf{k}$ et $\mathbf{p}$, de module voisin de $\frac{2\pi}{L_D}$, et qui s'écartent d'un angle très petit, ils vont (puisqu'ils sont très énergétiques) transférer de l'énergie au troisième côté du triangle $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{p}$, dont le module est plus petit que $\mathbf{k}$.

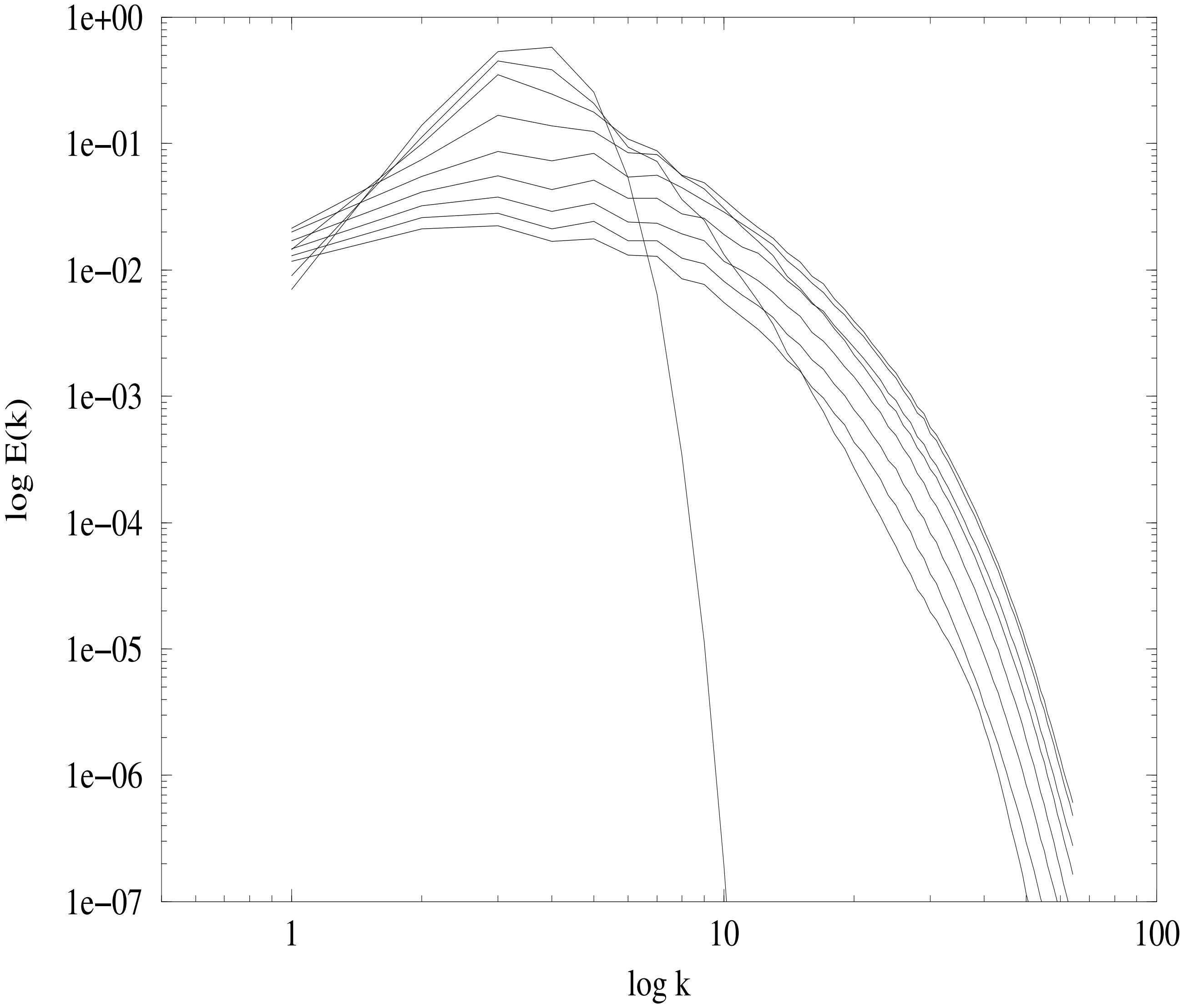


FIG. 6.2: *Spectres d'énergie, calculés par VIC, pour les différents temps de retournement : 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14*

En ce qui concerne la comparaison entre les deux méthodes, fig. (6.2), il ne faut considérer les spectres que sur la gamme de mode inférieur à $\frac{2}{3}k_{max}$.

Distinguons trois zones dans les spectres:

(i) Pour $k < k_I(0)$: les spectres des méthodes spectrales sont plus sensibles au phénomène de résonnance décrit.

(ii) Pour $k_I(0) < k < \frac{2}{3}k_{max}$: les spectres des méthodes vortex collent de manière très satisfaisante avec ceux des méthodes spectrale. Ceci nous indique que les méthodes vortex parviennent à obtenir une bonne répartition d'énergie sur une très large gamme de modes.

(iii) Pour k au voisinage de $\frac{2}{3}k_{max}$: on remarque que les spectres des méthodes vortex sont légèrement inférieurs, indiquant une tendance des méthodes VIC à faiblement dissiper numériquement.

Au-delà de $\frac{2}{3}k_{max}$, les spectres d'énergie provenant des méthodes spectrales sont détériorés par le phénomène d'aliasing qui correspond à une accumulation d'énergie dans les plus grands nombres d'onde. Nous visualisons ce phénomène par l'apparition d'une boucle en fin de spectre.

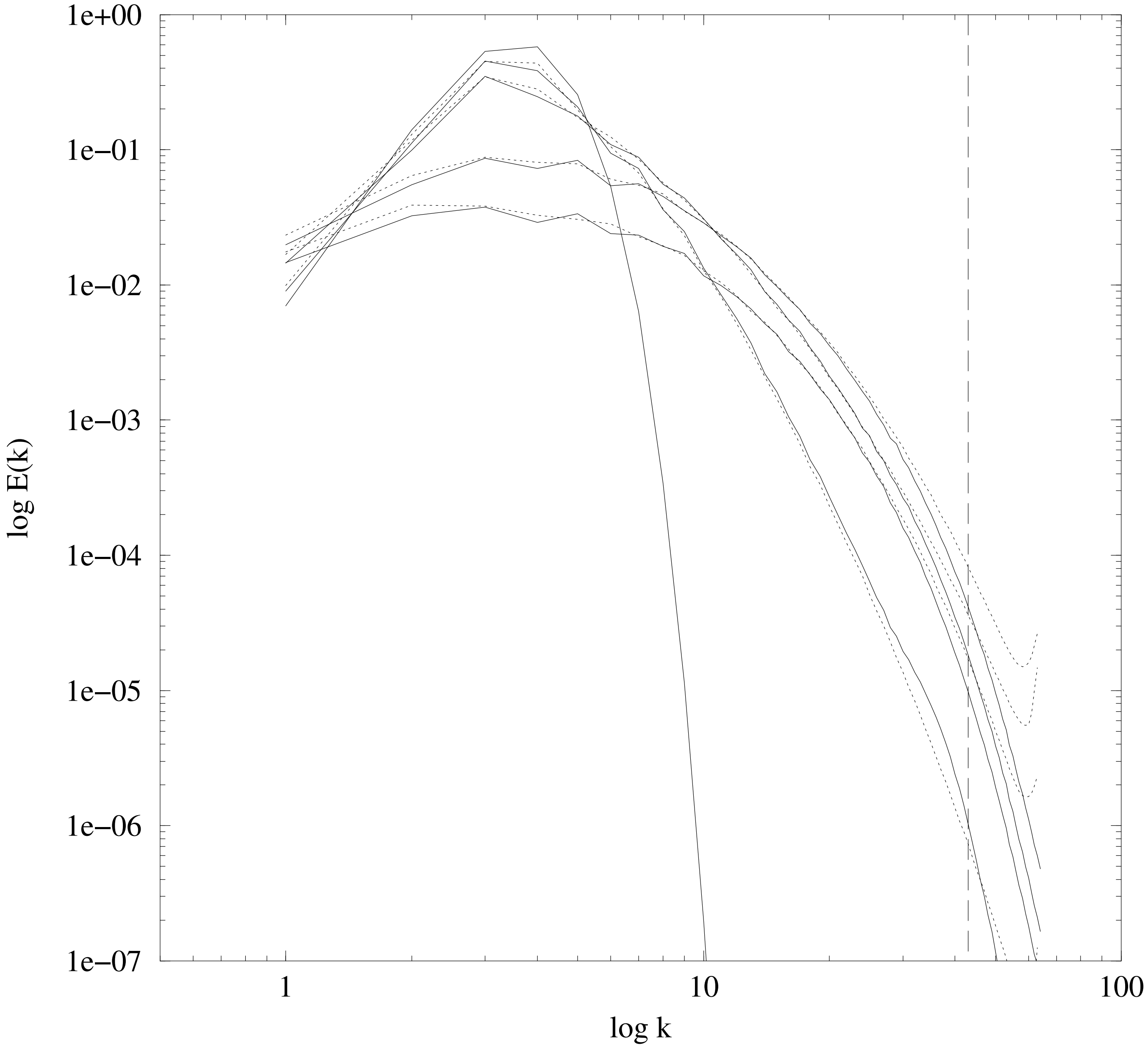


FIG. 6.3: *Spectres d'énergie pour les différents temps de retournement : 0, 1, 2, 6, 10. (——): Méthode VIC. (·····): Méthode Spectrale. (− − −):* $\frac{2}{3}k_{max}$

6.3 Evolution de l'énergie cinétique

En turbulence isotrope décroissante, on a cherché à déduire une loi asymptotique de décroissance de l'énergie. Cette loi valable après un temps critique s'écrit de la manière suivante

$$\frac{1}{2} < \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > \propto t^{-\alpha_E}$$

Par exemple, Comte-Bellot et Corrsin ont trouve un exposant de décroissance égal à -1.26. D'autre valeur du coefficient sont mentionnés dans la littérature.

Sur la figure (6.3), nous montrons l'exposant de décroissance d'énergie cinétique instantanné:

$$\alpha_E(t) = \frac{log(\frac{\mathbf{u}^2(t)}{\mathbf{u}^2(t-\Delta t)})}{log(\frac{t}{t-\Delta t})}$$

La valeur asymptotique correspondant à la méthode VIC est de l'ordre de 1.8, qui est un ordre de grandeur raisonnable par rapport aux suggestions précédentes. Cette valeur est à comparer bien entendu avec les résultats de la méthode spectrale. Leurs coefficients de décroissance s'équivalent.

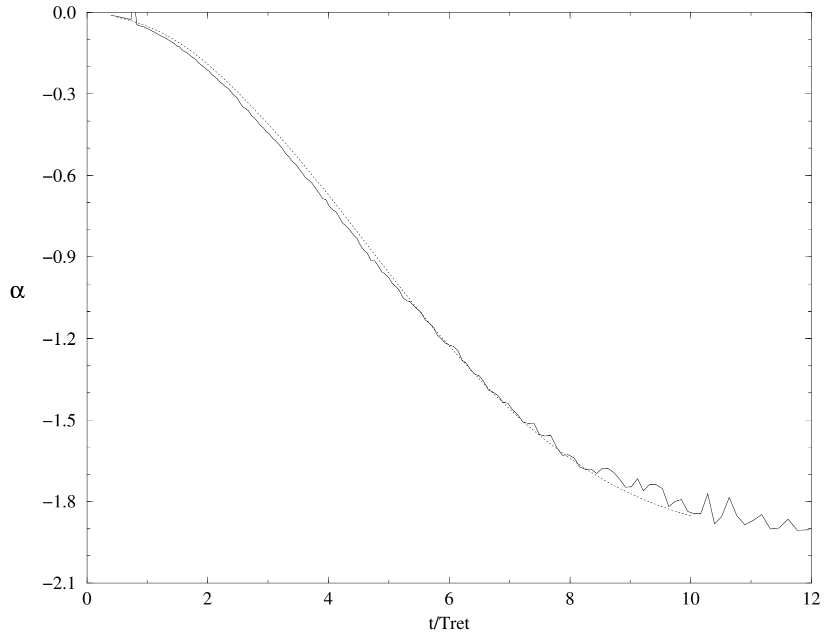


FIG. 6.4: *Evolution du coefficient de décroissance $\alpha_E(t)$. (——): Méthode VIC. (·····): Méthode Spectrale.*

D'après fig.(6.3), les méthodes vortex et spectrale suivent la même courbe de décroissance d'énergie, comme le suggérait l'équivalence des coefficients de décroissance..

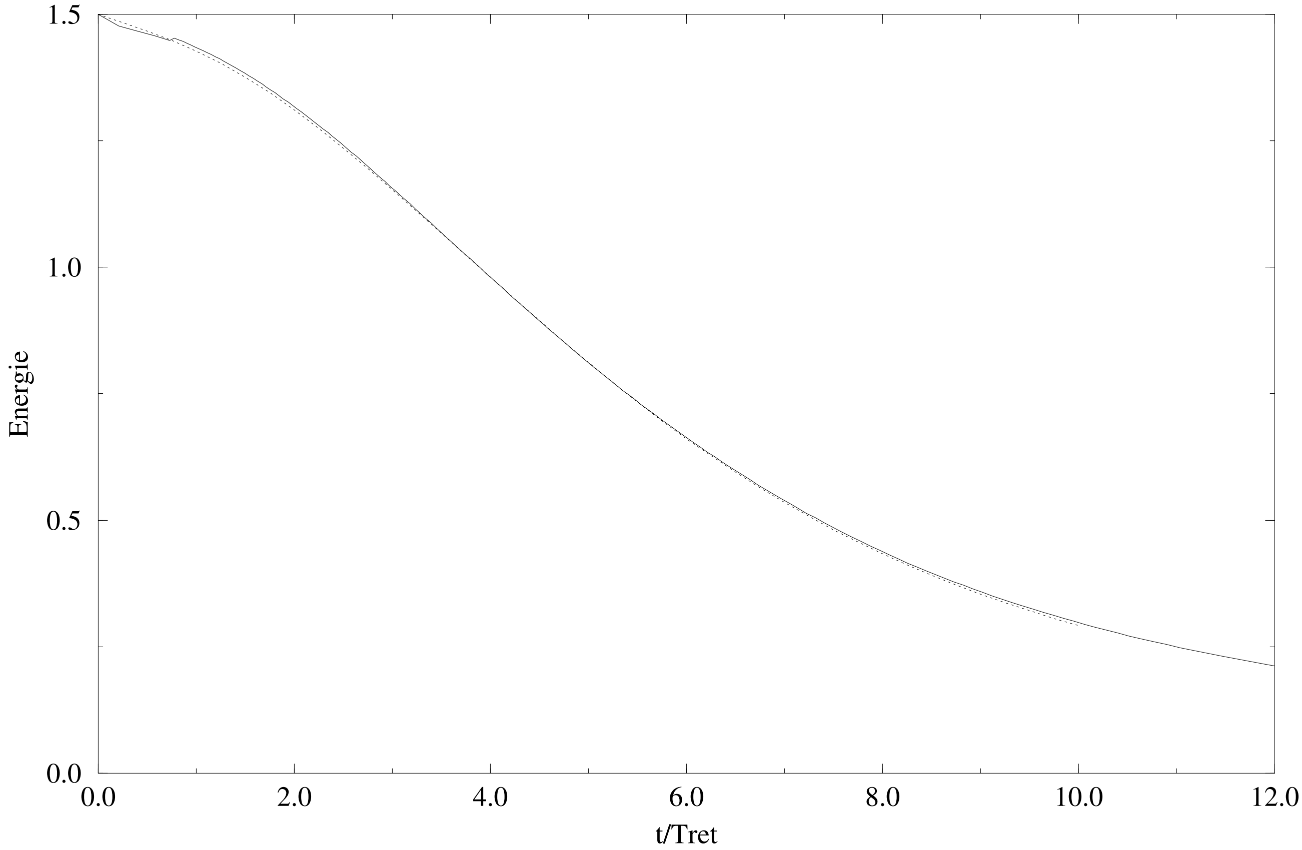


FIG. 6.5: *Evolution d'énergie. (——): Méthode VIC. (-----): Méthode Spectrale.*

6.4 Evolution de l'enstrophie

En considérant l'équation d'évolution de la vorticité, l'évolution de l'enstrophie s'écrit par

$$\frac{D}{Dt}D(t) =< \omega_i\omega_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} > -2\nu P(t) \tag{6.1}$$

où l'enstrophie $D(t)$ est définie par (4.8) et $P(t)$ est la palinstrophie définie par

$$P(t) = \frac{1}{2} < (\nabla \times \omega)^2 >= \int_0^\infty k^4 E(k,t)dk$$

Le premier terme du membre de droite de (6.1) est le terme de stretching responsable de la croissance d'enstrophie. En écoulement non-visqueux, l'enstrophie devrait exploser dû à la présence de ce terme. En écoulement visqueux, intervient le terme de diffusion qui devient prédominant après un temps critique. C'est pourquoi, la courbe d'évolution d'enstrophie est croissante jusqu'à un temps t_*, où elle atteint son pic maximal, puis décroît strictement par la présence du terme de diffusion.

Il est important de signaler que l'enstrophie est beaucoup sensible aux grands nombres d'onde que l'énergie, par la présence du facteur k^2 dans la définition de l'enstrophie. Il sera dès lors beaucoup plus difficile de capter son évolution.

C'est ce que nous remarquons lorsque nous comparons les deux courbes d'enstophie sur la figure (6.4). L'allure des deux courbes est relativement fidèle. Cependant, le pic d'enstrophie correspondant aux méthodes vortex est inférieur à son homologue spectral. Une conclusion attive serait d'imputer ce phénomène exclusivement à la dissipation numérique de la méthode. Nous verrons qu'interviennent d'autres facteurs.

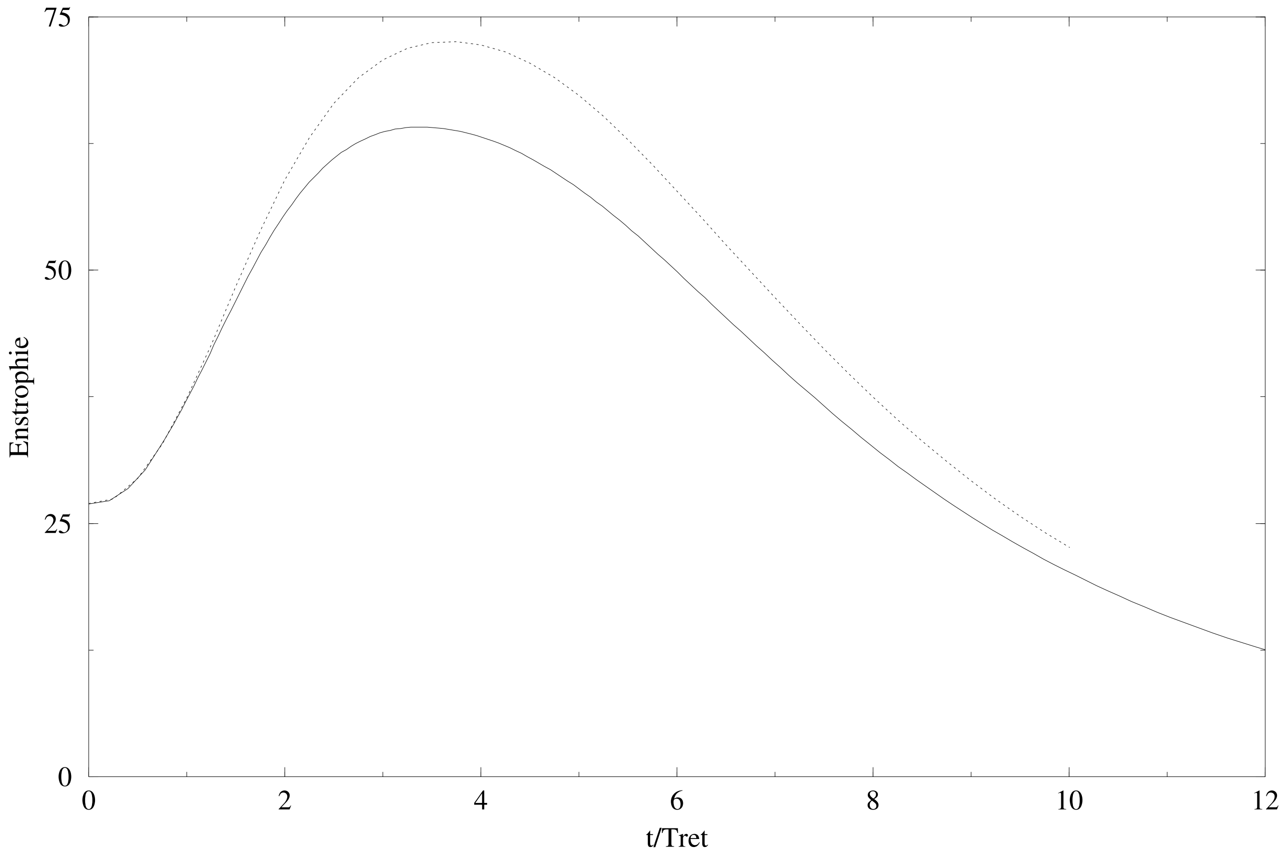


FIG. 6.6: *Evolution d'enstrophie. (——): Méthode Vortex, Pic = 64.1 en* t_{adim} *= 3.45 (-----): Méthode Spectrale, Pic = 72.5 en* t_{adim} *=3.75*

Le calcul d'enstrophie a été réalisé pour la méthode vortex en prenant le produit scalaire du vecteur $\vec{\omega}$ par lui-même et pour la méthode spectrale en intégrant sur tous les nombres d'onde . En effectuant ces calculs, on ne tient pas compte du fait que l'information utile est continue uniquement sur une plage de mode s'étendant jusque $\frac{2}{3}k_{max}$.

A partir des spectres d'énergie, nous avons effectué $\int_0^{\frac{2}{3}k_{max}} k^2 E(k,t)dk$. Ceci nous a permis d'obtenir une évolution plus représentative de l'enstrophie. Il n'apparaît désormais qu'une différence de l'ordre de 5% entre les deux pics, comme le prouve la figure (6.4).

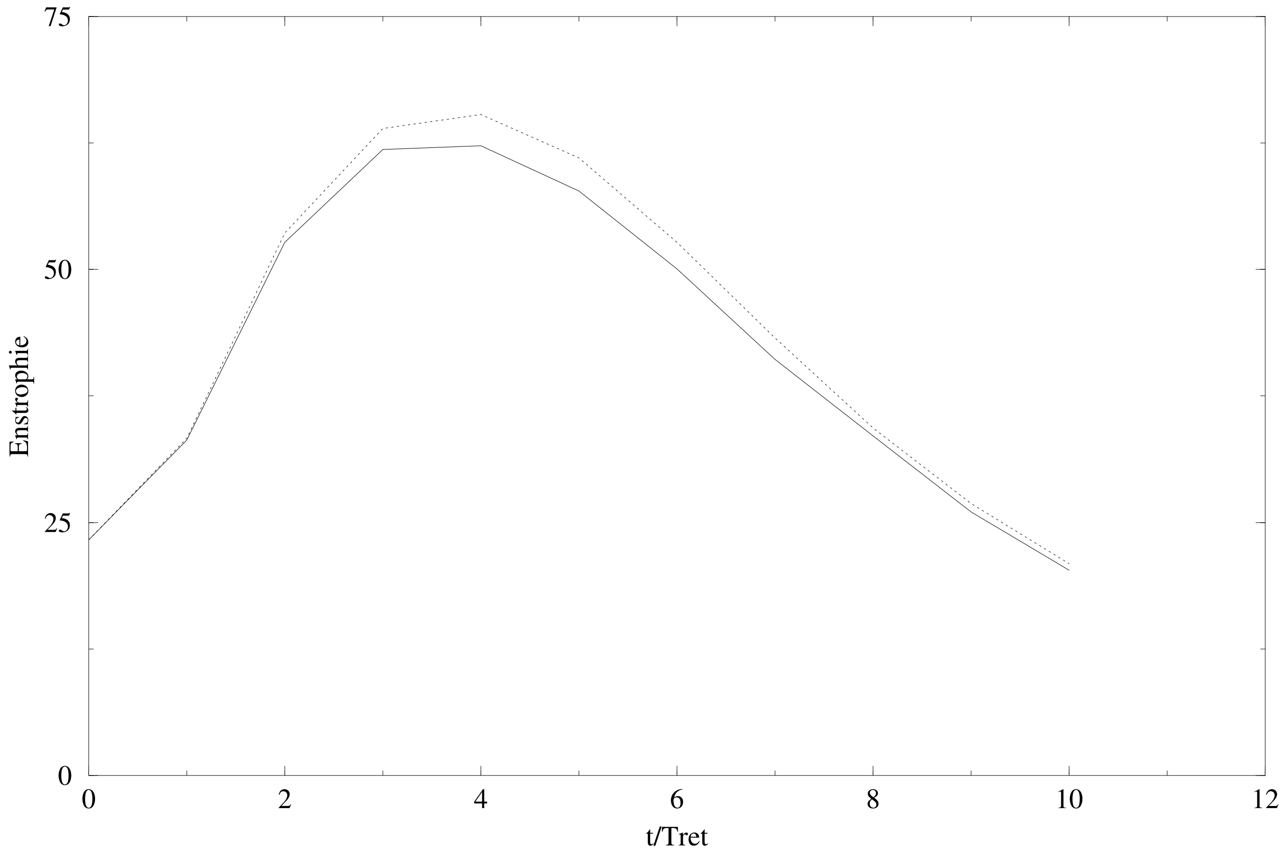


FIG. 6.7: *Evolution d'enstrophie. (——): Méthode vortex, Pic = 62.2 en t_{adim} = 4. (-----): Méthode spectrale, Pic = 65.3 en t_{adim} = 4*

6.5 Densité de probabilité

Nous étudions à présent la densité de probabilité des différentes variables de l'écoulement, à chacune desquelles nous associons un facteur de dissymétrie (Skewness). Soit $X(\omega)$ une variable aléatoire. *Le facteur de dissymétrie* est défini par:

$$S = -\frac{< X^3 >}{< X^2 >^{\frac{3}{2}}}$$

Ce facteur est nul lorsque la variable est gaussienne. Toutes les densités de probabilité ont été réalisées sur base de cent échantillons.

6.5.1 Densité de probabilité de u

Nous présentons la densité de probabilité de la première composante de la vitesse provenant des méthodes VIC et Spectrale. Les distributions que nous obtenons sont proches de la Gaussienne en accord avec la littérature [32]. Les valeurs du coefficient de dissymétrie nous confirme le caractère gaussien de la fonction de probabilité.

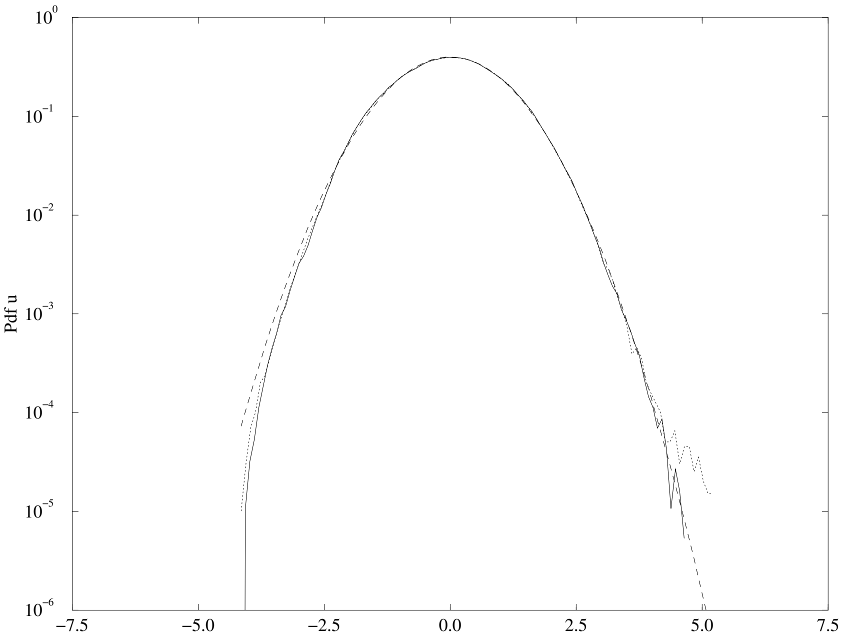


FIG. 6.8: *Densité de probabilité de la première composante de vitesse en $t_{adim} = 5$. (——): Méthode VIC, Skewness = 0.024. (·····): Méthode Spectrale, Skewness = 0.021. (- - - -): Distribution gaussienne*

6.5.2 Densité de probabilité de $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$

Le facteur de dissymétrie le plus couramment utilisé est celui associé à la dérivée d'une composante de la vitesse. Nous le noterons par s.

Actuellement, le facteur s caractérise le taux auquel l'enstrophie augmente par stretching de la vorticité. En effet, en considérant l'équation (6.1), et sachant qu'en THI, le facteur de dissymétrie est égal à

$$s = (\frac{135}{98})^{\frac{1}{2}} \frac{< \omega_i \, \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} >}{D(t)^{\frac{3}{2}}}$$

nous obtenons

$$\frac{D}{Dt} D(t) = (\frac{98}{135})^{\frac{1}{2}} \, s \, D^{\frac{3}{2}} - 2 \, \nu P(t)$$

Un facteur de dissymétrie positif est nécessaire afin de faire croître l'enstrophie par stretching des filaments vortex. Les valeurs expérimentales de s sont de l'ordre de 0.4 et des simulations numériques directes à nombre de Reynolds modérés donnent une valeur de 0.5 [19]. Nous montrons l'évolution du facteur de dissymétrie sur la figure (6.5.2), nous convergeons vers une valeur de l'ordre de 0.5.

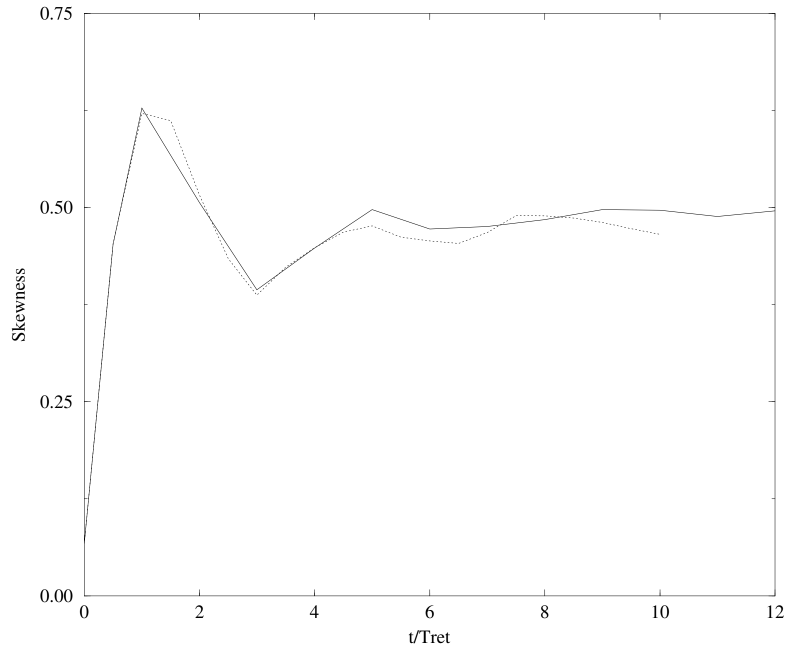


FIG. 6.9: *Evolution de la Skewness. (——): Méthode VIC. (-----): Méthode spectrale*

D'après [19] et la figure (6.5.2), la densité de probabilité des gradients de vitesse et donc la vorticité s'écarte d'une distribution gaussienne en $e^{-\omega^2}$ pour les grandes valeurs de ω, et a plutôt un comportement en ailes exponentielles $e^{-|\omega|}$.

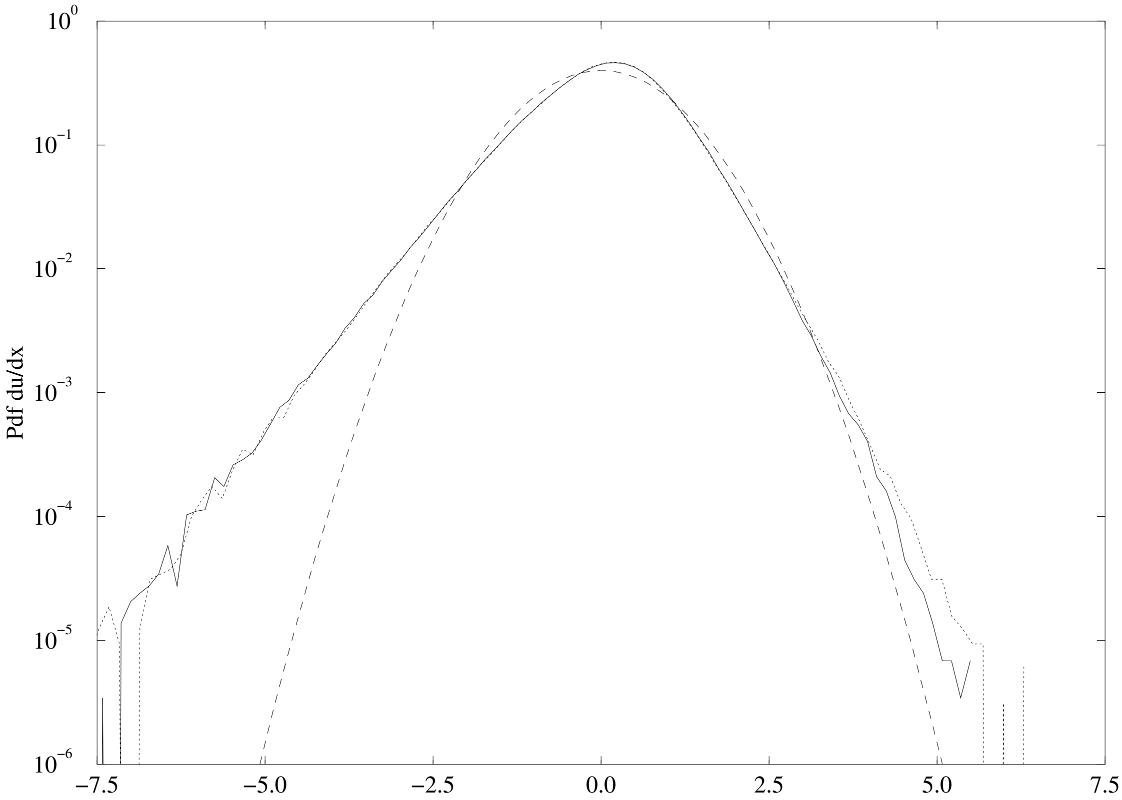


FIG. 6.10: *Densité de probabilité de la dérivée de vitesse $\frac{du}{dx}$ en $t_{adim} = 5$. (——): Méthode Vortex, Skewness = 0.497. (·····): Méthode Spectrale, Skewness = 0.476. (- - - -): Distribution gaussienne.*

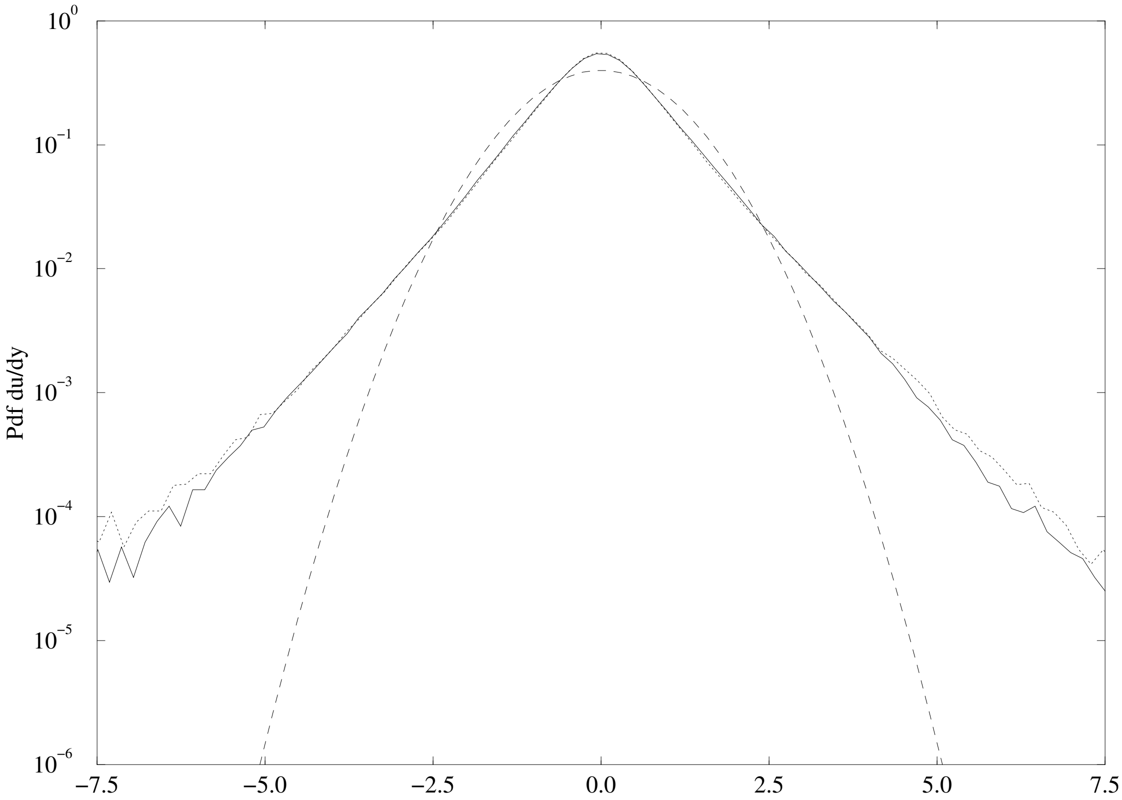


FIG. 6.11: *Densité de probabilité de la dérivée de vitesse* $\frac{du}{dy}$ *en* $t_{adim} = 5$. *(——): Méthode Vortex, Skewness = -0.005. (·····): Méthode Spectrale, Skewness = -0.006. (- - - -): Distribution gaussienne.*

6.5.3 Densité de probabilité de la pression p

Corrélativement avec la vorticité, la pression a une probalitlité exponentielle pour les basses pressions, qui correspondent au coeur des tourbillons, et gaussienne pour les hautes pressions.

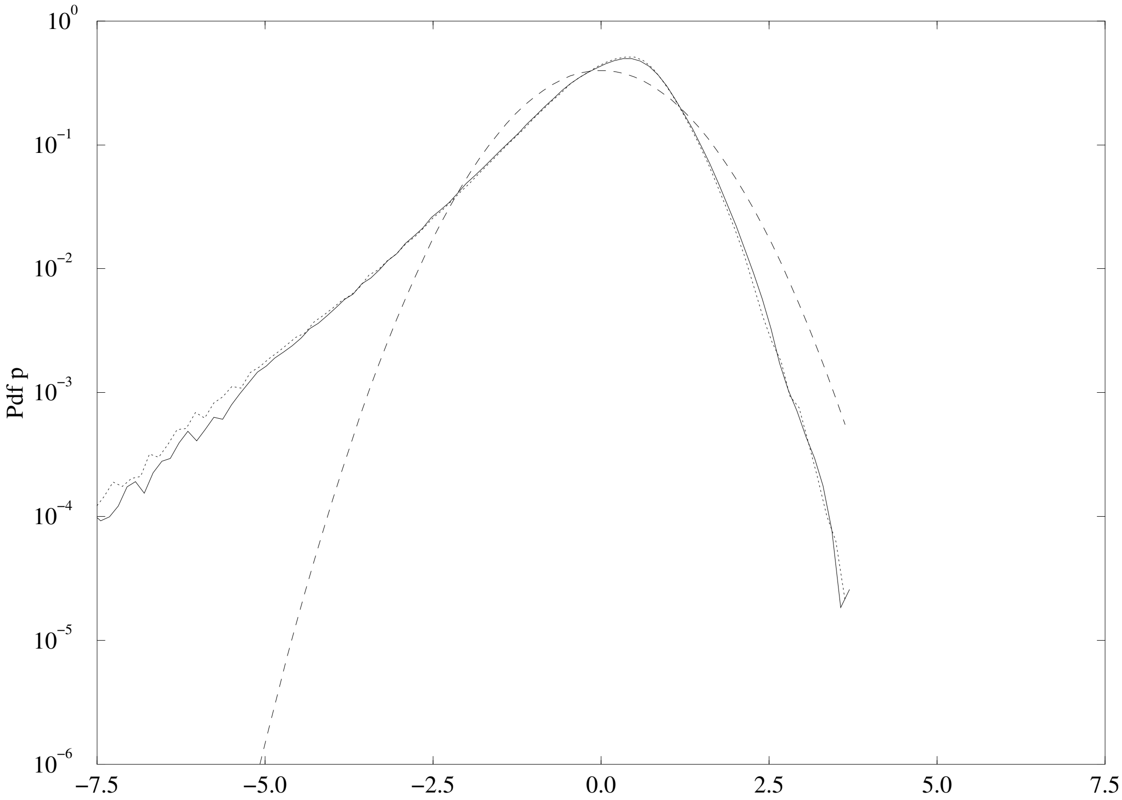


FIG. 6.12: *Densité de probabilité de la pression en $t_{adim} = 5$. (——): Méthode Vortex, Skewness = 1.14. (·····): Méthode Spectrale, Skewness = 1.31. (– – – –): Distribution gaussienne.*

Les méthodes VIC produisent bien les résultats escomptés au niveau des densités de probabilités.

6.6 Evolution des grandeurs physiques et numériques

Nous présentons dans cette section l'évolution de grandeurs physiques et numériques définies dans les chapitres précédents. Toutes ces grandeurs simulent correctement le comportement de la méthode spectrale.

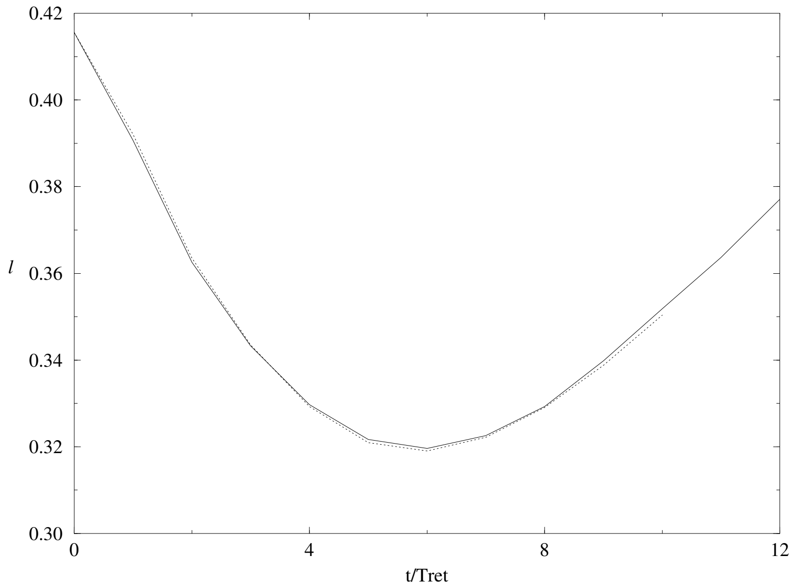


FIG. 6.13: *Evolution de l'échelle intégrale. (——): Méthode VIC. (-----): Méthode Spectrale.*

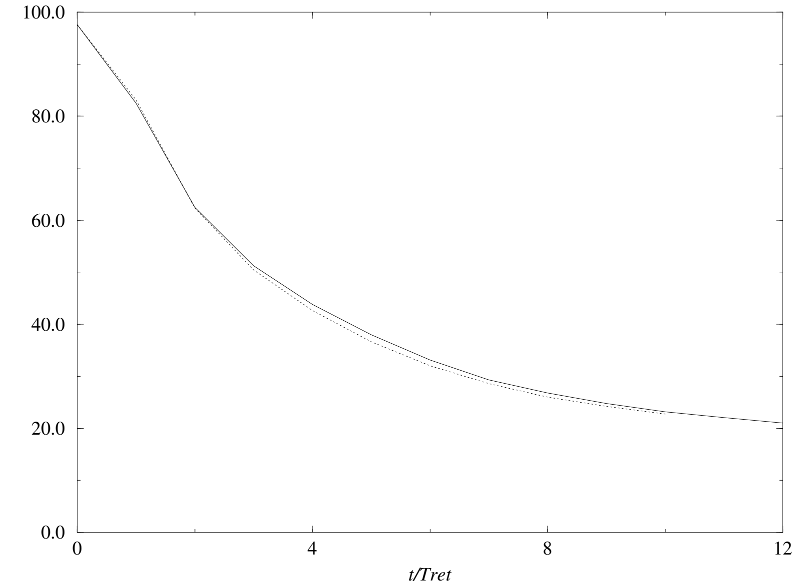


FIG. 6.14: *Evolution du nombre de Reynolds* Re_λ. *(——): Méthode VIC. (-----): Méthode Spectrale.*

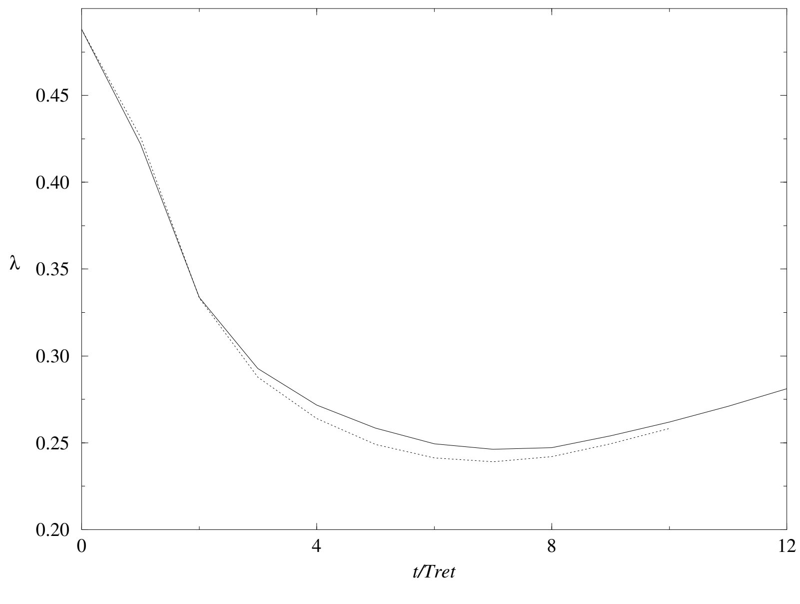


FIG. 6.15: *Evolution de l'échelle de Taylor. (——): Méthode VIC. (-----): Méthode Spectrale.*

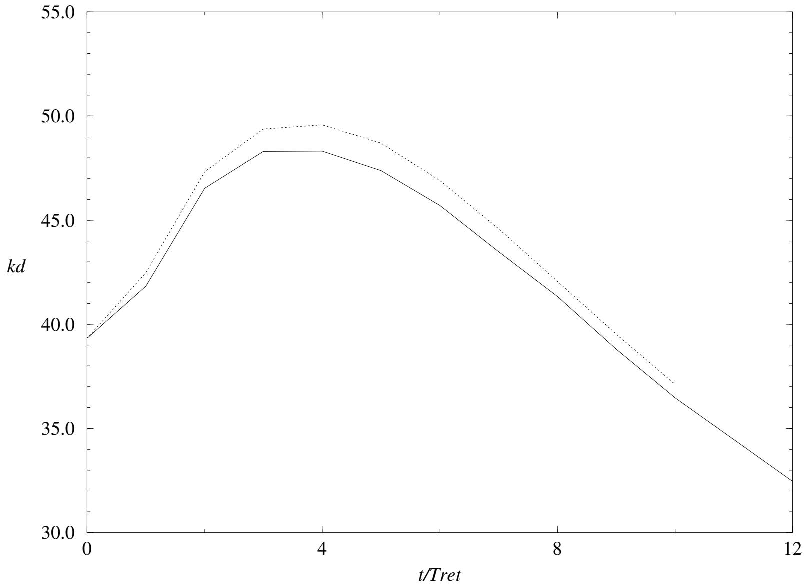


FIG. 6.16: *Evolution du nombre d'onde de Kolmogorov. (——): Méthode VIC. (-----): Méthode Spectrale.*

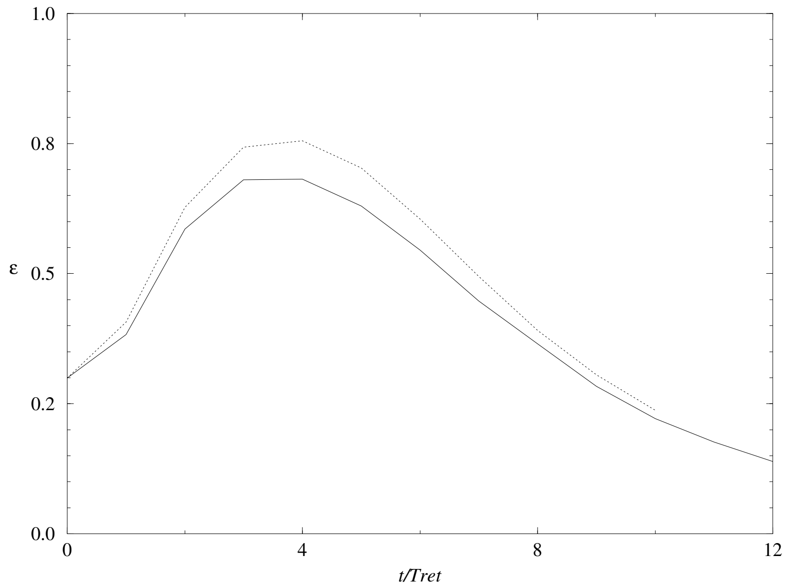


FIG. 6.17: *Evolution du taux de dissipation. (——): Méthode VIC. (-----): Méthode Spectrale.*

Chapitre 7

Discussion sur la présence de structures cohérentes

Avant-propos

Il s'agira ici de se pencher sur le comportement physique propre à l'évolution d'un champ turbulent. Nous aimerions que nos résultats épousent correctement la phénoménologie de la turbulence homogène isotrope, telle qu'elle est connue de nos jours.

7.1 Formation de structures cohérentes

Un tourbillon cohérent est une région de l'espace

(i) où la vorticité est concentrée de manière suffisante pour que les trajectoires de fluide puissent s'enrouler autour.

(ii) qui conserve une forme caractéristique durant un temps de vie plus long que le temps de retournement local.

(iii) qui est imprévisible

L'étude de régions à vorticité intense par simulation numérique directe d'écoulement turbulent homogène isotrope [14], a révélé la présence de structures cohérentes allongées de vorticité intense. Leur échelle radiale correspond à l'échelle de Taylor et leur longueur correspond à l'échelle intégrale de l'écoulement.

Comme déjà vu précédemment, l'évolution de la vorticité est décrite par :

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = S_{ik}\omega_k + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_k \partial x_k} \tag{7.1}$$

Le tenseur du taux de contraintes S_{ij} peut être décrit en terme de ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ où $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ et de ses vecteurs propres associés e_1, e_2 et e_3. La contrainte d'incompressibilité requiert que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Dès lors, λ_1 est toujours positif (extension), λ_3 est toujours négatif (compression). La valeur propre intermédiaire λ_2 peut être positive ou négative, suivant l'amplitude de λ_1 et λ_3.

D'après [32] et [17], le taux de contrainte le plus élevé se trouve dans le voisinage des tubes de vorticité. Le vecteur propre e_1, associé à la valeur propre positive, c'est-à-dire la direction de stretching, est perpendiculaire à la vorticité. La vorticité est généralement alignée avec le vecteur propre associé à la valeur propre intermédiaire. Le tube vortex est donc créé suivant la direction du maximum de stretching e_1 et s'aligne rapidement avec e_2.

D'après [24], nous pouvons avoir une idée de la dynamique. La vorticité d'une particule fluide set d'abord étirée, jusqu'à ce que la diffusion visqueuse est suffisamment intense pour équilibrer le stretching de la vorticité. La vorticité commence alors à décroître, premièrement dû aux effets visqueux et ensuite par contraction.

Nous montrons les isosurfaces du module de la vorticité dont la valeur est supérieure à un certain seuil. Ceci nous permet d'identifier les structures cohérentes, sièges de la vorticité intense.

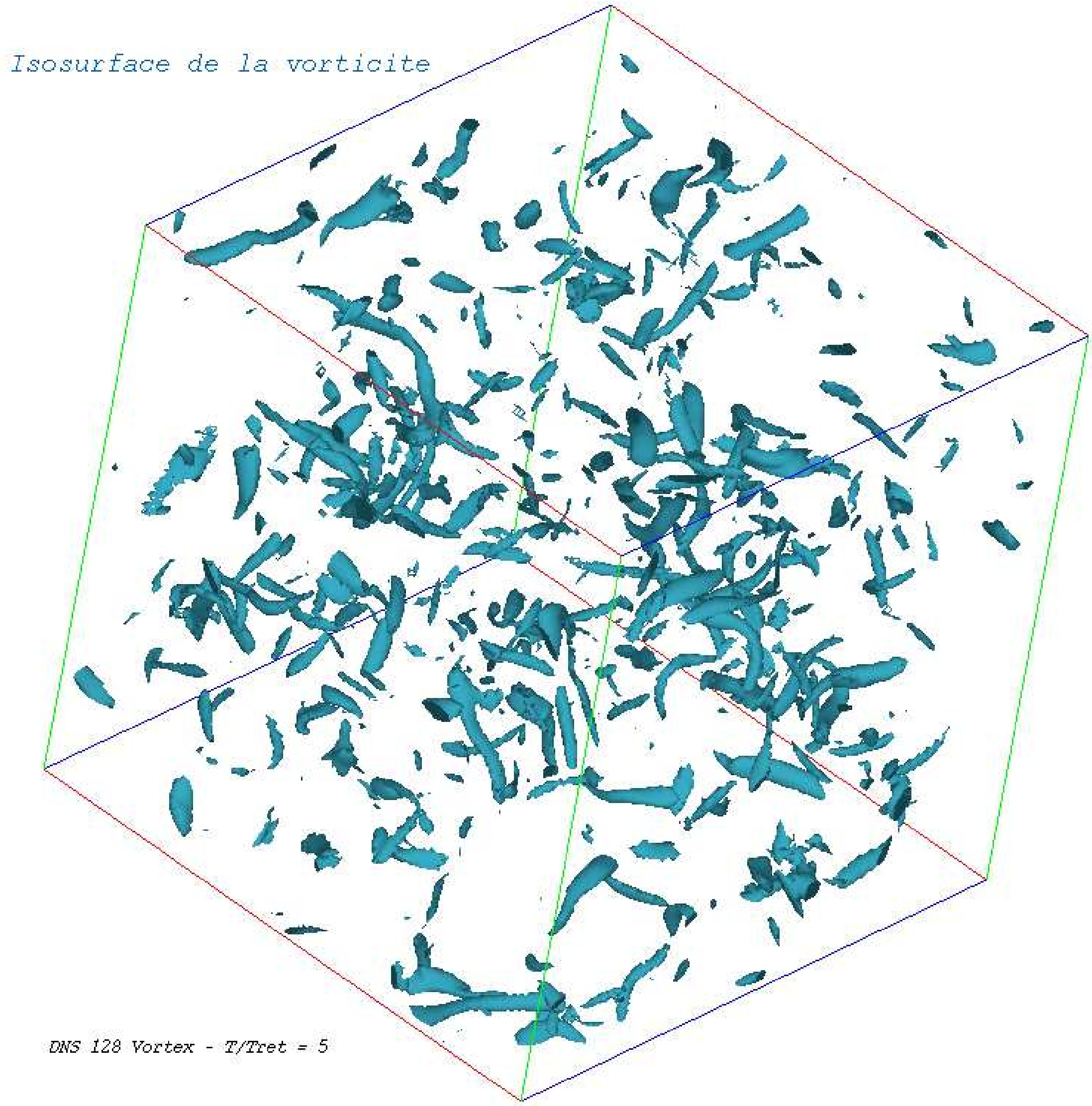


FIG. 7.1: *Isosurfaces de vorticité en $t_{adim} = 5$, calculées par Méthode VIC et affichées au-delà d'un certain seuil*

7.2 Structures cohérentes, lieux de dépression

Lorsqu'une parcelle fluide circule autour d'un tourbillon, elle est (dans un repère tournant avec elle) en équilibre sous l'effet de la force centrifuge, qui tend à la chasser vers l'extérieur du tourbillon, et de la résultante des forces de pression. Il faut donc que la pression extérieure soit supérieure à la pression intérieure. En d'autres termes, l'intérieur du tourbillon est un minimum de pression.

Ceci est bien vérifié par les calculs effectués. Nous avons donc identifié les tourbillons à l'aide de deux critères de reconnaissance différents.

Chapitre 8

Affinement de la méthode couplage particules-grille

Avant-propos

La comparaison entre méthodes particulaire et spectrale nous a permis d'identifier les déficiences que pouvaient présenter notre méthode. Une étude systématique est réalisée afin de cerner l'implication et l'influence de chaque paramètre dans l'amélioration des résultats.

Un des objectifs principaux est le relèvement du pic d'enstrophie.

8.1 Influence de l'étape de remaillage

Comme nous l'avions mentionné, l'allure de l'enstrophie menait à croire que la méthode V.I.C. introduisait de la dissipation numérique. C'est dans ce sens que s'oriente à présent notre recherche.

L'étape de remaillage effectuée à chaque pas de temps pourrait avoir une influence non-négligeable sur le processus de dissipation numérique. C'est pourquoi, nous nous proposons d'observer la réelle implication de deux paramètres dans ce processus:

(i) Fréquence de remaillage

(ii) Type de noyau utilisé

8.1.1 Fréquence de remaillage

Nous avons effectué plusieurs simulations avec une fréquence de remaillage différente: (1) tous les 2 pas de temps et (2) tous les 10 pas de temps.

D'après la figure (8.1.1) qui décrit l'évolution de l'enstrophie, l'allure de la courbe reste fidèle à celle de la méthode spectrale, quelque soit la fréquence de remaillage . Par contre, le remaillage semble éviter une explosion de l'enstrophie qui évoluait de manière catastrophique en laissant libre cours aux particules. On aurait pu croire que cette évolution catastrophique n'avait de but que de rejoindre la courbe spectrale, cependant cela ne se vérifie plus lorsque la fréquence de remaillage diminue à tous les $20 \cdot \triangle t$. A VERIF!!!!!!-¿ LEGAT

En ce qui concerne le relèvement du pic, nous constatons une amélioration de l'ordre de 1% pour le calcul (1) et de l'ordre de 8% pour le calcul (2).

Pourquoi ne prendrions-nous pas malgré tout la simulation (2)? En observant à la fois l'évolution de l'énergie (fig.8.1.1) et les spectres d'énergie (fig.8.1.1), les résultats obtenus par (2) s'écartent notablement de la référence spectrale.

PAS SUR!!!! -¿ les spectres semblent mieux coller, a verifier avec les 2/3 aussi pour l'nrj!!!!!

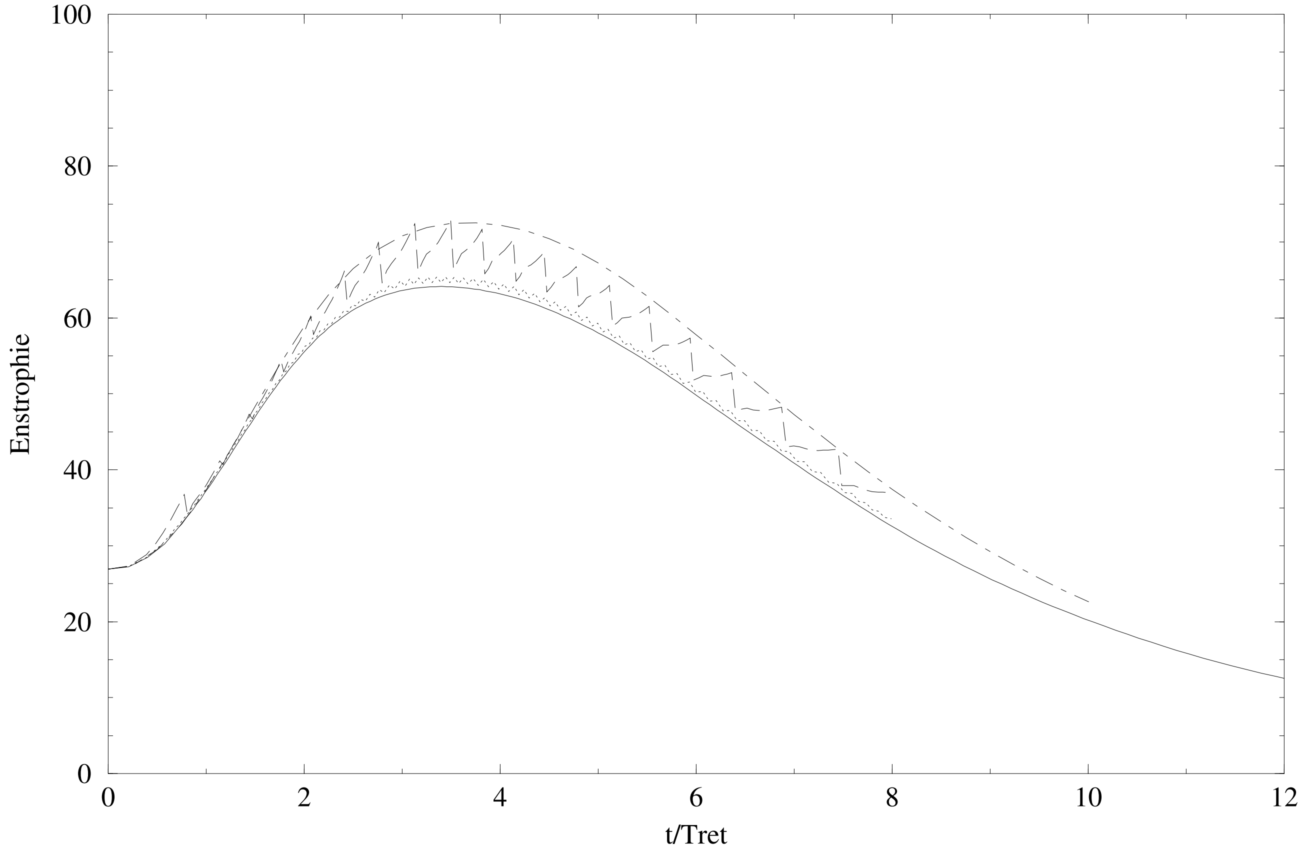


FIG. 8.1: *Evolution de l'enstrophie.* (——): *Méthode VIC, Fréquence de remaillage tous les* $\triangle t$, *Pic* = *64.1 en* $t_{adim} = 3.39$. (······): *Méthode VIC, Fréquence de remaillage tous les* $2\triangle t$, *Pic* = *65.405 en* $t_{adim} = 3.35$. ($---$): *Méthode VIC, Fréquence de remaillage tous les* $10\triangle t$, *Pic* = *66.3 en* $t_{adim} = 3.49$. ($-\cdot-$): *Méthode Spectrale, Pic* = *72.547 en* $t_{adim} = 3.75$

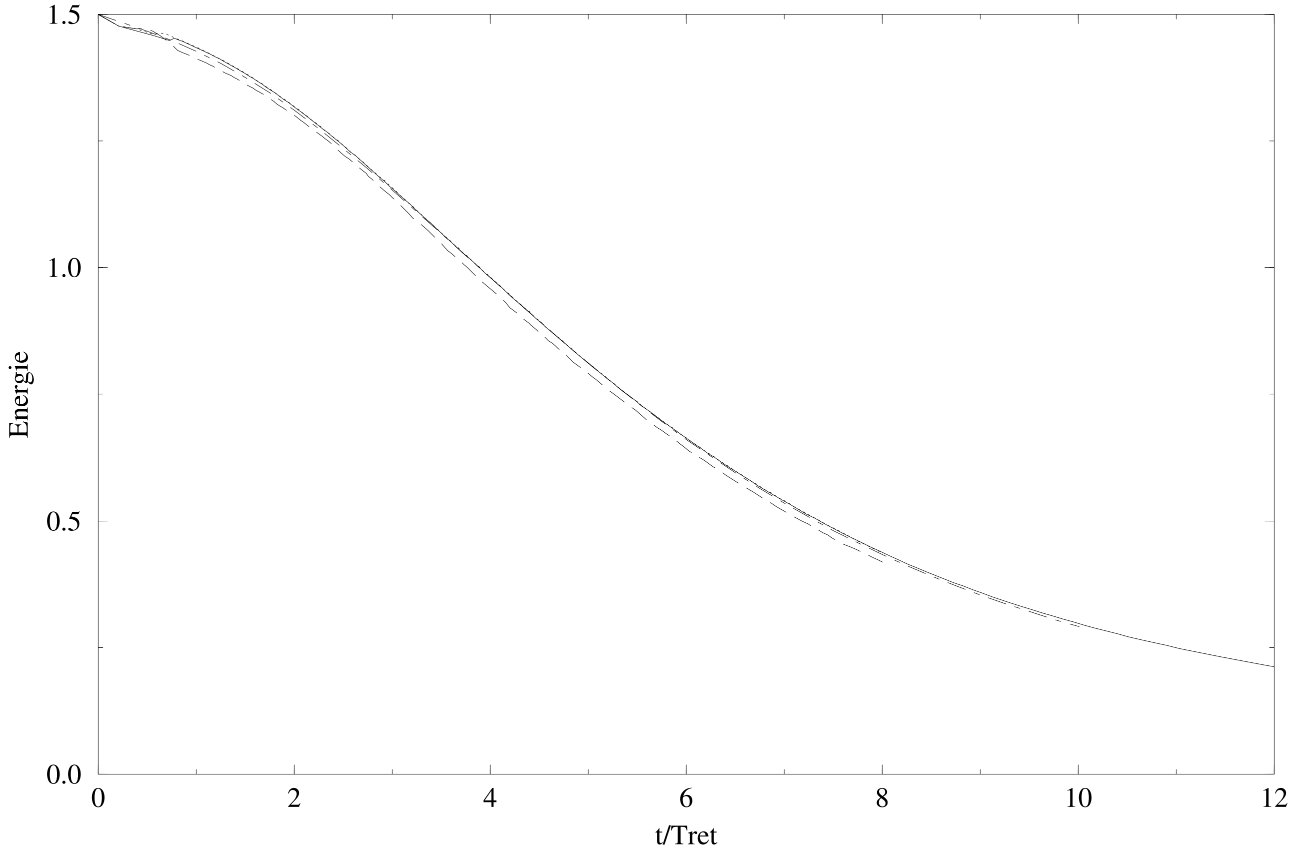


FIG. 8.2: *Evolution de l'énergie. (——): Méthode VIC, Fréquence de remaillage tous les $\triangle t$. (-----): Méthode VIC, Fréquence de remaillage tous les $2\triangle t$. ($- - -$): Méthode VIC, Fréquence de remaillage tous les $10\triangle t$. ($- \cdot -$): Méthode Spectrale.*

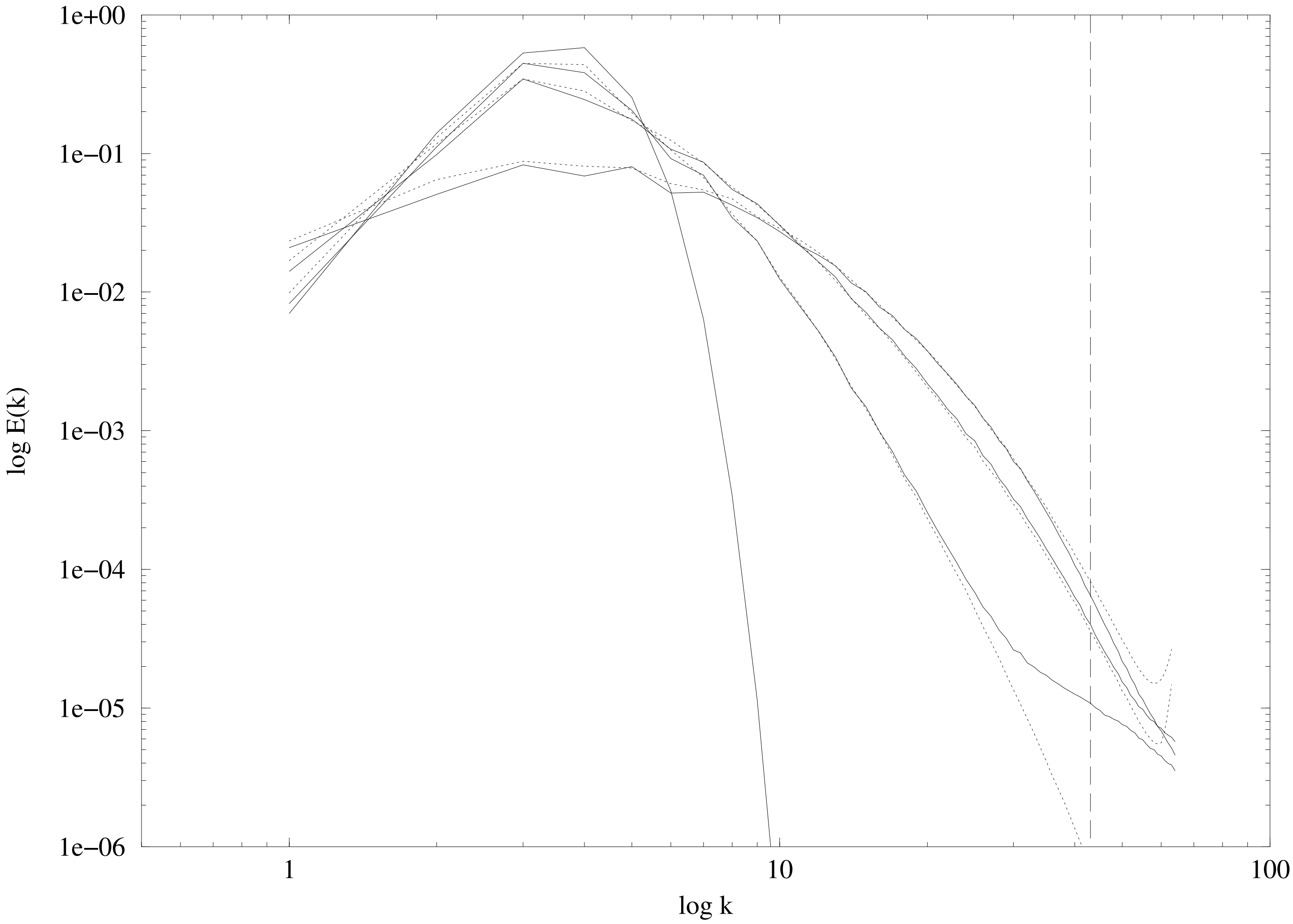


FIG. 8.3: *Spectres d'énergie à différents temps de retournement: 0, 1, 2, 6. (——): Méthode VIC, fréquence de remaillage tous les* $10\triangle t$*. (-----): Méthode Spectrale. (− − −):* $\frac{2}{3} \cdot k_{max}$

8.1.2 Noyaux de remaillage

Le type de noyau que nous utilisons est le noyau M_4' du 3ème ordre, décrit précédemment. En effectuant une simulation à l'aide du noyau λ_3 du 4ème ordre, aucune modification satisfaisante n'est à constater, comme en témoigne la figure (8.1.2). De plus, il semble que ce dernier noyau est plus dissipatif.

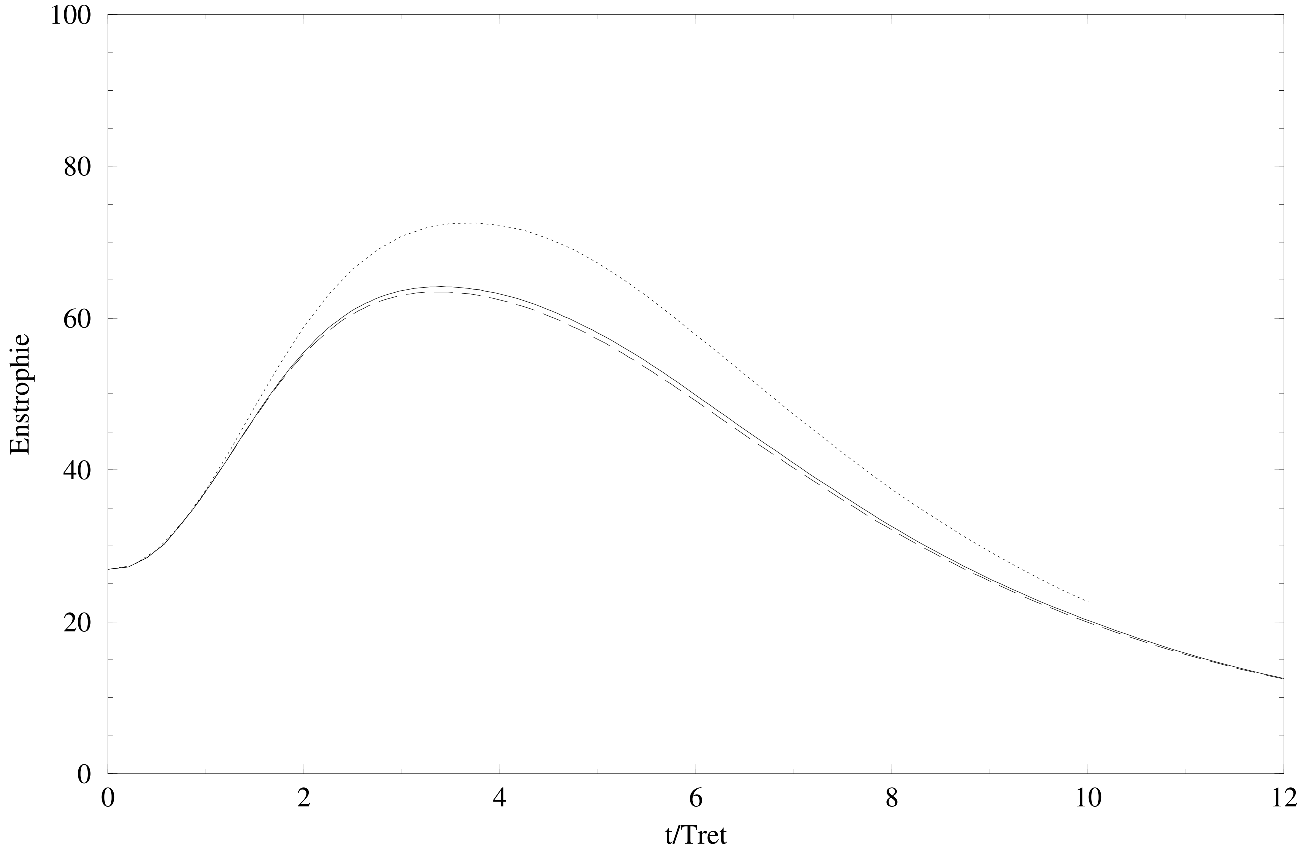


FIG. 8.4: *Evolution de l'enstrophie. (——): Méthode VIC, Fréquence de remaillage tous les* $\triangle t$*, Noyau de remaillage* M_4'*, Pic = 64.1 en* $t_{adim} = 3.39$*. (− − −): Méthode VIC, Fréquence de remaillage tous les* $\triangle t$*, Noyau de remaillage* λ_3*, Pic = 63.457 en* $t_{adim} = 3.36$*. (-----): Méthode Spectrale, Pic = 72.5 en* $t_{adim} = 3.75$

8.2 Influence de l'étape de diffusion

8.2.1 Epaisseur du noyau de diffusion

Dans l'étude du noyau utilisé pour l'étape de diffusion, nous avons vu qu'il était possible de modifier l'épaisseur de ce noyau. Nous observons l'influence de la modification de l'épaisseur sur l'ensemble des résultats, tout en conservant les moments.

Nous rappelons que le noyau utilisé est le suivant:

$$\eta_1(\frac{r}{\sigma}) = \frac{C}{1+(\frac{r}{\sigma})^{10}} \tag{8.1}$$

où C est la constante à calculer afin de vérifier les moments (2.10), r est la norme du vecteur de composante (x, y, z) et $\sigma = \delta h$, h est la taille de la maille et δ est l'épaisseur du noyau que nous modulons.

Les calculs précédents ont été effectués avec une épaisseur unité. Nous présentons des résultats correspondant à une épaisseur: (1) $\delta = 1.65$ et (2) $\delta = 1.9$.

Il est important de remarquer d'une part que le nombre de points voisins à utiliser dans le P.S.E augmentent considérablement avec l'épaisseur et que d'autre part la constante C doit être légèrement modifiée.

La valeur (1) est choisie de manière à ce que le pic de notre noyau corresponde au pic du noyau gaussien.

Comme en témoigne la figure (**??**), le noyau (8.1) où $\delta = 1$ n'exige qu'un point voisin dans chaque direction afin de vérifier tous les moments, par contre le noyau (8.1) où $\delta = 1.65$ (de pic équivalent à la gaussienne) impose l'utilisation de 2 points voisins dans chaque direction. Lorsque l'épaisseur augmente, le nombre de points nécessaires augmente démesurément.

D'après la figure (8.5), le pic d'enstrophie se relève à mesure que l'on augmente l'épaisseur du noyau. Par contre, les spectres d'énergie s'écartent de la référence spectrale lorsque δ croît, cet tendance se confirme sur l'évolution de l'energie.

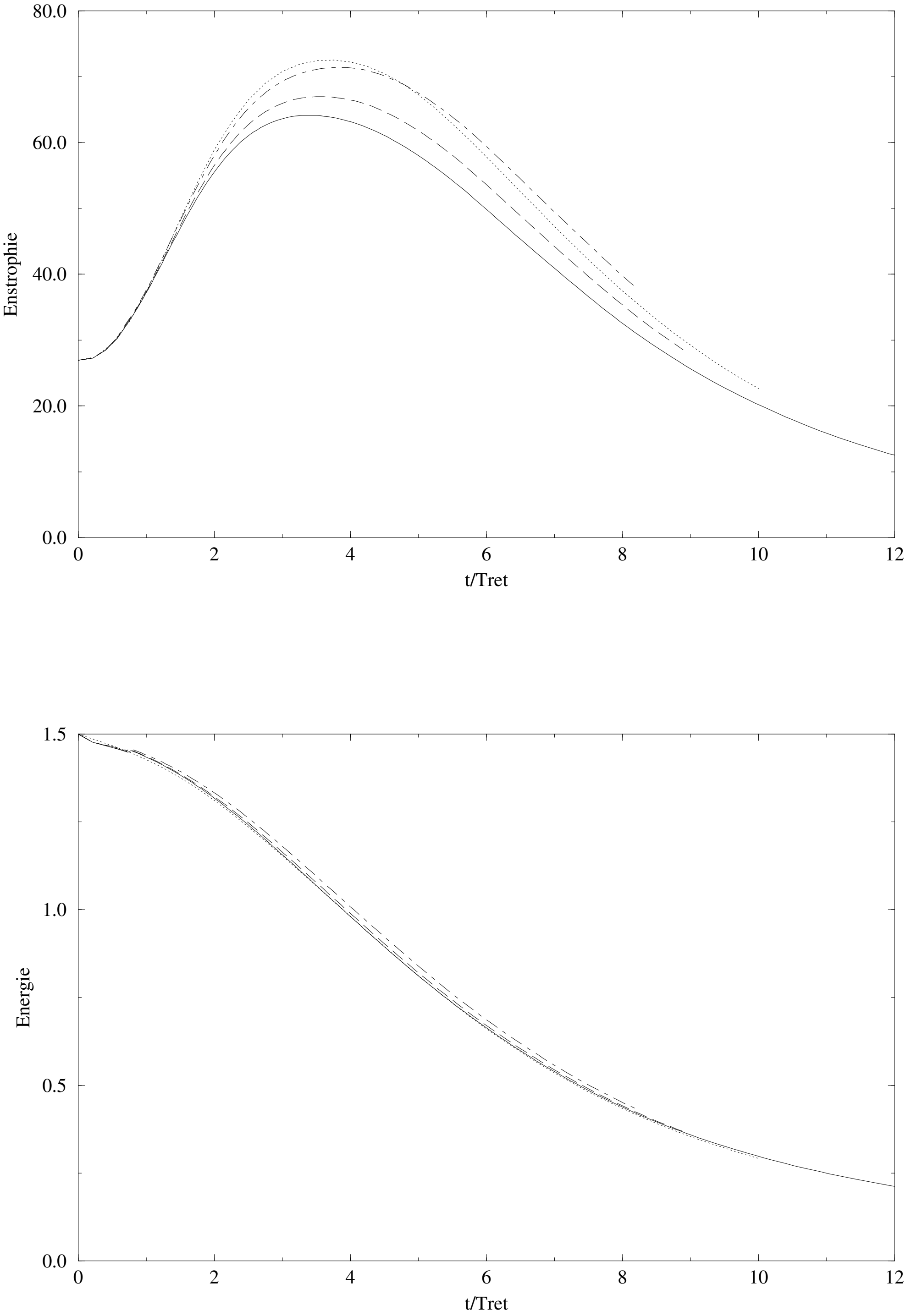
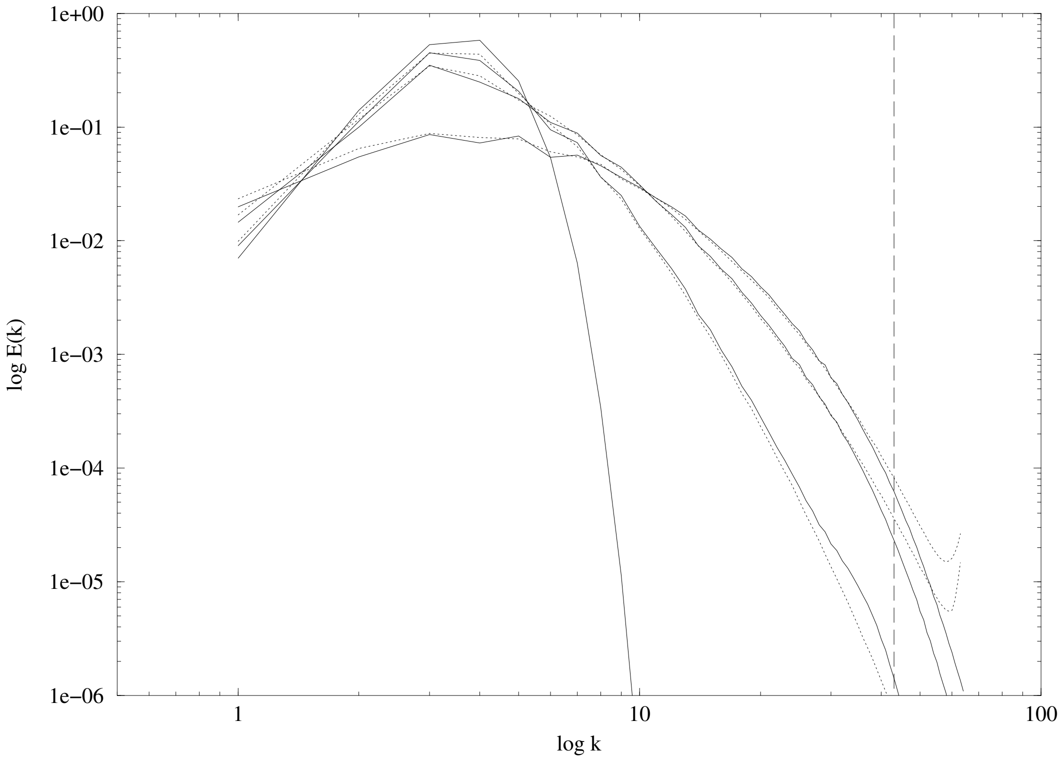


FIG. 8.5: *(a) Evolution de l'enstrophie. (b) Evolution de l'énergie.* (——): *Méthode VIC,* $\delta = 1$, *Pic* $= 64.1$ *en* $t_{adim} = 3.39$. $(---)$: *Méthode VIC, Noyau* η_1, $\delta = 1.65$, *Pic* $=$ 66.9 *en* $t_{adim} = 3.55$. $(-\cdot-)$: *Méthode VIC, Noyau* η_1, $\delta = 1.9$, *Pic* $= 71.4$ *en* $t_{adim} =$ 3.81. (-----): *Méthode Spectrale, Pic* $= 72.5$ *en* $t_{adim} = 3.75$.



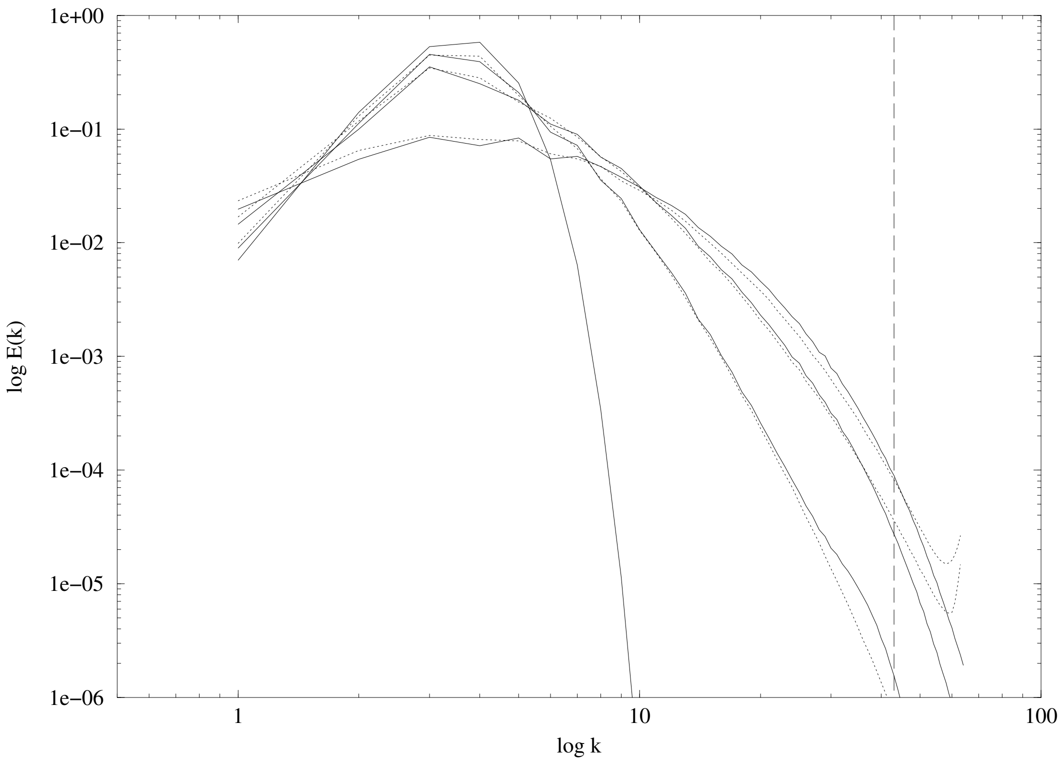


FIG. 8.6: *Evolutions des spectres pour différents temps de retournement : 0, 1, 2, 6. (a) (——): Méthode VIC, Noyau* η_1*,* $\delta = 1.64$*. (·····): Méthode Spectrale. (b) (——): Méthode VIC, Noyau* η_1*,* $\delta = 1.9$*. (·····): Méthode Spectrale*

8.2.2 Noyaux de diffusion

Un autre noyau a été implémenté afin de mesurer la réelle implication de notre noyau originel. Il s'agit du noyau de la forme:

$$\eta_2(\rho) = \frac{C}{(\rho^2 + 1)^{9/2}} \tag{8.2}$$

Le calcul de la constante C est réalisée de manière à vérifier les moments (2.10), à voir en Annexe 1. Le noyau (8.2) requiert l'utilisation d'un nombre de points voisins très élevé, voir fig.(**??**), en effet un choix $\delta = 4$ est nécessaire pour obtenir une courbe d'enstrophie raisonnable. Le rapport résultat/coût médiocre nous permet de nous conforter dans le choix du noyau (8.1).

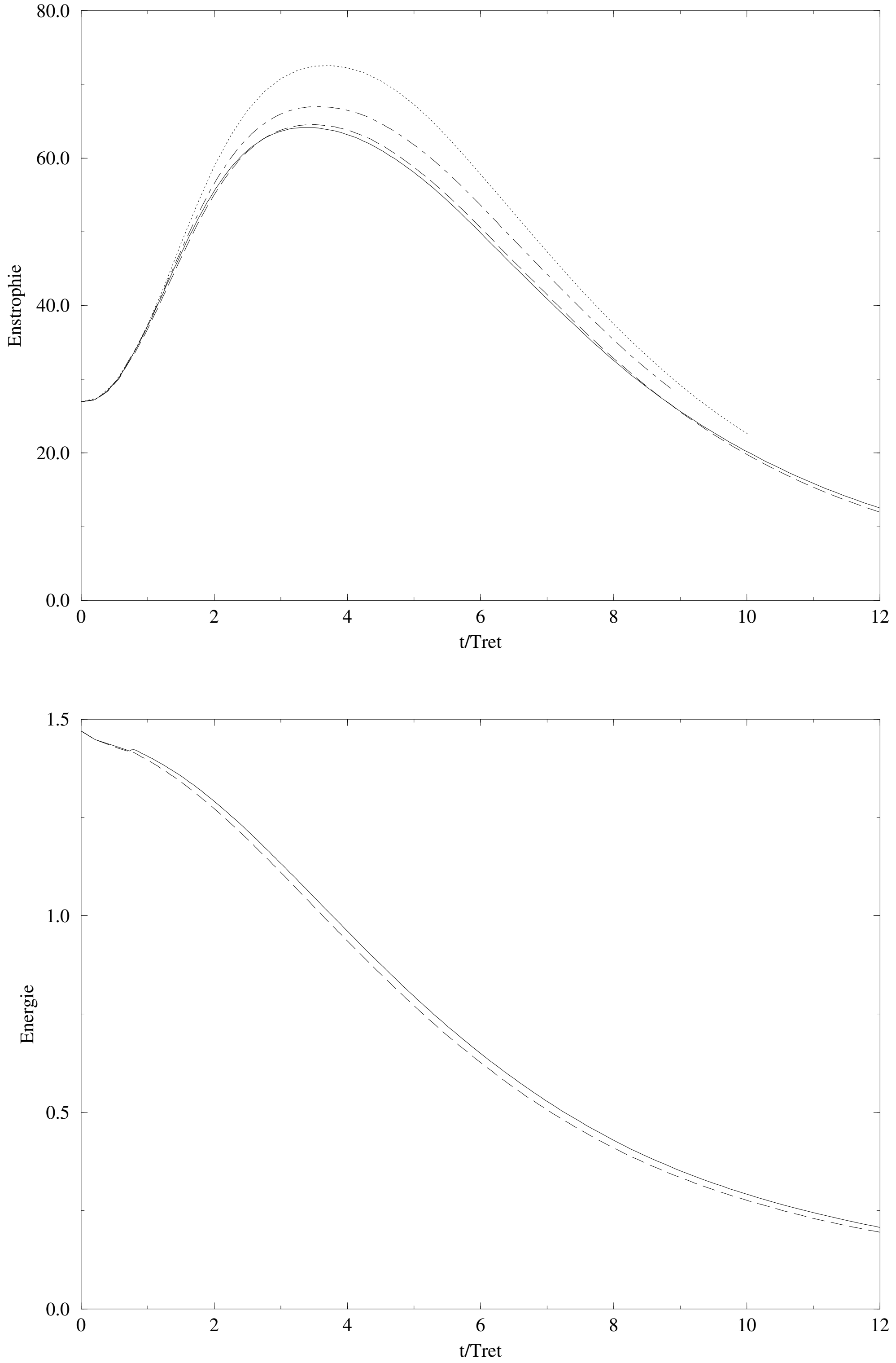


FIG. 8.7: *(a) Evolution de l'enstrophie. (b) Evolution de l'énergie.* (——)*: Méthode VIC, Noyau* η_1, $\delta = 1$, *Pic = 64.1 en* t_{adim} *= 3.39.* (−·−)*: Méthode VIC, Noyau* η_1, $\delta = 1.65$, *Pic = 66.9 en* t_{adim} *= 3.55.* (−−−)*: Méthode VIC, Noyau* η_2, $\delta = 4$, *Pic = 64.5 en* t_{adim} *= 3.47.* (·····)*: Méthode Spectrale, Pic = 72.5 en* t_{adim} *= 3.75.*

8.3 Influence du pas de temps

8.3.1 Réduction du pas de temps

Dans cette section, nous prenons un pas de temps réduit de moitié par rapport aux simulations précédentes et nous remaillons tous les deux pas de temps pour réaliser une comparaison rigoureuse.. Il n'y a pas de différences notoires à constater. Le pic d'enstrophie subit une augmentation de l'ordre de 1% et l'évolution de l'énergie décrit un comportement plus lisse au temps initiale. Il semblerait que le champ de vitesse non-physique exige un pas de temps très faible au début de la simulation. Ce choix du pas de temps n'a aucune incidence sur le reste de la simulation.

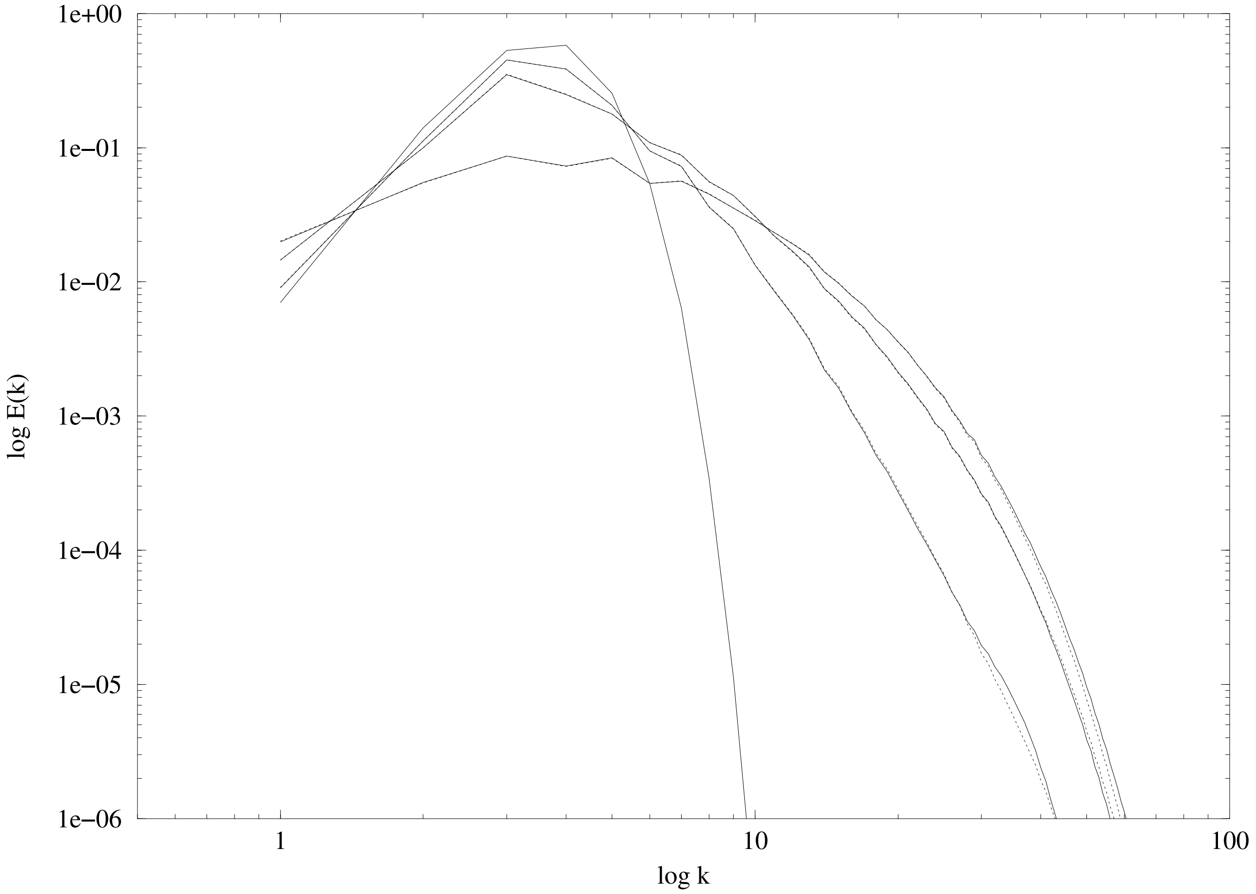


FIG. 8.8: *Spectres d'énergie pour différents temps de retournement: 0, 1, 2, 6, 10. (——): Méthode VIC, $\frac{1}{2}\triangle t$. (-----): Méthode Spectrale.*

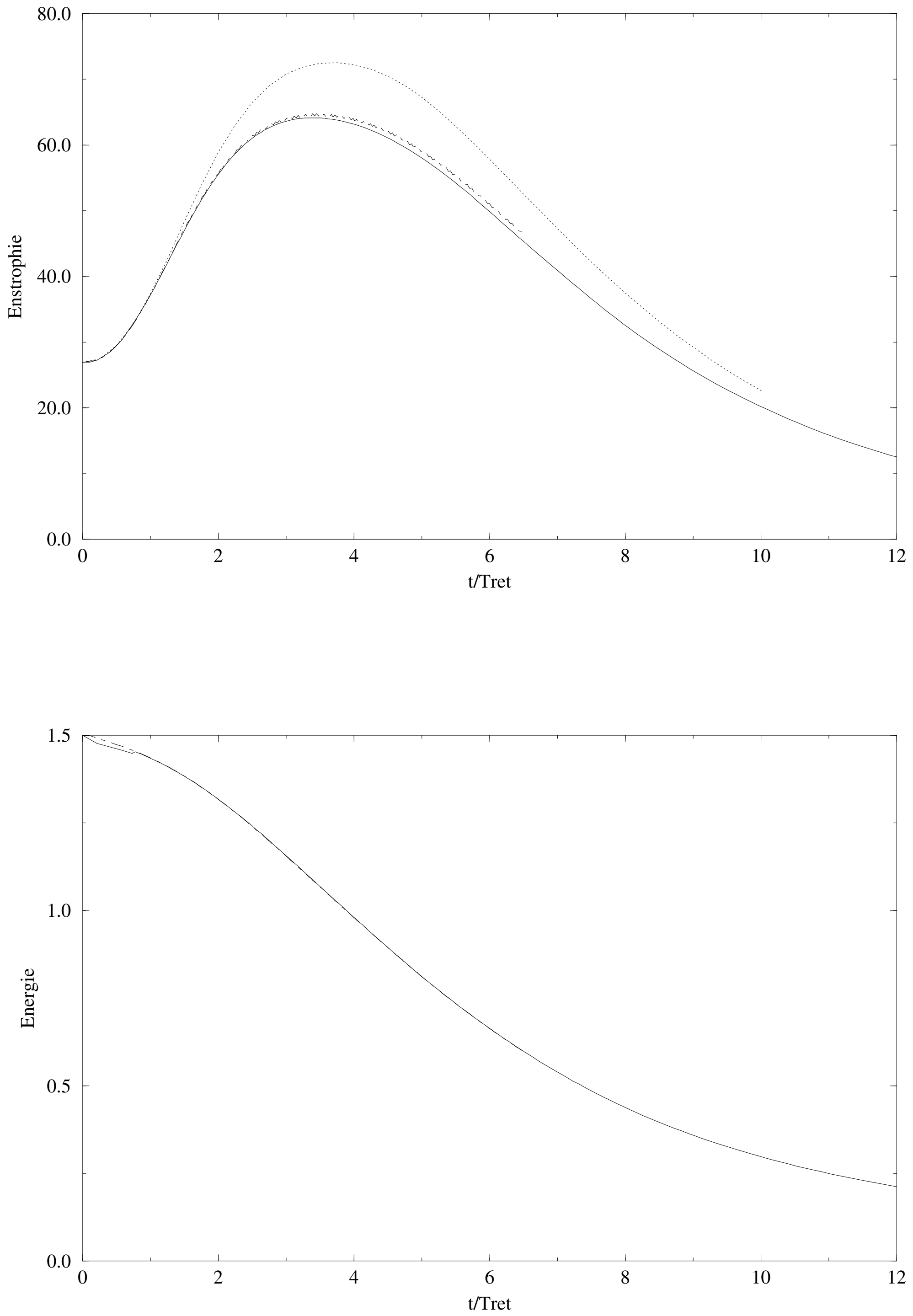


FIG. 8.9: *(a) Evolution de l'enstrophie. (b) Evolution de l'énergie. (——): Méthode VIC, $\triangle t$ vérifiant les critères de stabilité, Pic = 64.1 en t_{adim} = 3.39. (– – –): Méthode VIC, $\frac{1}{2}\triangle t$, Pic = 64.75 en t_{adim} = 3.44. (·····): Méthode Spectrale, Pic = 72.5 en t_{adim} = 3.75.*

8.3.2 Critère de choix du pas de temps

Comme nous l'avions mentionné, il existe essentiellement trois critères de pas de temps à vérifier:

(i) Stabilité sur la diffusion : $\triangle t \leq \frac{\varepsilon^2}{C\nu}$

(ii) Condition de "non-entrelacement" : $\triangle t \leq |\omega|^{-1}_{max}$

(iii) Condition sur le stretching : $\triangle t \leq |\lambda|^{-1}_{max}$

Les deux dernières contraintes résultaient d'un raisonnement intuitif, et représentent les conditions les plus fortes à vérifier.

En ne considérant que les conditions (i) et (iii) sur le choix du pas de temps, nous obtenons une allure catastrophique de l'enstrophie comme le montre la figure (8.3.2). Cependant, il ne s'agit pas d'une simulation qui a explosé. L'évolution de l'énegie reste fiable et les spectres ne divergent pas au cours du temps.

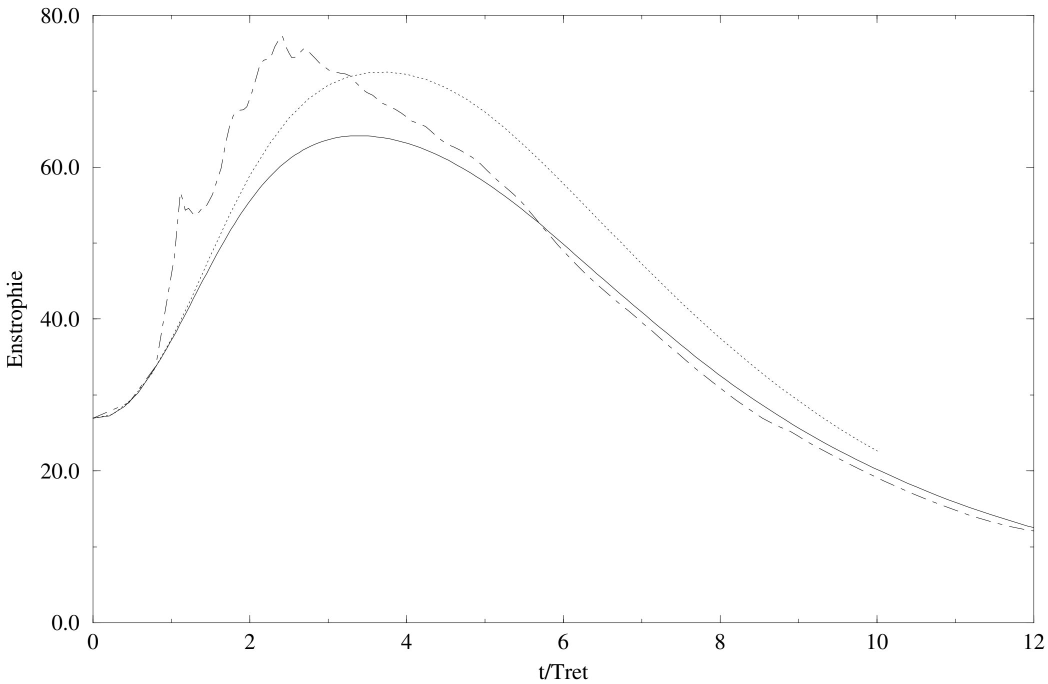


FIG. 8.10: *Evolution de l'enstrophie. (——): Méthode VIC, $\triangle t$ vérifiant (i), (ii) et (iii). ($-\cdot-$): Méthode VIC, $\triangle t$ vérifiant (i) et (iii). (-----): Méthode Spectrale.*

Le calcul suivant nous a permis de cerner la raison pour laquelle l'enstrophie ne présentait pas le comportement escompté.

Nous avons réalisé deux simulations en parallèles.

• La première simulation dont le remaillage s'effectue à chaque pas de temps, correspond à un choix de pas de temps suivant:

Tant que $t_{simul} \leq 1.5T_{ret}$, $\triangle t = \frac{1}{\omega_{max}}$

Dès que $t_{simul} > 1.5T_{ret}$, $\triangle t = \frac{1}{\lambda_{max}}$

• La deuxième simulation correspond à un choix de pas de temps fixe:$\triangle t = \frac{1}{\omega_{max}}$. Or, en $t_{simul} = 1.5T_{ret}$, $\frac{1}{\lambda_{max}} \approx \frac{3}{\omega_{max}}$, nous décidons d'appliquer la fréquence de remaillage suivante

Tant que $t_{simul} \leq 1.5T_{ret}$, la fréquence de remaillage tous les $\triangle t$

Dès que $t_{simul} > 1.5T_{ret}$, la fréquence de remaillage tous les 3 $\triangle t$

En $t_{simul} = 1.5T_{ret}$, les deux simulations obtiennent un comportement chaotique de l'enstrophie semblable, comme le montre la figure (8.11). Le pas de temps doit être suffisamment petit pour pouvoir remplir la condition de recouvrement. Il s'avère que dans notre cas, la condition (ii), qui correspond à la contrainte la plus forte, nous permet de satisfaire un bon recouvrement.

Il reste malgré tout indispensable de choisir un pas de temps vérifiant les trois contraintes.

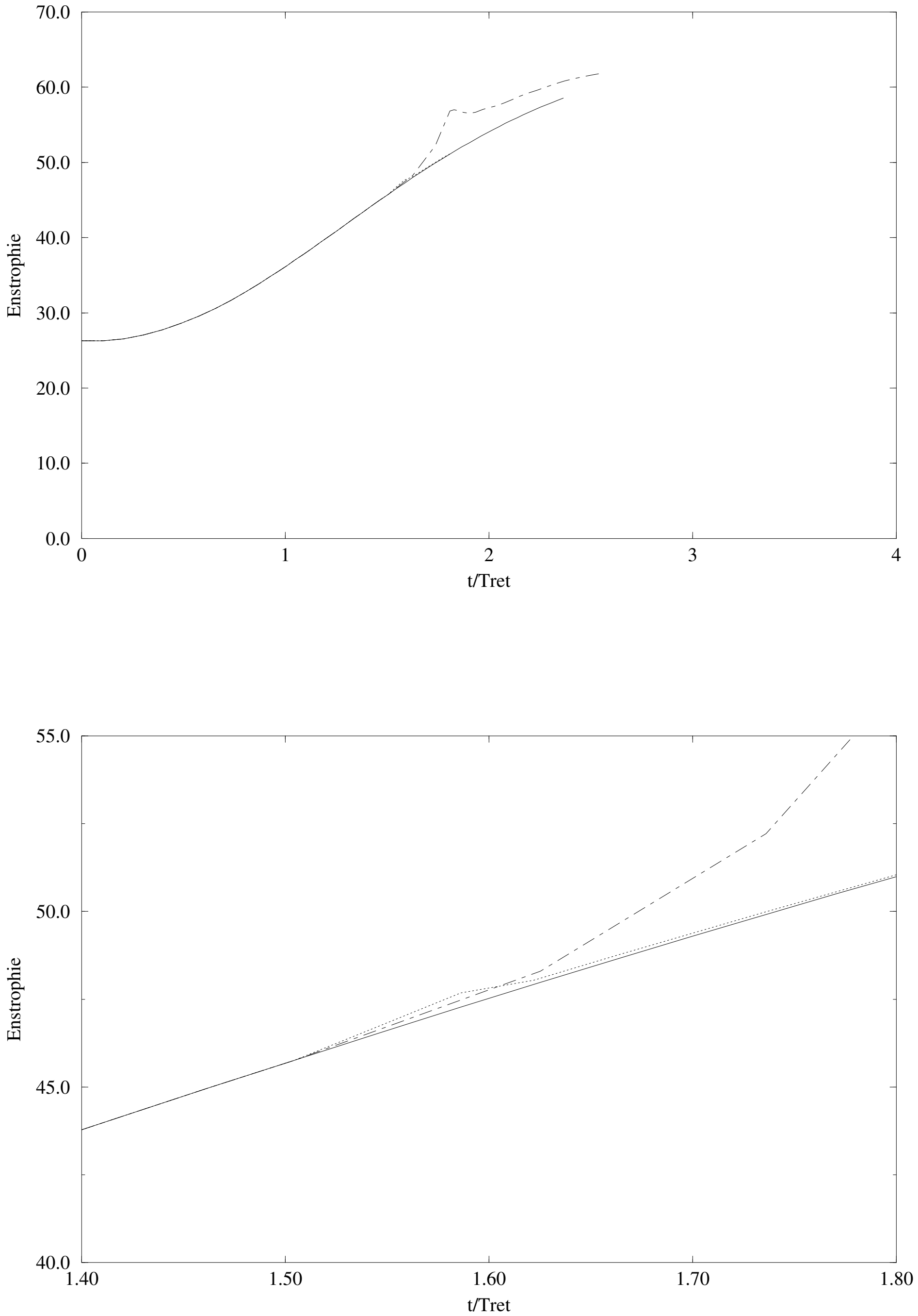


FIG. 8.11: *(a) et (b) Evolution de l'enstrophie. (——): Méthode VIC, $\triangle t$ vérifiant (i), (ii) et (iii). (-----): Méthode VIC, $\triangle t$ vérifiant (i), (ii) et (iii), en $t \leq 1.5T_{ret}$: fréquence de remaillage tous les $\triangle t$, en $t > 1.5T_{ret}$: fréquence de remaillage tous les $3\triangle t$. $(- \cdot -)$: Méthode VIC, en $t \leq 1.5T_{ret}$: $\triangle t$ vérifiant (i), (ii) et (iii), en $t > 1.5T_{ret}$: $\triangle t$ vérifiant (i) et (iii).*

8.4 Influence du solveur Poisson

Dans l'algorithme de la méthode VIC, il nous faut résoudre l'équation de Poisson $\nabla^2\psi^n_{i,j,k} = -\omega^n_{i,j,k}$ afin d'obtenir les fonctions de courant sur la grille.

Le Solveur que nous utilisons est un solveur permettant la prise en compte de conditions aux limites périodiques et non-périodiques. La prise en compte de n'importe quelle type de conditions aux frontières constituent un avantage par rapport aux méthodes spectrales.

Malgré tout, étant donné que nous travaillons en turbulence homogène isotrope, il semblait intéressant de déterminer l'influence du solveur en utilisant les Transformées de Fourier Rapides. Nous résolvons donc l'équation de Poisson dans l'espace spectrale, il s'agit d'un simple problème algébrique (Voir Annexe 1). Les résultats sont à la fois satisfaisant au niveau de leur amélioration et du temps d'exécution.

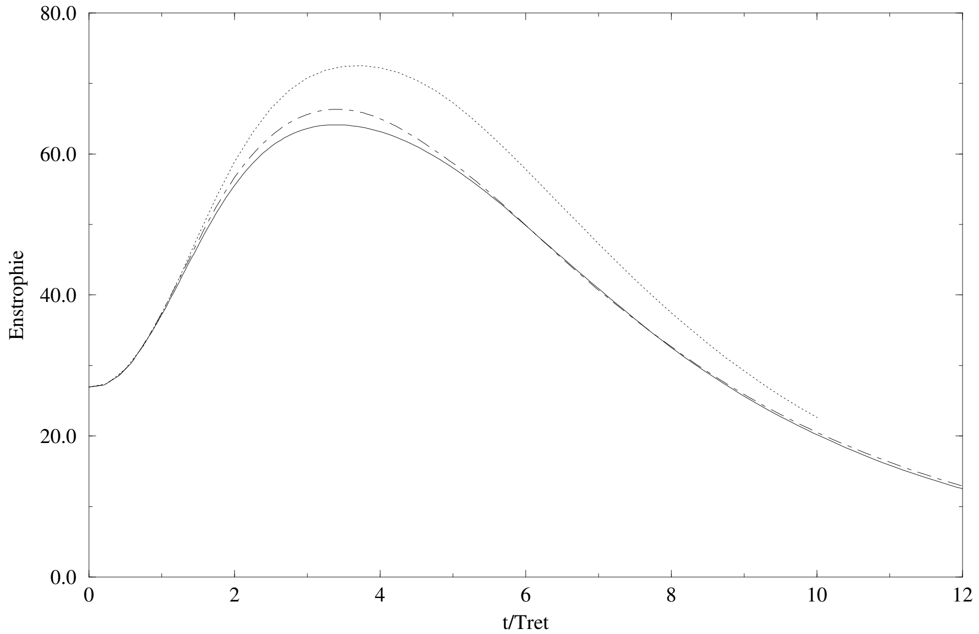


FIG. 8.12: *Evolution de l'enstrophie. (——): Méthode VIC, Résolution de l'équation de Poisson, par solveur d'ordre 2, Pic = 64.1 en* $t_{adim} = 3.39$. *(– · –): Méthode VIC, Résolution de l'équation de Poisson, par solveur FFT, Pic = 66.3 en* $t_{adim} = 3.40$. *(·····): Méthode Spectrale, Pic = 72.5 en* $t_{adim} = 3.75$.

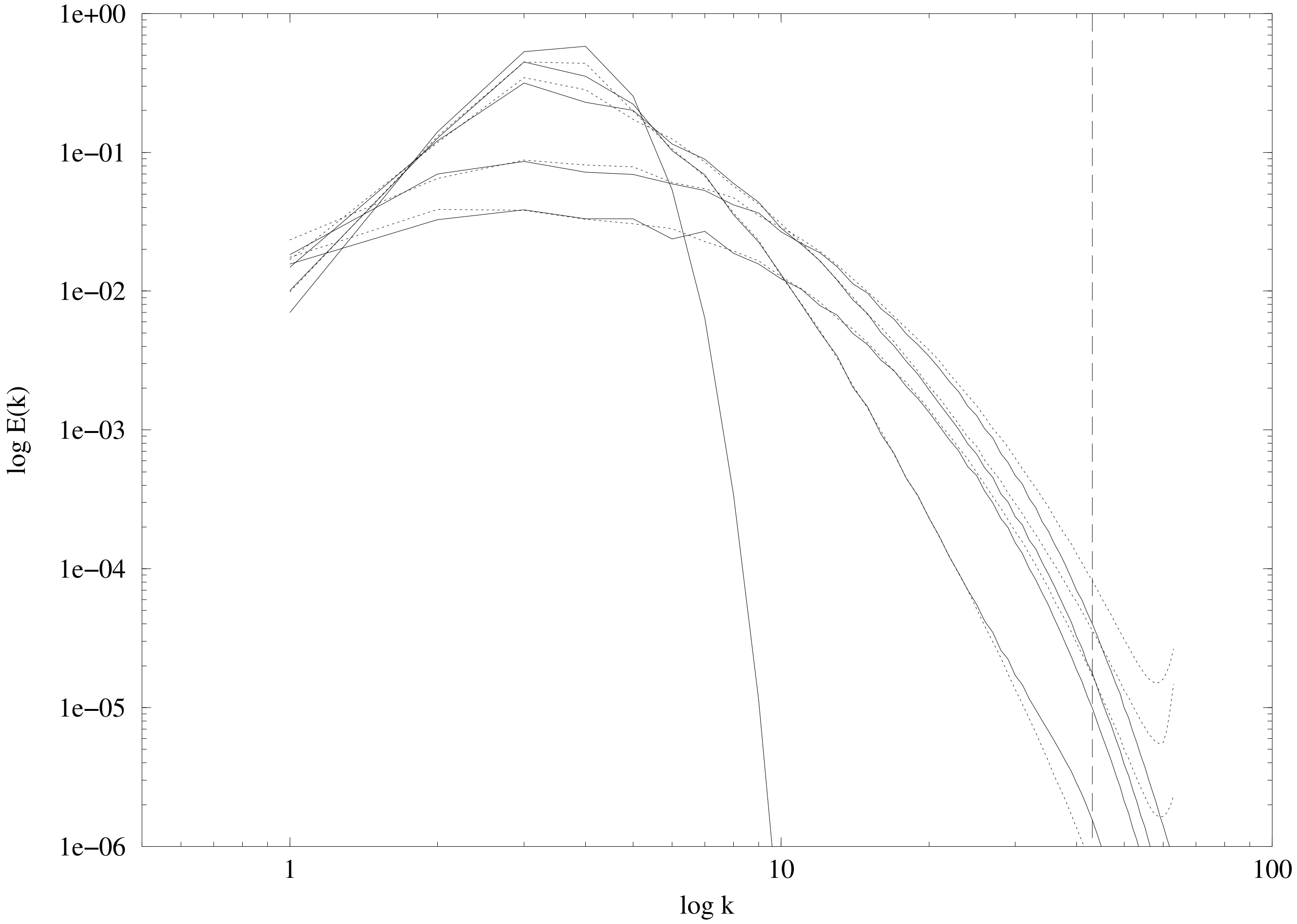


FIG. 8.13: *(——): Méthode VIC, Résolution de l'équation de Poisson, par solveur FFT. (⋯⋯): Méthode Spectrale*

8.5 Influence de la résolution

8.5.1 Résolution

Nous avons décidé de comparer trois simulations qui diffèrent entre elles uniquement par leur résolution:

(i) Nombres de points de grilles et de particules maximum : 128^3

(ii) Nombres de points de grilles et de particules maximum : 64^3

(iii) Nombres de points de grilles et de particules maximum : 32^3

Le graphe d'évolution d'enstrophie , voir fig. (8.5.1), en parallèle avec les spectres d'énergie nous suggère que l'effet de sous-résolution a tendance à faire diminuer le pic d'enstrophie. Au vue de la définition de l'enstrophie $D(t) = \int_0^{k_C} k^2 E(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$, une augmentation de la résolution permettrait de relever le pic d'enstrophie pour atteindre le pic spectral. C'est donc ici que l'on ressent la difficulté de vouloir atteindre la précision spectral avec la même résolution. Malheureusement, le matériel mis à la disposition ne permettait pas de réaliser un calcul en 192^3 en méthode VIC, pour pouvoir constater un relèvement du pic.

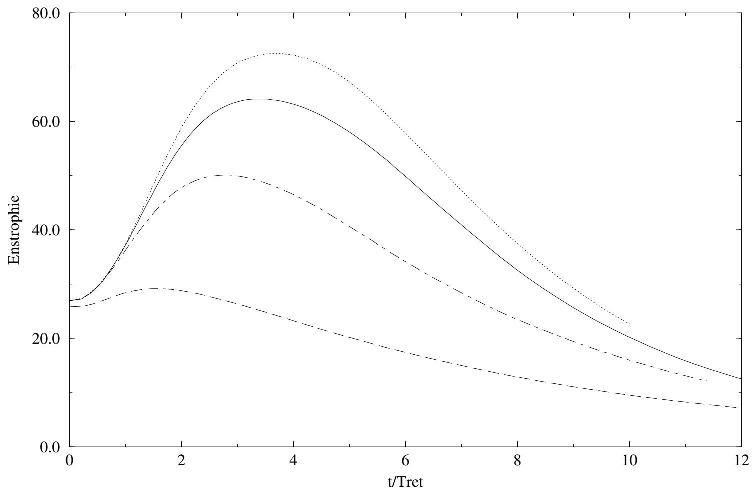


FIG. 8.14: *Evolution de l'enstrophie.* (——): *Méthode VIC,* $N = 128^3$ $m = 128^3$, *Pic* = *64.1 en* t_{adim} = *3.39.* ($- \cdot -$): *Méthode VIC,* $N = 64^3$ $m = 64^3$, *Pic* = *50.1 en* t_{adim} = *2.76.* ($- - -$): *Méthode VIC,* $N = 32^3$ $m = 32^3$, *Pic* = *29.1 en* t_{adim} = *1.63.* (·····): *Méthode Spectrale,* $N = 128$, *Pic* = *72.5 en* t_{adim} = *3.75.*

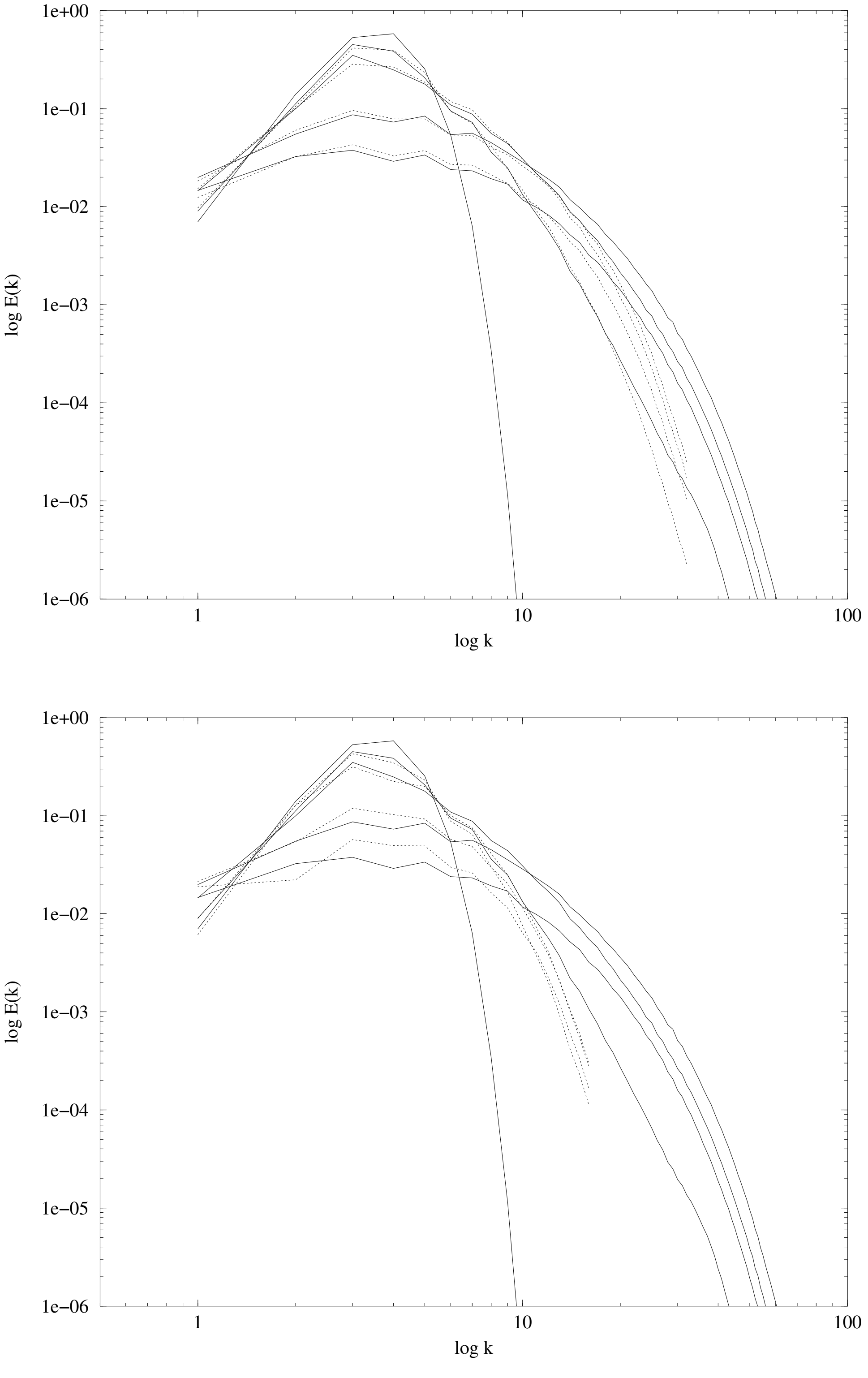
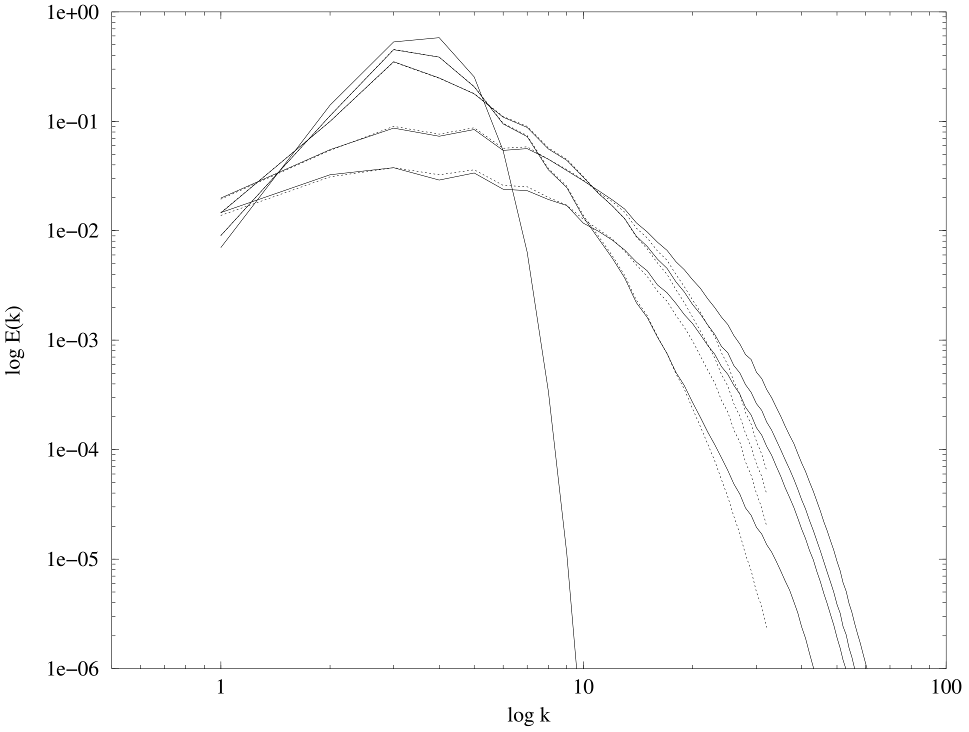


FIG. 8.15: *Spectres d'énergie pour différents temsp de retournement : 0, 1, 2, 6, 10. (a) (——): Méthode VIC,* $N = 128^3$ $m = 128^3$*. (·····)Méthode VIC ,* $N = 64^3$ $m = 64^3$*.(b) (——): Méthode VIC,* $N = 128^3$ $m = 128^3$*. (·····)Méthode VIC ,* $N = 32^3$ $m = 32^3$*.*

8.5.2 Interpolation

Les méthodes de couplage “particules-grille”, permettent de fixer un nombre de particules différent du nombre de points de grille. La simulation que nous avons effectuée correspond à 128^3 particules et à 64^3 points de grille.

Ces résultats nous permettent de mesurer l’influence de l’interpolation et de l’utilité d’un nombre de points de grille suffisant. A la vue de figure (a), une quantité d’information tout à fait significative est perdue en n’adaptant pas le nombre de points de grille au nombre de particules. Une améloiration trop sensible est à constater sur la figure (b).



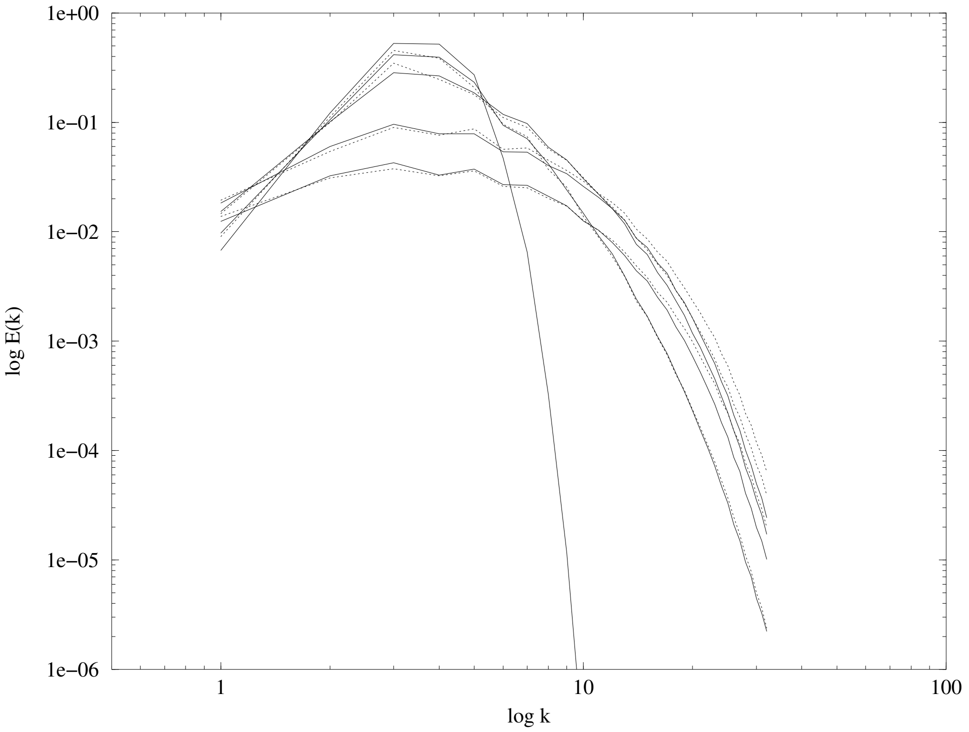


FIG. 8.16: *Spectres d'énergie pour différents temsp de retournement : 0, 1, 2, 6, 10. (a) (——): Méthode VIC,* $N = 128^3$ $m = 128^3$. *(-----)Méthode VIC ,* $N = 64^3$ $m = 128^3$.*(b) (——): Méthode VIC,* $N = 64^3$ $m = 64^3$. *(-----)Méthode VIC ,* $N = 64^3$ $m = 128^3$.

8.6 Effet de la viscosité

Une méthode numérique ne peut prétendre simuler les phénomènes physiques correctement si sa viscosité artificielle est nettement inférieur à la viscosité moléculaire du fluide.

A la présentation de l'ensemble, la méthode VIC rempli cette condition indispensable à la simulation d'écoulements.

Il reste malgré tout la simulation d'écoulement non-visqueux qui peut nous éclairer davantage sur le comportement des méthodes de couplage particules-grille.

Nous cadrons nos résultats en faisant varier la viscosité jusqu'à obtenir un écoulement non-visqueux.

Considérons tout d'abord les comportements extrêmes correspondants à une viscosité $\nu = 0.05$ et une viscosité nulle.

En comparaison avec l'évolution d'enstrophie pour $\nu = 0.05$, l'enstrophie de l'écoulement non-visqueux explose au cours du temps, fig (8.6).

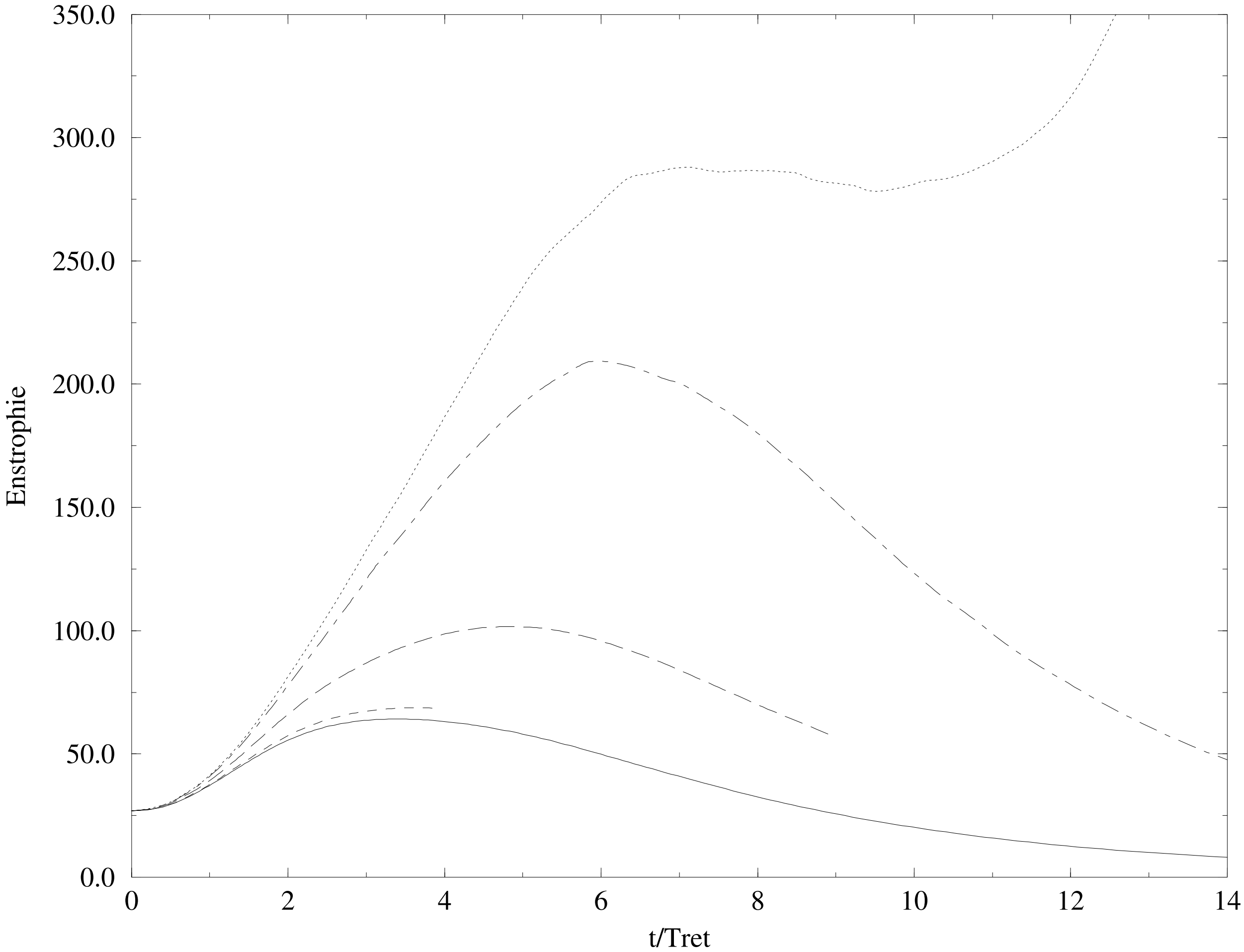


FIG. 8.17: *Evolution de l'enstrophie, par méthode VIC. (——): ν = 0.005. (----): 90% $\cdot \nu$. (− − −): 50% $\cdot \nu$. (− · −): 10% $\cdot \nu$. (·····): Ecoulement non-visqueux.*

Dans un premier temps, la méthode VIC laisse l'enstrophie augmenter, en raison de l'absence de compensation du terme de stretching par le terme de dissipation moléculaire. Ensuite, lorsque l'enstrophie devient trop élevée, la méthode dissipe afin de combattre cette forte production. Enfin, après quelques temps de retournement, elle laisse évoluer le comportement physique.

Cette étude de l'évolution d'enstrophie se confirme également à partir de l'évolution de l'énergie, voir fig (8.6). Initialement, la courbe d'énergie de l'écoulement non-visqueux épouse la tangente horizontale, puis lorsque l'enstrophie devient trop importante, l'énergie diminue fortement en raison de la dissipation numérique. Au dixième temps de retournement, l'énergie reprend un comportement asymptotiquement horizontal.

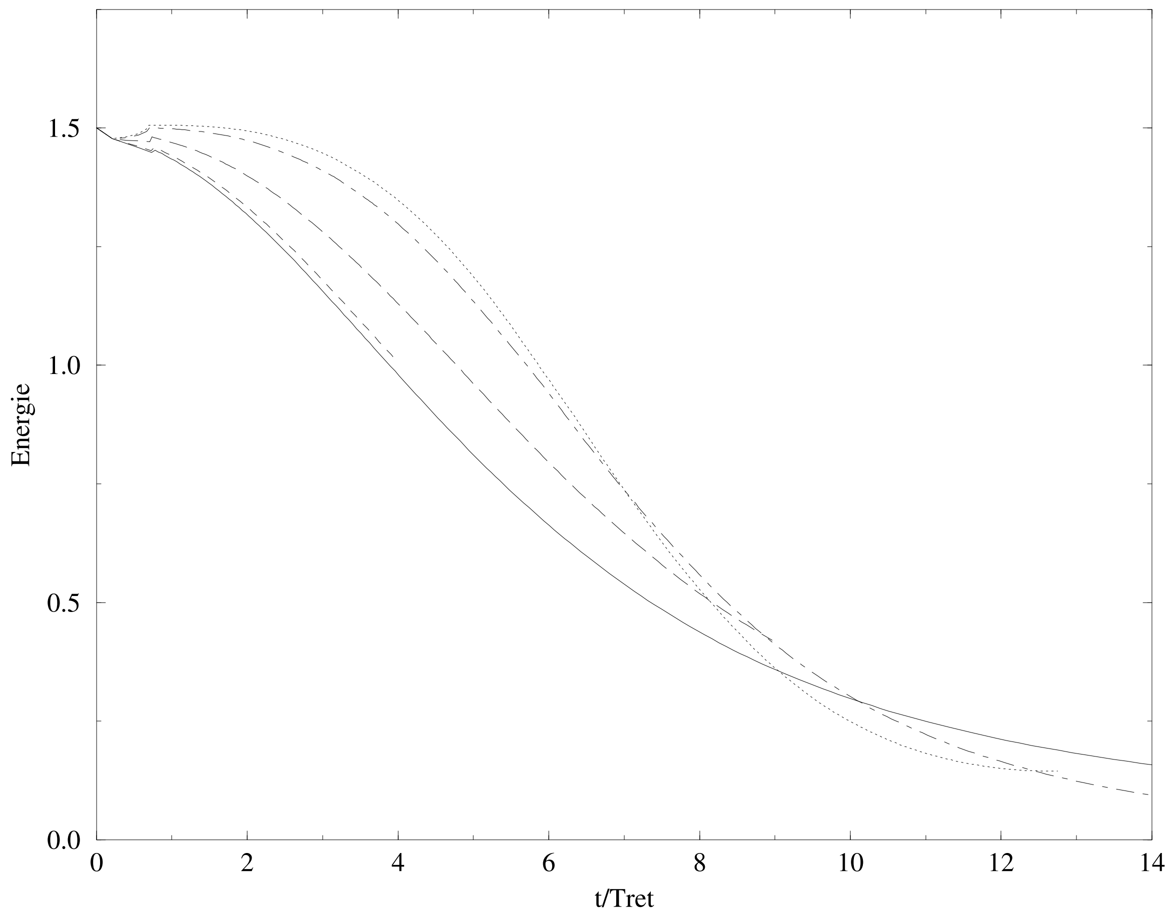


FIG. 8.18: *Evolution de l'énergie, par méthode VIC.* (——): $\nu = 0.005$. (- - - -): $90\% \cdot \nu$. (— — —): $50\% \cdot \nu$. (– · –): $10\% \cdot \nu$. (·····): *Ecoulement non-visqueux.*

Chapitre 9

Simulation des Grandes Echelles

Avant-propos

Pour un écoulement à faible viscosité, il devient impossible de simuler explicitement toutes les échelles de l'écoulement des plus petites aux plus grandes. Dans ces conditions, il convient de mettre en oeuvre une autre technique de simulation permettant de ne pas devoir calculer toutes les échelles de la turbulence tout en ne négligeant pas l'influence des échelles non calculées. C'est dans ce cadre que fût introduite la LES où des modèles de plus en plus raffinés permettant de tenir compte de l'influence des petites structures ont commencé à voir le jour. Nous porterons notre intérêt dans la description des larges échelles, qui contiennent l'information désirée concernant les transferts turbulents; ce sont ces larges échelles qui seront simulées. La simulation des grandes échelles aura besoin de représenter les échanges d'énergie avec les petites échelles qui ne sont pas explicitement simulées.

La sélection des échelles qui est à la base de la technique de la simulation des grandes échelles est une séparation entre grandes et petites échelles. La définition de ces deux catégories est soumise à la détermination d'une longueur de référence, dite longueur de coupure. Les grandes échelles ou échelles résolues sont celles qui présentent une taille caractéristique supérieure à la longueur de coupure et les petites échelles sont celles qui présentent une taille inférieure.

Ces dernières seront prises en compte par le biais d'une statistique appelée modèle sous-maille.

9.1 Formalisation mathématique de la séparation d'échelle

La notion de séparation d'échelle introduite précédemment va maintenant être formalisée de manière à permettre la manipulation des équations de Navier-Stokes et la dérivation des modèles sous-maille. Remarquons que notre discours se limitera aux filtres homogènes et isotropes, c'est-à-dire invariants sous rotation ou translation, de façon à permettre une analyse plus aisée.

9.1.1 Définition

La séparation d'échelles est réalisée par l'application d'un filtre passe-haut en échelles, c'est-à-dire un filtre passe-bas en fréquence, à la solution exacte. Ce filtrage est représenté mathématiquement dans l'espace physique par un produit de convolution . De cette manière, la partie résolue $\overline{\phi}(x,t)$ d'une variable $\phi(x,t)$ est définie formellement par

$$\overline{\phi}(x,t) = \phi(x,t) * G(x,)$$

où * désigne le produit de convolution et G désigne le noyau caractéristique du filtre utilisé.

9.1.2 Application aux équations de Navier-Stokes

9.1.2.1 Equations filtrées

Rappelons que les équations de Navier-Stokes, écrites sous les hypothèses de notre cadre de travail sont :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\
\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\nu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})
\end{aligned}$$

L'application d'un filtre gaussien à ces équations s'écrit, en tenant compte de la propriété de commutation avec la dérivation

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\nu(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}))\end{aligned}$$

Remarquons d'emblée que l'équation de quantité de mouvement fait apparaître le terme non-linéaire $u_i u_j$ qui devra, pour que cette équation soit utilisable, être exprimé en fonction de u et de u' qui sont désormais les seules inconnues du problème où:

$$u' = u - \overline{u}$$

9.1.2.2 Décomposition de Léonard

Léonard propose de récrire le terme non-linéaire sous la forme d'une triple somme

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\overline{u_i}\,\overline{u_j}} + \overline{\overline{u_i} u'_j} + \overline{\overline{u_j} u'_i} + \overline{u'_i u'_j}$$

Notre point de vue consiste à considérer que les termes doivent pouvoir être évalués directement à partir des variables filtrées. Or, le terme $\overline{\overline{u_i}\,\overline{u_j}}$ n'est pas calculable directement car il nécessite une seconde application du filtre. Pour pallier à ce problème, Léonard propose la décomposition supplémentaire

$$\overline{\overline{u_i}\,\overline{u_j}} = L_{ij} + \overline{u_i}\,\overline{u_j}$$

En utilisant cette nouvelle décomposition, l'équation de quantité de mouvement filtrée devient :

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i}\,\overline{u_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\nu\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}$$

Le tenseur de sous-maille τ, qui regroupe maintenant tous les termes qui ne s'expriment pas directement à partir de u, prend la forme

$$\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i}\,\overline{u_j}$$

9.2 Cadre de la modélisation

Comme déjà dit, nous réduisons le coût calcul en appliquant un filtre aux équations de Navier-Stokes. Toutefois, pour que la dynamique des échelles résolues demeure correcte, les termes de sous-maille doivent être pris en compte. En effet, il s'agira de rendre compte des interactions avec les échelles résolues via une modélisation adéquate. La qualité de la simulation dépendra alors de la fidélité avec laquelle le modèle de sous-maille rendra compte de ces interactions.

La modélisation sous-maille est classiquement effectuée en prenant l'hypothèse suivante.

Hypothèse: Si les échelles de sous-maille existent alors l'écoulement est localement turbulent

Remarquons enfin que nous nous concentrons sur une modélisation fonctionnelle, c'est-à-dire que nous ne modélisons pas le tenseur τ lui-même mais plutôt ses effets sur la vitesse filtrée. L'hypothèse de fermeture du modèle peut, dans ces conditions s'écrire

$$\nabla \cdot \tau = \mathcal{H}(u)$$

9.3 Modèle LES utilisé

9.4 Simulation d'un écoulement non-visqueux par LES

Afin de se familiariser avec le modèle LES, et d'en déterminer l'influence sur l'évolution de l'écoulement, nous considérons la configuration la plus élémentaire : l'écoulement non-visqueux.

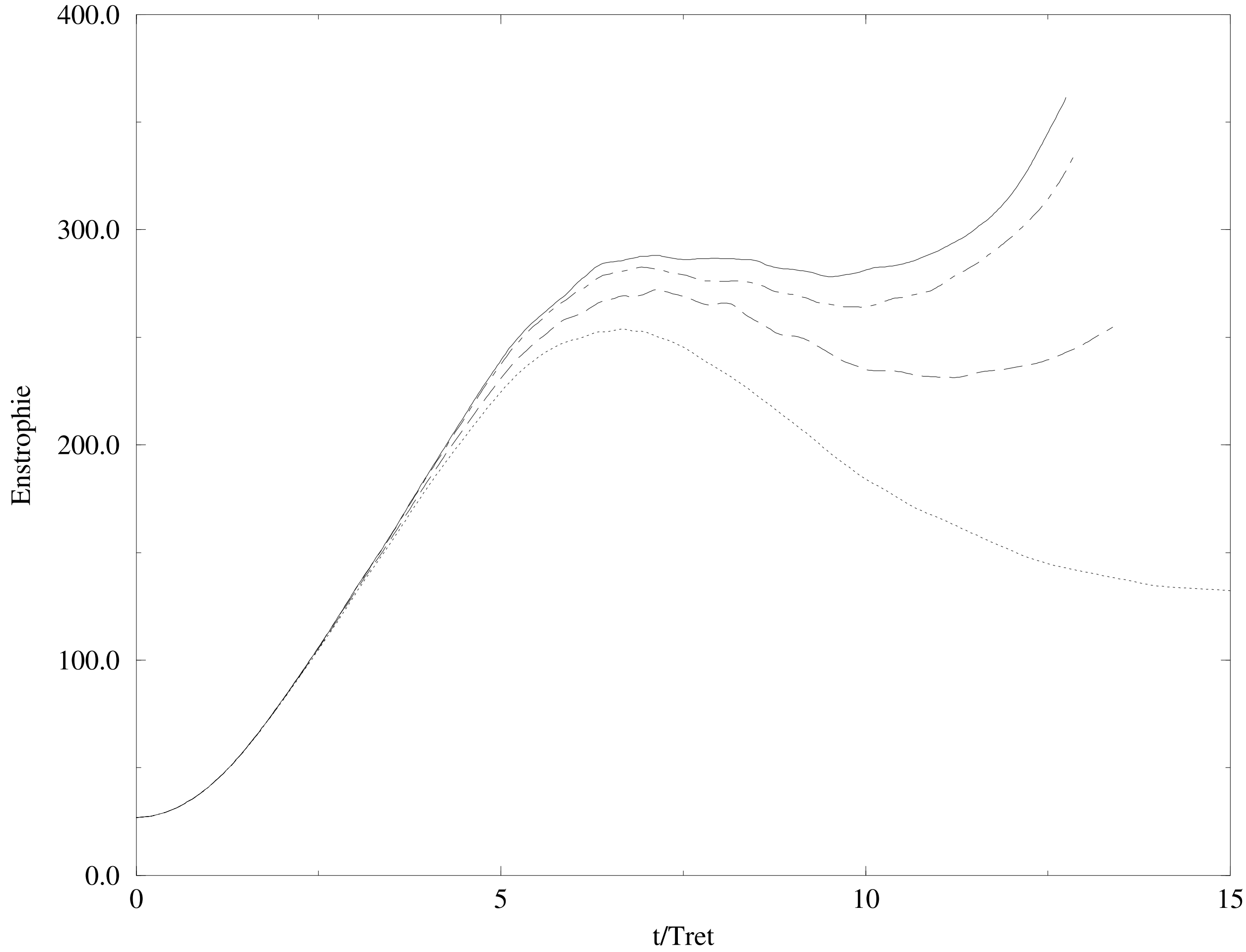


FIG. 9.1: *Evolution de l'enstrophie par LES, en écoulement non-visqueux. (——): Méthode VIC, $coef_{LES}$ = 0. (− · −): Méthode VIC, $coef_{LES}$ = 0.1. (− − −): Méthode VIC, $coef_{LES}$ = 0.5. (·····): Méthode VIC, $coef_{LES}$ = 1.*

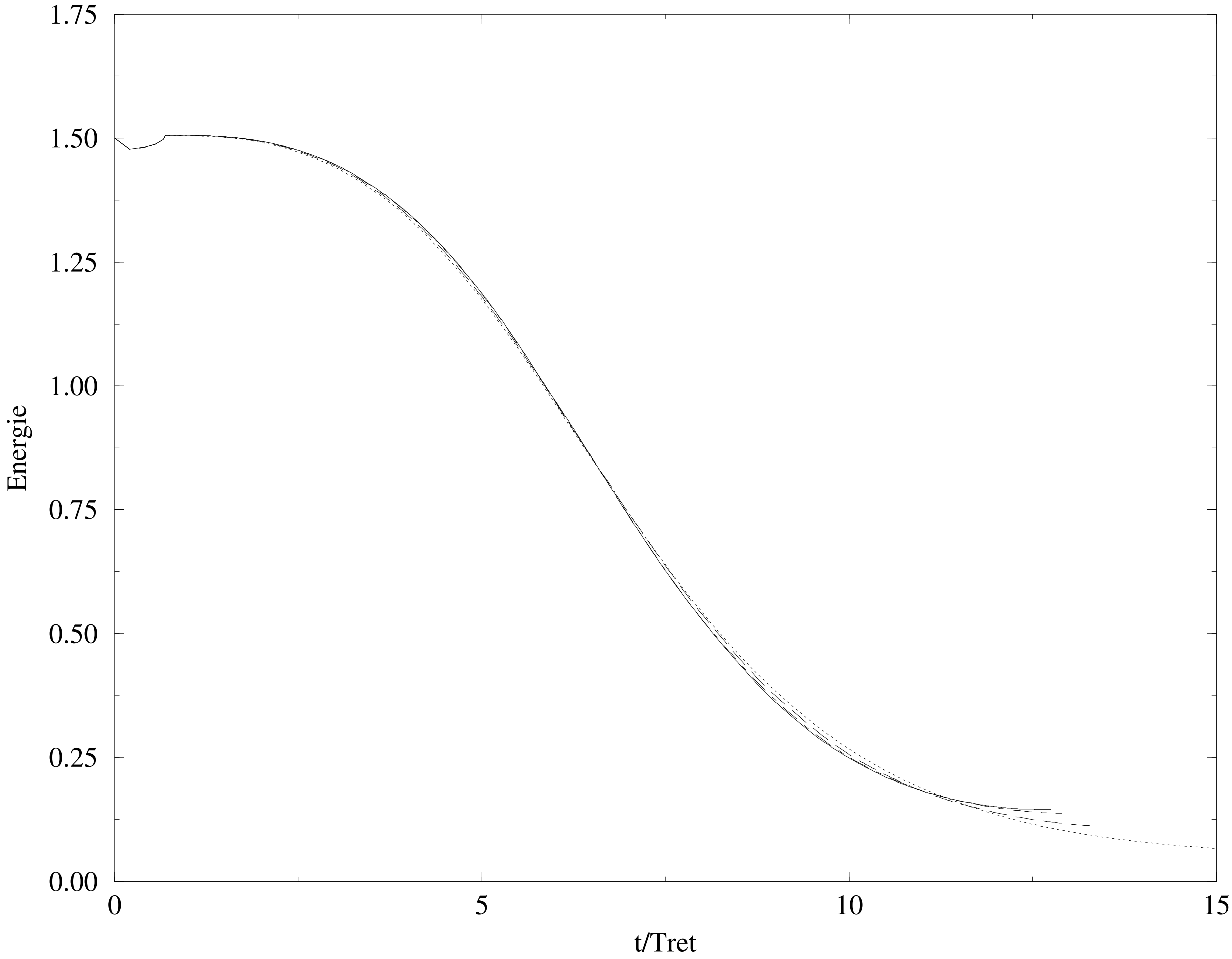


FIG. 9.2: *Evolution de l'énergie par LES, en écoulement non-visqueux. (——): Méthode VIC, $coef_{LES} = 0$. $(- \cdot -)$: Méthode VIC, $coef_{LES} = 0.1$. $(- - -)$: Méthode VIC, $coef_{LES} = 0.5$. $(\cdots\cdots)$: Méthode VIC, $coef_{LES} = 1$.*

Chapitre 10

Annexe 1

10.1 Schéma d'intégration Runge-Kutta d'ordre 2

Considérons l'équation différentielle

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= f(t, \mathbf{x}(t)) && (10.1)\\
\mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 && (10.2)
\end{aligned}$$

La fonction f est connue et la condition initiale x_0 est une donnée du problème. Les formules de Runge-Kutta du second ordre ont la forme générique suivante:

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \triangle t(a\mathbf{k}_1 + b\mathbf{k}_2)$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(n\triangle t, \mathbf{x}^n) && (10.3)\\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(n\triangle t + p\triangle t, \mathbf{x}^n + q\triangle \mathbf{k}_1) && (10.4)
\end{aligned}$$

Il s'agit de déterminer les constantes a, b, p, q de sorte que l'erreur locale de discrétisation soit la plus petite possible. Nous considérerons le cas particulier où:

$$a = b = \frac{1}{2}\ , \quad p = q = 1$$

10.2 Calcul de la constante du noyau P.S.E

Considérons le noyau du type

$$\eta(\rho) = \frac{C}{(\rho^2+1)^{9/2}} \tag{10.5}$$

Déterminons la constante C afin de vérifier les moments (2.10).

Il faut vérifier que

$$\int_\Omega \mathbf{x}^\alpha \eta(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 2 \;\; si\ 1 \leq |\alpha| \leq R+1, \alpha \in (...,2,...) \tag{10.6}$$

où α est un multi-indice.

Appliquons la condition (10.6) à (10.5), en prenant $\alpha = (2,0,0)$

$$\int_\Omega x^2 \frac{C}{(\rho^2+1)^{9/2}}\, dx\, dy\, dz = 2$$

Cette contraine doit être également vérifée pour $\alpha = (0,2,0)$ et $\alpha = (0,0,2)$. En sommant les trois intégrales, nous obtenons

$$\int_\Omega (x^2+y^2+z^2) \frac{C}{(\rho^2+1)^{9/2}}\, dx\, dy\, dz = 6$$

En coordonnées sphériques,

$$C \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^2}{(\rho^2+1)^{9/2}}\, \rho\, d\rho\, sin\theta\, d\theta\, d\phi = 6$$

Sachant que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(ax^2+bx+c)^{n+3/2}} = \frac{n!}{(2n+1)!! \cdot \sqrt{c}\,(\sqrt{ac}+b)^{n+1}}$$

où $a \geq 0$, $c > 0$, $b > -\sqrt{ac}$, nous déduisons

$$C = \frac{7!!}{4\pi} = \frac{105}{4\pi}$$

Un raisonnement analogue est appliqué au noyau

$$\eta(\rho) = \frac{C}{1 + (\rho)^{10}} \tag{10.7}$$

ce qui nous a permis de trouver la valeur de la constante

$$C = \frac{15}{\pi^2}$$

10.3 Résolution de l'equation de Poisson dans l'espace de Fourier

Rappelons notre problème initial:

Pour un champ de vorticité ω^n connu sur la grille, déduire le champ de vitesse associé, à l'aide de

$$\nabla^2 \psi^n = -\omega^n \tag{10.8}$$

$$\nabla \times \psi^n = \mathbf{u}^n \tag{10.9}$$

En applicant une transformée de Fourier aux équations (10.8) et (10.9), nous obtenons

$$-k^2 \hat{\psi}^n = -\hat{\omega}^n \tag{10.10}$$

$$ik \times \hat{\psi}^n = \hat{\mathbf{u}}^n \tag{10.11}$$

De manière équivalente, nous résolvons dans l'espace spectrale,

$$\frac{ik \times \hat{\omega}^n}{k^2} = \hat{\mathbf{u}}^n \tag{10.12}$$

Chapitre 11

Annexe 2 : Méthode Spectrale

11.1 Les équations de Navier-Stokes dans l'espace de Fourier

La transformée de Fourier spatiale d'un champ $u(x,t)$, défini en tout point x de l'espace et à tout instant t, s'exprime par:

$$T.F.\,[\mathbf{u}](\mathbf{k},t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k},t) = (\frac{1}{2\pi})^3 \int_{R^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, u(\mathbf{x},t)\, d\mathbf{x} \tag{11.1}$$

avec $\mathbf{k}$ désignant le vecteur d'onde. Lorsque $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ représente le champ de vitesse d'un fluide incompressible et newtonien, l'écoulement est régi par les équations de conservation suivantes:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\,\nabla^2\mathbf{u} \tag{11.2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{11.3}$$

où p représente le champ de pression, ρ_0 la densité et ν la viscosité cinématique du fluide. En appliquant la transformée de Fourier au système précédent, on obtient les équations du mouvement dans l'espace spectral:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + T.F.\,[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}] = -i\frac{\hat{p}}{\rho_0}k - \nu k^2\hat{\mathbf{u}} \tag{11.4}$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{11.5}$$

En se servant de l'équation de continuité dans l'espace physique, on peut réécrire autrement les termes non-linéaires de l'équation de Navier-Stokes:

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) \tag{11.6}$$

si bien que les termes équivalents dans l'espace spectral à ces termes convectifs proviendront du produit de convolution:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + i k_j \int_{p+q=k} \hat{u}_i(p)\, \hat{u}_j(q)\, dp = -i \frac{\hat{p}}{\rho_0} k_i - \nu\, k^2 \hat{u}_i \tag{11.7}$$

Par ailleurs, l'équation de continuité implique que le vecteur vitesse $\hat{u}$ est orthogonal au vecteur d'onde. C'est pourquoi, la dérivée temporelle $\partial\hat{u}/\partial t$, ainsi que le terme visqueux $-\nu k^2 \hat{u}$ sont également dans le plan orthogonal à k, qu'on notera $k^{\perp}$. Par contre, la force de pression est colinéaire au vecteur d'onde k. Cette nouvelle propriété de la transposée de l'équation de Navier-Stokes dans l'espace des vecteurs d'onde, nous incite à projeter l'équation (11.7) dans le plan $k^{\perp}$. Les champs de pression et de vitesse seront par la suite découplés. Pour ce faire, on définit tout d'abord le tenseur de projection sur le plan $k^{\perp}$ par ses composantes:

$$\mathcal{P}_{ij}(k) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \tag{11.8}$$

En projetant l'équation (11.7) sur le plan $k^{\perp}$, on obtient:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \nu k^2 \hat{u}_i = -i k_m \mathcal{P}_{ij}(k) \int_{p+q=k} \hat{u}_j(p) \hat{u}_m(q) dp \tag{11.9}$$

Ce découplage se fait au dépens de la simplicité relative des termes non-linéaires de (11.7), formés par les interactions entre des triades de modes (p, q, k) tels que $p + q = k$. En pratique, les schémas de résolution numérique des équations de conservation dans l'espace spectral ne peuvent utiliser que des transformées de Fourier discrètes. D'une manière générale, si les conditions aux limites relatives à un écoulement incompressible sont relativement simples (périodiques, glissement libre), le problème est transposable dans l'espace spectral et le traîtement de la continuité à l'aide de solveurs Poisson dans l'espace physique revient à une simple projection dans l'espace de Fourier. Cet aspect constitue un des avantages de traîter la turbulence dans l'espace spectral.

11.2 Transformée de Fourier discrète

Dans le cadre de la turbulence homogène isotrope, il est licite de penser que des structures cohérentes de tailles et de topologie variables sont réparties dans tout l'espace, avec une certaine homogénéité statistique. La simulation sur un domaine bien choisi de taille caractéristique L suffit à fournir une image fidèle des propriétés statistiques de l'écoulement. Cette homogénéité statistique conduit à supposer la périodicité spatiale des divers champs associés à cette THI. On peut donc développer ces champs périodiques, de périodes $2\pi/L$, en série de Fourier. Par ailleurs, la médiation ensembliste dont l'usage pratique est difficilement réalisable, peut-être substitué par une moyenne spatiale dans le domaine de calcul.

En pratique, il faut se contenter d'une transformation de Fourier discrète (TFD). Le mode le plus élevé de cette transformation constitue en soi un mode de coupure associé à un filtrage des petites échelles turbulentes.

La TFD d'un champ $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, défini dans l'espace, s'exprime de la manière suivante:

$$\hat{\mathbf{f}}_N(\mathbf{k}_{ijk}, t) = \frac{1}{N^3} \sum_{l,m,n=0}^{N-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{lmn}, t) e^{-i(\mathbf{k}_{ijk} \cdot \mathbf{x}_{lmn})} \tag{11.10}$$

avec

$$\mathbf{x}_{lmn} = [x_1(l), x_2(m), x_3(m)] \ et \ \mathbf{k}_{ijk} = [k_1(i), k_2(j), k_3(k)]$$

Les points de l'espace physique intervenant dans la somme sont appelés les points de collocation:

$$x_p(q) = \frac{qL}{N} \qquad pour\ 1 \leq p \leq 3\ et\ 0 \leq q \leq N$$

et le vecteur d'onde doit être construit à partir de la fréquence spatiale de l'écoulement, $2\pi/L$:

$$k_p(q) = \frac{2\pi}{L} q \qquad pour\ 1 \leq p \leq 3\ et\ -\frac{N}{2} \leq q \leq \frac{N}{2} - 1$$

Inversément:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{lmn}, t) = \sum_{i,j,k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{\mathbf{f}}_N(\mathbf{k}_{ijk}, t) e^{i(\mathbf{k}_{ijk} \cdot \mathbf{x}_{lmn})} \tag{11.11}$$

Cette transformation inverse se fait à l'aide de schéma FFT (Fast Fourier Transfom) dont la performance conditionne fortement la rapidité des calculs.

Désormais, les composantes des vecteurs d'ondes et des points de collocations seront adimensionnalisés par la largeur du domaine de calcul. Ce dernier aura la forme d'un cube de côtér L. Le spectre d'énergie sera donc discrétisé sur les modes $k = 1$ à $N/2$.

11.3 Le code Spectral

Considérons l'équation d'évolution du champ de vitesse à R_e élevé:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_N}{\partial t} + FFT[\omega_N \times \mathbf{u}_N] = -i\frac{\mathbf{k}}{\rho_0}\hat{p}_N^{tot} - \nu \mathbf{k}^2 \hat{\mathbf{u}}_N \tag{11.12}$$

avec

$$\hat{p}_N^{tot} = \hat{p}_N + \rho_0 \frac{\hat{\mathbf{u}}_N^2}{2} \text{ et } \omega_N = \nabla \times \mathbf{u}_N$$

Le fait d'indicer les champs par N relate l'influence de la paramétrisation des petites échelles et l'usage de l'hypothèse de périodicité spatiale dont la conséquence pratique est la possibilité de développer les champs en série de Fourier. Comme il a déja été signaler, l'équation (11.12) doit être projetée sur le plan $k^{\perp}$ pour que les champs de pression et de vitesse soient découplés:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) \hat{\mathbf{u}}_N = \mathcal{P}(k) : [FFT[\mathbf{u}_N \times \omega_N]] \tag{11.13}$$

où $\mathcal{P}$ désigne le tenseur de projection sur $k^{\perp}$ défini par (11.8). Une fois que le champ de vitesse sera déterminé, le champ de pression s'en déduit par l'équation suivante:

$$-i\frac{\mathbf{k}}{\rho_0}\hat{p}_N^{tot} + \mathbf{k} \cdot [FFT\,[\mathbf{u}_N \times \omega_N\,]] = 0 \tag{11.14}$$

Afin d'alléger les notations, les termes non-linéaires ont été écrits à partir des champs dans l'espace physique, tandis que les calculs se déroulent dans l'espace spectral. Le code utilise plutôt l'expression suivante pour les termes non-linéaires: $FFT\,[\,FFT^{-1}[\hat{\mathbf{u}}_N] \times FFT^{-1}[\hat{\omega}_N]\,]$. Sachant que $\hat{\omega}_N = ik \times \hat{\mathbf{u}}_N$, aucune dérivée spatiale n'intervient dans l'équation (11.13) et la résolution numérique ne nécessite plus qu'une intégration temporelle.

L'algorithme d'avancement temporel combine une méthode explicite de Runge-Kutta d'ordre 3 où le pas de temps $\triangle t$ est découpé en trois sous-pas de temps et une méthode de "Time Splitting" où le calcul de chaque sous-pas de temps se fait en deux étapes:

- Une première étape où le champ de vitesse, est évalué sans gradient de pression:

$$\mathbf{u}_*^i = \mathbf{u}^{i-1} + \left\{\alpha_i F(\mathbf{u}^{i-1}) + \beta_i F(\mathbf{u}^{i-1})\right\}$$

où

$$F(\mathbf{u}^i) = -(\mathbf{u}^i \cdot \nabla)\mathbf{u}^i + \nu \nabla^2 \mathbf{u}^i$$

Ces relations soint volontairement exprimées dans l'espace physique pour en simplifier l'écriture. L'indice * indique que le champ est compressible et $i = 1, 2, 3$ désigne le sous-pas de temps ($i - 2$ est ignoré pour $i = 1$).

• La seconde étape dans le calcul d'un sous-pas de temps consiste à rendre incompressible le champ de vitesse déterminé précédemment en lui retranchant sa divergence. Ce qui correspond en fait à la projection sur le plan $k^{\perp}$.

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{u}_*^i - \nabla \cdot \mathbf{u}_*^i \text{ d'où } \nabla \mathbf{u}^i = 0$$

Les constantes α_i et β_i sont choisies de façon à ce que $u(t + \triangle t)$ soit évalué avec une précision d'ordre 3.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{3} & \beta_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= \frac{15}{16} & \beta_2 &= -\frac{5}{9} \\ \alpha_1 &= \frac{8}{15} & \beta_3 &= -\frac{152}{128} \end{aligned} \tag{11.15}$$

Bibliographie

[1] Batchelor G.K, 1969, The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press, Cambridge.

[2] Canuto C., M.Y. Hussaini, A. Quarteroni & T.A. Zang, 1988, Springer-Verlag, Berlin.

[3] Cerutti S. & Meneveau C., 1998, Intermittency and relative scaling of subgrid-scale energy dissipation in isotropic turbulence, Phys. Fluids, Vol. 10, 928-936.

[4] Chorin A.J, 1994, Vorticity and Turbulence, Springer, Berlin.

[5] Cottet G.H. & Koumoutsakos P., Vortex methods: theory and practice, Cambridge University Press.

[6] Cottet G.H., 1996, Artificial viscosity models for vortex and particle methods, J. Comp. Phys., 127.

[7] Cottet G.H., Anisotropic subgrid-scale numerical schemes for Large Eddy Simulations of turbulent flows.

[8] Cottet G.H., 1990, A Particle-Grid Superposition Method for the Navier-Stokes Equations, Academic Press, Vol 89, 301-318.

[9] Cottet G.H. & Brenier Y., 1995, Convergence of particle methods with random rezoning for the 2D Euler an Navier-Stokes equations, SIAM J. Num. Anal., 32.

[10] Cousteix J., 1989, Turbulence et couche limite, Cepadues Edition, Toulouse.

[11] de Bruyn Kops S.M. & Riley J.J., 1998, Direct numerical simulation of laboratory experiments in isotropic turbulence, Phys. Fluids, Vol. 10, 2125-2127.

[12] Fureby C., Tabor G., Weller H.G. & Gosman D., 1997, A comparative study of subgrid scale models in homogeneous isotropic turbulence, Phys. Fluids 9, 1416-1429.

[13] Hinze J.O., 1959, Turbulence, An introduction to its Mechanism and Theory, McGraw-Hill Book, New York.

[14] Jimenez J., 1993, Small-scales vortices in turbulent flows, in New Approaches and Concepts in Turbulence, 95-110, eds. T. Dracos & A. Tsinober Birkhauser, Bosel.

[15] Jimenez J., 1998, Turbulent velocity fluctuations need not be Gaussian, J. Fluid Mech. 376, 139-147.

[16] Jimenez J., Wray A.A, Saffman P.G & Rogallo R.S, 1993, TThe Structure of intense vorticity in isotropic turbulence, J. Fluid Mech.255, 65-90.

[17] Keiko K. Nomura & Gary K. Post, 1998, The structure and dynamichs of vorticity and rate of strain in imcompressible homogeneous turbulence, J. Fluid Mech.377, 65-97.

[18] Lemine M., 1998, Couplage de méthodes numériques em simulation directe d'écoulements incompressibles, Thèse de doctorat, Institut Joseph Fourier, Grenoble.

[19] Lesieur M., 1997, Turbulence in Fluids, 3nd edition, Kluwer, Dordrecht.

[20] Lesieur M., 1994, La Turbulence, Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble.

[21] Lesieur M., Ossia Sepand & Métais O., Infrared pressure spectra in 3D and 2D isotropic incompressible turbulence., Submitted to Phys. Fluids.

[22] Liu T., 1993, A note on the probability distribution of the dissipation rate in locally isotropic turbulence, Phys. Fluids A, Vol 5, 2234-2238.

[23] McComb W.D., 1990, The Physics of Fluid Turbulence, Clarendon Press Oxford, New York.

[24] Martin J., Ooi A., Chong M.S. & Soria J., Dynamics of the velocity gradient tensor invariants in isotropic turbulence, Phys. Fluids, Vol. 10, 2336-2346.

[25] Meneveau C., Lund T.S. & Cabot W.H., 1996, A Lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence, J. Fluid Mech. 319, 353-385.

[26] Moin P., 1991, A New Approach for Large Eddy Simulation of Turbulence and Scalar Transport, in New Approaches and Concepts in Turbulence, 331-339, eds. T. Dracos & A. Tsinober Birkhauser, Bosel.

[27] She Z-S., Jackson E. & Orszag S.A., 1990, Intermittent vortex structures in homogeneous isotropic turbulence, Letters to Nature, Vol. 344, 226-228.

[28] She Z-S., Jackson E. & Orszag S.A., 1991, Structure and dynamics of homogeneous turbulence: models and simulation, Proc. R. Soc. Lond. A 434, 101-124.

[29] Siggia E.D., 1981, Numerical study of small-scale intermittency in three-dimensional turbulence, J. Fluid Mech, Vol. 107, 375-406.

[30] Speziale C.G. & Bernard P.S., 1992, The energy decay in self-preserving isotropic turbulence revisited, J. Fluid Mech., 645-667.

[31] Sreenivasan K. R., 1998, An update on the energy dissipation rate in isotropic turbulence, Phys. Fluids, Vol. 10, 528-529.

[32] Vincent A. & Meneguzzi M., 1991, The Spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence, J. Fluid Mech.255, 1-20.

[33] Winckelmans G.S., Legat V., Jeanmart H. & Dantinne G., 1998, Hyperviscosity and Vorticity-Based Models for Subgrid Scale Modeling, Applied Scientific Research 59, 409-420.

[34] Winckelmans G.S. & Leonard A., 1993, Contribution to Vortex Particle Methods for Computation of Three-Dimensional Incompressible Unsteady Flows, J. Comp. Physics Vol 109, 247-273.

[35] Winckelmans G.S., Méthodes numériques en mécanique des fluides.