
4. Approximation par champ de phase

Approcher un mouvement par courbure moyenne

$$\partial_t u = \Delta u - \frac{\langle D^2 u \nabla u, \nabla u \rangle}{|\nabla u|^2}$$

par les solutions d'équations de réaction diffusion

$$\partial_t u_\varepsilon = \varepsilon \Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} W'(u_\varepsilon)$$

Moralement, u_ε est une fonction régulière qui varie rapidement sur un ε -voisinage du bord
 $\Gamma_t = \{\partial u = 0\}$

- Γ -convergence
- Fonctions BV et ensembles de Cacciopoli
- Le théorème de Modica–Mortola et son extension parabolique

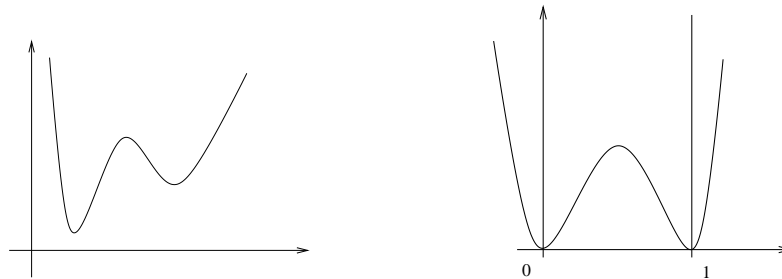
Des exemples en calcul des variation :

1. Transitions de phase :

On considère un fluide homogène isotherme dans un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^3$

$u : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ concentration du fluide. A l'équilibre $\min_{\int_{\Omega} u = V} \int_{\Omega} W(u) dx$

densité d'énergie $W : (0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ non convexe (Van der Waals)



Configurations préférées : interface minimale entre les phases

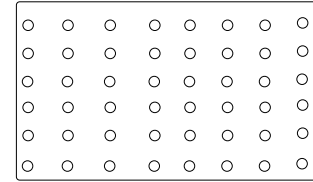
$$\min_{\int_{\Omega} u = V} \int_{\Omega} W(u) + \varepsilon^2 |\nabla u|^2 dx \quad \rightarrow \quad u_{\varepsilon} \equiv u(x) + u_1\left(\frac{\text{dist}(x, \Gamma)}{\varepsilon}\right)$$

Rescaling \rightarrow équipartition de l'énergie

$$\min_{\int_{\Omega} u = V} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} W(u) + \varepsilon |\nabla u|^2 dx$$

2. Homogénéisation de problèmes variationnels :

Milieu composite de conductivité $a(x/\varepsilon)$ a Y -périodique



$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x/\varepsilon)\nabla u_\varepsilon(x)) & = f \quad \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon & = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De manière équivalente

$$\min_{u=0 \text{ sur } \partial\Omega} E_\varepsilon(u), \quad E_\varepsilon(u) = \left(\int_{\Omega} a(x/\varepsilon) |\nabla u|^2 dx - 2 \int_{\Omega} f u dx \right)$$

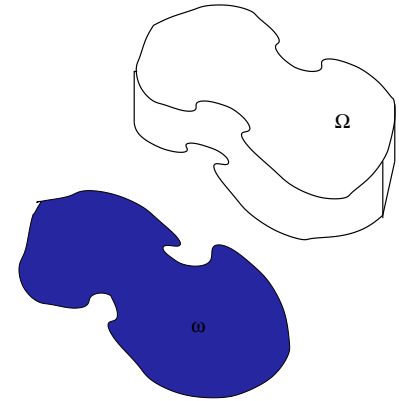
Problèmes dégénérés : domaines perforés

$$\min_{u=0 \text{ sur } \partial\Omega} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} a(x/\varepsilon) |\nabla u|^2 dx - 2 \int_{\Omega} f u dx \right)$$

3. Réduction de dimensions :

Théories asymptotiques des structures fines
(plaques, coques, films minces,...)

$$\Omega_\varepsilon = \omega \times (0, \varepsilon), \quad \min_{u=g} \text{SUR } \partial\omega \times (0, \varepsilon) F_\varepsilon(u)$$
$$F_\varepsilon(u) = \int_{\omega \times (0,1)} f(\partial_1 u, \partial_2 u, \partial_3 u / \varepsilon)$$



4. Limites continues de réseaux atomiques :

Réseau à N points reliés par des potentiels d'interaction ψ_j , pas du réseau λ_n

Energie (en dimension 1) $E_n(u) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-j} \lambda_n \psi_j \left(\frac{u_{i+j} - u_i}{j \lambda_n} \right)$

Pb. variationnel $\min_{u+BC} E_n(u) - \sum_{i=0}^n \lambda_n u_i f_i$

5. Segmentation d'images, fracture :

Fonctionnelle de Mumford–Shah : combinaison d'énergie volumique et surfacique

$$E(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + c_1 \mathcal{H}^{n-1}(K) + c_2 \int_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 dx$$

g = fonction donnée (image bruitée)

Approche Ambrosio–Tortorelli :

$$E_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega} v^2 |\nabla u|^2 dx + c/2 \int_{\Omega} \varepsilon |\nabla v|^2 + (1 - v)^2 / \varepsilon dx \\ + c_2 \int_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 dx$$

Déf. Γ -convergence : (De Giorgi–Franzoni, 75)

(X, d) espace métrique. $f_n : X \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}, n \geq 1$

$$\Gamma^- \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \inf \{ \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \mid x_n \rightarrow x \}$$

$$\Gamma^- \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \inf \{ \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \mid x_n \rightarrow x \}$$

$$\Gamma^+ \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup \{ \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \mid x_n \rightarrow x \}$$

$$\Gamma^+ \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup \{ \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \mid x_n \rightarrow x \}$$

On dit que la suite (f_n) Γ^- converge si

$$\forall x \in X, \quad \Gamma^- \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = \Gamma^- \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$$

La valeur commune s'appelle la Γ^- -limite

Exemples :

1.

$$f_n(x) = \sin(nx) \rightarrow \begin{cases} \Gamma^- \lim f_n = -1 \\ \Gamma^+ \lim f_n = 1 \end{cases}$$

2.

$$f_n(x) = nxe^{-2n^2x^2} \rightarrow \begin{cases} \Gamma^- \lim f_n(x) = 0 & x \neq 0 \\ \Gamma^- \lim f_n(0) = \frac{-1}{2\sqrt{e}} \end{cases}$$

Propriétés des Γ -limites

1. Les fonctions $x \rightarrow \Gamma^- \lim \inf f_n(x), \Gamma^- \lim \sup f_n(x_n)$ sont sci
2. Les Γ^\pm -limites sont uniques et stables par passage aux sous-suites
3. Connection entre Γ^+ et Γ^- -limites

$$\Gamma^+ \lim \inf f_n(x_n) = -\Gamma^- \lim \sup [-f_n](x_n)$$

4. (f_n) Γ^- -converge vers f ssi

– critère 'inf'

$$\forall (x_n) \subset X, \quad x_n \rightarrow x, \quad \lim \inf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \geq f(x)$$

– critère 'sup'

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \quad \exists (x_n) \subset X, x_n \rightarrow x, \quad \text{tq} \quad \lim \sup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \leq f(x) + \varepsilon$$

Propriétés des Γ -limites (2)

5. Si $f_n \sim f$ alors $\Gamma^- \lim f_n = f_*$ (enveloppe sci de f)

6. Si $f_n \rightarrow f$ uniformément localement, alors $\Gamma^- \lim f_n = f_*$

7. Si $g : X \rightarrow \mathbf{R}$ est continue, alors

$$\Gamma^- \lim(f_n + g) = \Gamma^- \lim(f_n) + g$$

8. **Compacité :**

si X est séparable, alors toute suite (f_n) a une sous-suite qui Γ^- -converge

Intérêt : la Γ -convergence définit la topologie 'minimale' qui fait opérer la méthode directe du calcul des variations :

Supposons qu'on cherche $\min_{x \in X} f(x)$ où f est une fonction qu'on peut approcher par des fonctions f_n

Est-ce que $\min_{x \in X} f_n(x) \rightarrow \min_{x \in X} f(x)$?

Propriétés variationnelles des Γ -limites

Thm : Soit f_n une suite qui Γ^- -converge vers f

On suppose que

1. $\forall n, f_n$ sci
2. $\exists K \subset X, K$ compact tq $\inf_X f_n = \inf_K f_n$

Alors, si $(x_n) \subset X$ sont des points qui minimisent f_n , toute valeur d'adhérence de (x_n) est un minimiseur de f et

$$\min_X f = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_X f_n$$

En particulier, si f a un unique minimiseur x , alors $x_n \rightarrow x$.

Stabilité des solutions de viscosité par Γ -convergence

Thm : Soit $A \subset \mathbf{R}^n$, localement compact

Soit (u_n) une suite de fonctions scs $u_n : A \longrightarrow \mathbf{R}$ telles qu'au sens des solutions de viscosité

$$E_n(x, u_n(x), \nabla u_n(x), D^2 u_n(x)) \leq 0 \text{ dans } A$$

On suppose que $u = \Gamma^+ \limsup u_n > -\infty$ dans A

Alors, au sens des solutions de viscosité, on a

$$E(x, u(x), \nabla u(x), D^2 u(x)) \leq 0$$

dans $A \cap \{u < \infty\}$, avec

$$E = \Gamma^- \liminf_{n \rightarrow \infty} (E_n)_*$$

Fonctions BV et ensembles de Cacciopoli

Déf : $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, ouvert et f intégrable

$$|Df| = \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div}(g), \quad g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbf{R}^n), \quad |g(x)| \leq 1 \quad p.p \right\}$$

$|Df|$ s'appelle la **variation totale** de f

f est une fonction à variation bornée dans Ω si $|Df| < \infty$

Exemples :

1. $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $|Df| = \int_{\Omega} |\nabla f|$

2. $E \subset \mathbf{R}^n$, de frontière \mathcal{C}^2 et $f = \chi_E$

$$\int_{\Omega} \chi_E \operatorname{div}(g) = \int_{\partial E} g \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \rightarrow \quad |D\chi_E| = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega)$$

Le périmètre de $E \subset \Omega$ (borélien) est défini par

$$P(E, \Omega) = |D\chi_E| = \sup\left\{ \int_E \operatorname{div}(g), \quad g \in \mathcal{C}_c^1(\Omega), \quad |g(x)| \leq 1 \text{ p.p.} \right\}$$

E est un ensemble de Cacciopoli si $P(E, \Omega) < \infty$

1. $\Omega \subset \Omega' \rightarrow P(E, \Omega) \leq P(E, \Omega')$

2. $P(E_1 \cup E_2, \Omega) \leq P(E_1, \Omega) + P(E_2, \Omega)$

3. Si $|E| = 0$, alors $P(E, \Omega) = 0$ et

$$|E_1 \Delta E_2| = 0 \rightarrow P(E_1, \Omega) = P(E_2, \Omega)$$

Thm : Semi-continuité de la variation totale

Soit (f_n) une suite de fonctions de $BV(\Omega)$ telle que $f_n \rightarrow f$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$

Alors $|Df| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |Df_n|$

Thm : Formule de la co-aire

- $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ lipschitzienne, alors

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla f| = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\{f = t\}) dt$$

- $f \in BV(\Omega)$, $E_t = \{x \in \Omega, f(x) > t\}$, alors

1. E_t est un ensemble de Cacciopoli (pour L^1 -p.p. t)

2. $|Df(\Omega)| = \int_{-\infty}^{\infty} |D\chi_{E_t}| dt$

3. Réciproquement, si $f \in L^1(\Omega)$ et $\int_{-\infty}^{\infty} |D\chi_{E_t}| dt < \infty$, alors $f \in BV(\Omega)$

Equations de reaction–diffusion et champ de phase

On s'intéresse au comportement asymptotique des solutions u_ε de

$$\begin{aligned}\partial_t u_\varepsilon &= \Delta u_\varepsilon - W'(u_\varepsilon)/\varepsilon^2 & (x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, T) \\ u_\varepsilon(x, 0) &= \varphi(\bar{d}(x, E)/\varepsilon) & \varphi(s) = \frac{e^{\sqrt{2}s} - 1}{e^{\sqrt{2}s} + 1}\end{aligned}$$

Cette équation est un flot de gradient pour les fonctionnelles

$$F_\varepsilon(u) = 1/2 \int_{\mathbf{R}^n} \varepsilon |\nabla u|^2 + W(u_\varepsilon)/\varepsilon \, dx, \quad u \in H_{loc}^1(\mathbf{R}^n)$$

W potentiel à deux puits $W(s) = (1 - s^2)^2/2$

Thm : (Chen, 96)

E ouvert borné, de frontière régulière. $T > 0$ le temps maximal d'existence d'un mouvement par courbure moyenne régulier Γ_t , $\Gamma_{t=0} = \partial E$

Alors

$$\begin{cases} u_\varepsilon \rightarrow -1 & \text{dans } \cup_{t \in [0, T)} \{t\} \times E_t \\ u_\varepsilon \rightarrow 1 & \text{dans } \cup_{t \in [0, T)} \{t\} \times (\mathbf{R}^n \setminus E_t) \end{cases}$$

Le thm de Modica–Mortola 77, ARMA 87

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} 1/2 \int_{\mathbf{R}^n} \varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 + W(u_\varepsilon)/\varepsilon \, dx, & \text{si } u \in H_{loc}^1(\mathbf{R}^n) \\ +\infty & \text{si } u \in L^2(\mathbf{R}^n) \setminus H_{loc}^1(\mathbf{R}^n) \end{cases}$$

Alors

$$\forall u \in L^2(\mathbf{R}^n), \quad \Gamma^- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \lambda |D\chi_E|(\mathbf{R}^n) & \text{si } u = \chi_E \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_0^1 \sqrt{W(s)} \, ds \\ &= 1/2 \min \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma'(s)|^2 + W(\gamma(s)) \, ds \quad \gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}), \quad \gamma(-\infty) = 1, \gamma(\infty) = 0 \right\} \end{aligned}$$

Approximation numérique par champ de phase :

Les résultats précédents justifient l'approximation du mouvement par courbure moyenne par la solution d'une équation de réaction diffusion

- maillage fixe d'un domaine de calcul dans lequel évolue l'interface
- $u_\varepsilon \in H^1$ régulière
- Résolution par différences finies ou volumes finis, 3D OK
- Choix des paramètres de discrétisation : $h \leq 3\varepsilon$ (stratégies adaptatives possibles)