

Projet de spécialité ENSIMAG 2A

Modélisation de la couche de glycocalyx par une condition aux limites effective

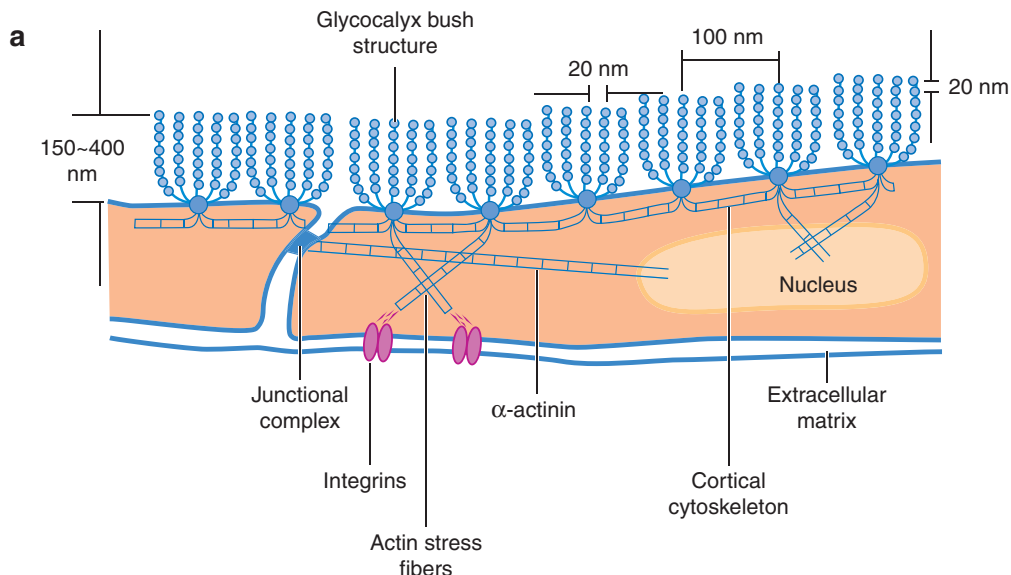
Emmanuel Maitre

22 avril 2015

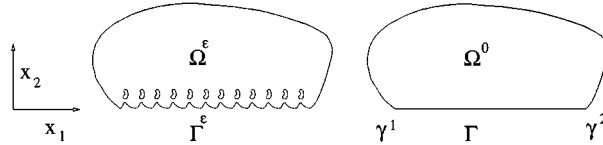
1 Thème général

L'écoulement des globules rouges dans les vaisseaux sanguins est un phénomène très complexe qui fait intervenir de nombreux éléments. Dans les vaisseaux de taille assez petite, le fluide porteur (plasma) peut être modélisé par une équation de Stokes, et les globules peuvent être considérées comme des capsules élastiques en interaction avec ce fluide. Des physiciens du laboratoire Li-Phy (Laboratoire interdisciplinaire de Physique) étudient ces modèles et en collaboration avec les mathématiciens appliqués essaient de développer des codes de calcul donnant des résultats quantitatifs qu'ils peuvent comparer aux expériences.

Un aspect en étude actuellement dans ce laboratoire concerne la couche de glycocalyx qui tapisse la paroi intérieure des vaisseaux sanguins. Cette couche est constituée d'une sorte de brosse de polymères filiformes (répartis en buissons, voire figure ci-dessous). On essaie de comprendre comment cette brosse influe sur l'écoulement du plasma sanguin et des globules rouges au moyen de simulation numériques. On pourrait penser effectuer un maillage du vaisseau sanguin tenant compte que la frontière est constituée de cette brosse de polymères. Mais la taille de ces polymères est si petite (voir figure) que cela nécessiterait de mailler extrêmement finement au voisinage de celle-ci, et on aboutirait à des systèmes à plusieurs milliards d'inconnues.



Une idée est de remplacer cette frontière Γ^ε oscillant très rapidement, à une échelle qu'on ne veut pas considérer, par une frontière Γ plane, sur laquelle on imposerait une condition aux limites particulière. Cette condition aux limites spéciale sera choisie de sorte que la solution du problème de Stokes sur le domaine Ω^0 à frontière plane avec cette condition sera proche de celle du problème posé sur le domaine Ω^ε à frontière irrégulière. C'est l'idée de la notion de condition aux limites effectives.



2 Sujet

Dans ce projet de spécialité, l'objectif sera de comprendre cette notion de condition aux limites effective en se basant sur un article de Yves Achdou, O. Pironneau, et F. Valentin¹. Ces auteurs montrent qu'on peut approcher la solution u^ε du problème de Stokes sur le domaine Ω^ε par la solution u du même problème sur le domaine Ω^0 (légèrement tronqué d'une hauteur $\delta > 0$ dans sa partie inférieure) à condition qu'on remplace la condition $u^\varepsilon = 0$ en bas par la condition

$$\varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial n} + \frac{1}{\chi + \delta} u_1 = 0, \quad u_2 = 0$$

où (u_1, u_2) sont les deux composantes de la vitesse, et χ s'obtient en résolvant un problème de Stokes sur une cellule élémentaire.

L'objectif principal est la compréhension et la programmation de la méthode dans FreeFEM++ en choisissant une forme d'oscillation de frontière périodique raisonnable pour représenter le glyco-calyx, et la comparaison en termes de coût de calcul et de précision par rapport à un calcul de Stokes avec un grand nombre de points de maillage. Les étapes seront donc

1. Description de la géométrie du domaine complexe et résolution de l'équation de Stokes avec un maillage fin, et condition de Dirichlet.
2. Compréhension de la méthode et calcul de la constante χ correspondant à la cellule élémentaire représentant l'oscillation.
3. Résolution du problème de Stokes sur un domaine rectangulaire avec la condition effective ci-dessus.
4. Comparaison et tests.

1. Disponible à l'adresse <http://ljk.imag.fr/membres/Emmanuel.Maitre/yaopf.v.pdf>