

## TD n°4. Connexité

**Exercice 1.** Les parties suivantes de  $\mathbb{R}^2$  sont-elles connexes par arcs ? connexes ?

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}, \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\},$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > 1 \text{ et } |y| > 1\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } y = 1 \text{ ou } y = -1\}$$

**Exercice 2.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques. Un homéomorphisme  $X \rightarrow Y$  est une bijection continue d'inverse continue (s'il existe un tel homéomorphisme, on dit que  $X$  et  $Y$  sont homéomorphes).

a) Montrer que les parties suivantes de  $\mathbb{R}^2$  sont homéomorphes

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\} \quad \text{et} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \text{ et } y > 0\}.$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^{-x}\} \quad \text{et} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \cos y\}.$$

b) Montrer que  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $[0, 1[$ ,  $[0, 1]$  et  $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$  sont deux à deux non homéomorphes.

c) Classer les lettres de l'alphabet (en majuscule) par classe d'homéomorphisme.

**Exercice 3.** Montrer qu'un plan privé d'un nombre fini de points est connexe.

**Exercice 4.** Soit  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Soit  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer qu'il existe  $z \in \mathbb{S}^1$  tel que  $f(z) = f(-z)$  (on pourra étudier le signe de la fonction  $z \mapsto f(z) - f(-z)$ ).

**Exercice 5.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. Montrer que  $f$  est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

**Exercice 6.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Montrer que  $f'$  satisfait le principe des valeurs intermédiaires i.e. l'image par  $f'$  d'un intervalle est un intervalle.

**Exercice 7.** Quelles sont les composantes connexes par arcs de  $\mathbb{Q}$  ? Quelles sont les composantes connexes par arcs de  $\{0, 1\}$  ? de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  ?

*Indication : On pourra montrer que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , l'application  $P_i$  qui a une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associe  $x_i$  est continue.*

**Exercice 8.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties fermées d'un espace métrique  $X$ . On suppose que  $A \cup B$  et  $A \cap B$  sont connexes par arcs, montrer que  $A$  et  $B$  sont connexes par arcs.

**Exercice 9.** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques non vides.

a) Montrer que  $X \times Y$  est connexe par arcs si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont connexes par arcs.

*Indication : On pourra commencer par montrer que  $\{x\} \times Y$  est connexe par arcs pour tout  $x \in X$ .*

b) Montrer que les composantes connexes de  $X \times Y$  sont de la forme  $A \times B$  où  $A$  et  $B$  sont des composantes connexes par arcs de  $X$  et de  $Y$ .

**Exercice 10.** Soit  $X := \{(x, \sin(\frac{1}{x}))\}_{x \in ]0, \infty[} \cup \{(0, y)\}_{y \in [-1, 1]} \subset \mathbb{R}^2$ .

a) Montrer que  $X$  est connexe.

b) Soit  $f = (f_1, f_2) : [0, 1] \rightarrow X$  une application telle que  $f_1$  soit continue,  $f_1(0) = 0$  et  $f_1(1) > 0$ . Soit  $t_0 = \sup f_1^{-1}(0)$ . Montrer que pour tout  $\alpha > 0$   $f_2([t_0, t_0 + \alpha]) = [-1, 1]$ . En déduire que  $f$  n'est pas continue et que  $X$  n'est pas connexe par arcs.

**Exercice 11.** On se place dans  $M_n(\mathbb{K})$ , où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , l'ensemble des matrices de taille  $n \times n$ .

a) Montrer que  $GL_n(\mathbb{R}) := \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0\}$  est un ouvert non connexe de  $M_n(\mathbb{R})$ .

b) Montrer que  $GL_n(\mathbb{C}) := \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(M) \neq 0\}$  est un ouvert connexe par arcs de  $M_n(\mathbb{C})$ .

*Indication : on pourra commencer par montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures sans zéro sur la diagonale est connexe, puis utiliser la triangularisation.*

c) Montrer que  $SL_n(\mathbb{R}) := \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$  est un fermé connexe par arcs de  $M_n(\mathbb{R})$ .

d) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de  $M_n(\mathbb{R})$  est connexe par arcs.

**Exercice 12.** Soit  $X$  un espace métrique compact. Soit  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de fermés connexes. Montrer que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$  est connexe.

**Exercice 13.** Montrer qu'un espace métrique  $(X, d)$  est connexe si et seulement si toute fonction continue  $X \rightarrow \{0, 1\}$ , où  $\{0, 1\}$  est muni de la distance discrète ( $\delta(x, y) = 1$  si  $x \neq y$ , 0 sinon) est constante. En déduire qu'une réunion quelconque de connexes ayant un point commun est connexe.

## Pour aller plus loin . . .

**Exercice 14.** Soit  $X$  un espace métrique connexe. Montrer que pour tout  $x, y \in X$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $x$  et  $y$  (i.e. il existe  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_0, \dots, x_n \in X$  tels que  $x_0 = x, x_n = y$  et  $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ ).

Montrer qu'un espace métrique  $X$  compact bien enchaîné (i.e.  $\forall x, y \in X$  et  $\forall \varepsilon > 0$  il existe une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $x$  et  $y$ ) est connexe.

**Exercice 15.** Soient  $A_n = \{(\frac{1}{n}, y, 0), 0 \leq y \leq 2n+1\}$ ,  $B_n = \{(0, y, 0), 2n-1 \leq y \leq 2n+1\}$  et  $C_n = \{(x, 2n, x(\frac{1}{n}-x)), 0 \leq x \leq \frac{1}{n}\}$  et  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cup B_n \cup C_n) \subset \mathbb{R}^3$ . Montrer que  $X$  est connexe mais n'est pas connexe par arc.

**Exercice 16.** Soit  $X$  un espace métrique compact et connexe. Montrer que l'ensemble des fermés non vides de  $X$ , muni comme dans l'exercice 13 de la feuille 4 de la distance

$$\delta(F_1, F_2) = \max(\sup_{x \in F_2} d(x, F_1), \sup_{x \in F_1} d(x, F_2)),$$

est connexe.

**Exercice 17.** Si  $(X, d)$  est un espace métrique, on munit l'espace  $\Omega X := \{f \in \mathcal{C}([0, 1], X) \mid f(0) = f(1)\}$  de la distance uniforme

$$d(f_1, f_2) = \sup_{x \in [0, 1]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

- Montrer que si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue, l'application  $\Omega f : \Omega X \rightarrow \Omega Y$  qui à  $g$  associe  $f \circ g$  est continue (on pourra commencer par montrer que si  $K$  est un compact de  $X$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x \in K$  et  $x' \in X$ ,  $d(x, x') \leq \eta \implies d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ ).
- Montrer que  $\Omega \mathbb{R}^n$  est connexe.
- On considère  $X_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Montrer que  $X_0$  est localement connexe.
- Si  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit  $f_n \in \Omega X_0$  par  $f_n(x) = e^{2i\pi n x}$ . Montrer que pour toute composante connexe de  $X_0$ , il existe un unique  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $f_n \in X_0$  (on pourra montrer que l'application  $\{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C}) \mid f(1) - f(0) \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \Omega X_0$  qui à  $f$  associe  $e^{2i\pi f}$  est surjective).
- En déduire que  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ne sont pas homéomorphes.