Plan et espace

Eric Dumas, Emmanuel Peyre et Bernard Ycart

Ce chapitre est pour l'essentiel une révision des programmes de géométrie de vos années de collège et de lycée. Il a pour but de vous préparer à voir la géométrie dans un cadre plus général que celui des dimensions 2 et 3. Au passage, nous introduirons quelques notions importantes, en particulier pour la physique, comme les déterminants et le produit vectoriel.

Table des matières

8 novembre 2011

1 Cours

1.1 Points, vecteurs et coordonnées

Une des difficultés de la géométrie est de bien comprendre la différence entre les points et les vecteurs. On vous a appris que les points sont « fixés » et les vecteurs sont « libres » (d'être translatés n'importe où dans le plan ou dans l'espace). Cette vision des choses est largement suffisante pour vous permettre d'effectuer des calculs, et vous pouvez vous en contenter pour l'instant. Nous décrirons à la section suivante le formalisme mathématique de ces notions.

Un *espace vectoriel* est un ensemble de vecteurs muni de deux opérations, l'addition et la multiplication par un réel. Ce sont bien celles que vous connaissez et leurs propriétés vous sont familières (figure 1).

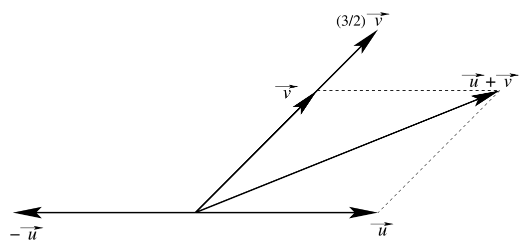

FIGURE 1 – Addition de deux vecteurs et multiplication d'un vecteur par un réel.

L'addition et la multiplication par un réel induisent la notion de *combinaison linéaire*. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, les combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs de la forme $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$, où λ et μ sont deux réels quelconques. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *liés* si une de leurs combinaisons linéaires est égale au vecteur nul (noté $\vec{0}$) sans que les coefficients λ et μ soient tous les deux nuls. C'est équivalent à dire que l'un des deux vecteurs est égal au produit de l'autre par un réel : on dit aussi que les deux vecteurs sont *colinéaires*.

Une *droite vectorielle* est un espace vectoriel contenant des vecteurs non nuls, dans lequel tous les vecteurs sont colinéaires entre eux. Dans une droite vectorielle tout vecteur non nul constitue une *base*. Soit D une droite vectorielle et $\vec{\imath}$ une base de D. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de D, il existe un réel x unique tel que $\vec{u}=x\vec{\imath}$.

Un *plan vectoriel* est un espace vectoriel contenant deux vecteurs non colinéaires, et dans lequel tout vecteur est combinaison linéaire de ces deux vecteurs. Soit P un plan vectoriel. Tout couple de vecteurs de P non colinéaires est une *base* du plan vectoriel. Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de P. À tout vecteur $\vec{u}$ de P correspond un couple unique de réels (x,y) tel que

$$\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}\,.$$

Les deux réels x,y sont les *coordonnées* du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

L'addition et la multiplication des vecteurs se traduisent par les mêmes opérations sur les coordonnées.

Proposition 1. *Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base du plan vectoriel. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, dont les coordonnées respectives dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont (x_u, y_u) et (x_v, y_v). Soient λ et μ deux réels quelconques. Les coordonnées du vecteur $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont $(\lambda x_u + \mu x_v, \lambda y_v + \mu y_v)$.*

$$\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} = (\lambda x_u + \mu x_v)\vec{\imath} + (\lambda y_u + \mu y_v)\vec{\jmath}\,.$$

Soit E un espace vectoriel. Un *espace affine* $\mathcal{E}$ est un ensemble de *points*. On suppose définie une application de $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ vers E, qui à un couple (A, B) associe un vecteur, noté $\overrightarrow{AB}$. Voyez le couple (A, B) comme une localisation dans l'espace affine du vecteur, A étant l'*origine* et B l'*extrémité*. Au sens de l'addition des vecteurs, la relation suivante, dite *relation de Chasles*, est vraie pour tous points A, B, C de l'espace affine $\mathcal{E}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\,.$$

Si de plus pour tout A, l'application de $\mathcal{E}$ vers E qui à B associe $\overrightarrow{AB}$ est *bijective*, on dit que l'espace vectoriel E et l'espace affine $\mathcal{E}$ sont *associés*, ou bien que $\mathcal{E}$ est *dirigé* par E.

Lorsque $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, on écrit :

$$B = A + \vec{u}\,,$$

malgré le risque de confusion avec l'addition des vecteurs. Cet abus de notation sera justifié plus loin.

Soit A un point d'un espace affine $\mathcal{E}$, $\vec{u}$ un vecteur non nul de E, et $B = A + \vec{u}$.

- La *droite affine* passant par A et B est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$, quand λ parcourt $\mathbb{R}$.

$$D = \{\, M = A + \lambda\vec{u}\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\,\}\,.$$

- Le *segment* $[A, B]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$, quand λ parcourt l'intervalle $[0, 1]$.

$$[A, B] = \{\, M = A + \lambda\vec{u}\,,\ \lambda \in [0, 1]\,\}\,.$$

- Le *milieu* du segment $[A, B]$ est le point M tel que $\overrightarrow{AM} = (1/2)\vec{u}$.

$$M = A + \frac{1}{2}\vec{u}\,.$$

La droite vectorielle
$$D = \{\, \lambda\vec{u}\,,\ \lambda \in \mathbb{R} \,\}\ ,$$
est associée à la droite affine
$$\mathcal{D} = \{A + \lambda\vec{u}\,,\ \lambda \in \mathbb{R} \,\}\ .$$
Le plan vectoriel
$$P = \{\, \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\,,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \,\}\ ,$$
est associé au plan affine
$$\mathcal{P} = \{A + (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})\,,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \,\}\ .$$
Dans le plan, deux droites affines sont dirigées par une même droite vectorielle si et seulement si elles sont parallèles (d'intersection vide) ou confondues. Par un point donné, passe une unique droite dont un vecteur directeur est donné, et donc une unique parallèle à une droite donnée : c'est le fameux cinquième postulat d'Euclide.

Il est possible de choisir une même origine O pour les représentants de tous les vecteurs : à chaque vecteur $\vec{u}$ on associe alors l'unique point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. On définit ainsi une bijection de l'ensemble des vecteurs vers l'ensemble des points.

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, la relation de Chasles justifie la notation $B = A + \vec{u}$, puisqu'alors
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \vec{u}\ ,$$
au sens de l'addition des vecteurs.

La donnée d'une origine O et d'une base de l'espace vectoriel E constitue un *repère* de l'espace affine associé : tout point A de $\mathcal{E}$ est repéré de façon unique par les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base. Par exemple si le plan affine $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, à tout point A du plan correspond le couple unique de réels (x, y) qui sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1.2 Espaces vectoriels

Nous donnons ici, sans démonstrations, un résumé (trop) rapide de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie. Ces notions seront reprises en détail dans un autre chapitre.

Un *espace vectoriel* est un ensemble sur lequel sont définies ;
- une addition interne (on peut ajouter entre eux deux éléments de l'ensemble),
- une multiplication externe (on peut multiplier un élément de l'ensemble par un nombre réel).

Ces deux opérations doivent vérifier certaines propriétés de compatibilité qui sont listées dans la définition 1. Pour la multiplication externe, l'ensemble des réels peut être remplacé par n'importe quel ensemble de nombres muni d'une addition et d'une multiplication (par exemple $\mathbb{C}$), sans changer aucun des énoncés qui suivent.

Définition 1. *Soit E un ensemble non vide. On dit que E est un* espace vectoriel *sur $\mathbb{R}$ si E est muni d'une addition et d'une multiplication externe vérifiant les propriétés suivantes.*

- Addition : $\left\{\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (\vec{v}, \vec{w}) & \longmapsto & \vec{v}+\vec{w} \end{array}\right.$
  1. Associativité : $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E\,, \quad \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
  2. Élément neutre : $\exists \vec{e} \in E\,,\ \forall \vec{v} \in E\,, \quad \vec{v}+\vec{e} = \vec{e}+\vec{v} = \vec{v}$
  3. Opposé : $\forall \vec{v} \in E\,, \exists \vec{v}' \in E\,, \quad \vec{v}+\vec{v}' = \vec{v}'+\vec{v} = \vec{e}$
  4. Commutativité : $\forall \vec{v}, \vec{w} \in E\,, \quad \vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$

  Ces propriétés font de $(E, +)$ un groupe commutatif.
- Multiplication externe : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, \vec{v}) & \longmapsto & \lambda\,\vec{v} \end{array}\right.$
  5. Associativité : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,,\ \forall \vec{v} \in E\,, \quad \lambda(\mu\,\vec{v}) = (\lambda\mu)\,\vec{v}$
  6. Élément neutre : $\forall \vec{v} \in E\,, \quad 1\,\vec{v} = \vec{v}$
  7. Distributivité (1) : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,,\ \forall \vec{v} \in E\,, \quad (\lambda+\mu)\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} + \mu\,\vec{v}$
  8. Distributivité (2) : $\forall \lambda \in \mathbb{R}\,,\ \forall \vec{v}, \vec{w} \in E\,, \quad \lambda\,(\vec{v}+\vec{w}) = \lambda\,\vec{v} + \lambda\,\vec{w}$

En utilisant les propriétés de la définition, on démontre que :

1. le produit par le réel 0 d'un vecteur $\vec{v}$ quelconque est l'élément neutre pour l'addition :
$$\forall \vec{v} \in E\,, \quad 0\,\vec{v} = \vec{e}\,,$$
2. le produit par le réel -1 d'un vecteur $\vec{v}$ quelconque est son opposé pour l'addition :
$$\forall \vec{v} \in E\,, \quad \vec{v} + (-1)\,\vec{v} = \vec{e}\,.$$

En conséquence, on note $\vec{0}$ l'élément neutre pour l'addition (qu'on appelle le *vecteur nul*) et $-\vec{v}$ l'opposé de $\vec{v}$.

L'exemple fondamental est l'ensemble des *n-uplets de réels :*
$$\mathbb{R}^n = \{\, (x_1, \ldots, x_n)\,,\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\,\}\,.$$

L'ensemble des n-uplets de réels (couples pour $n = 2$, triplets pour $n = 3$, ...), est muni de l'addition et de la multiplication par un réel, coordonnée par coordonnée.

- *Addition :* $(1, 2, 3, 4) + (3, -1, -2, 2) = (4, 1, 1, 6)$
- *Multiplication externe :* $(-2)(3, -1, -2, 2) = (-6, 2, 4, -4)$

Le singleton contenant seulement le vecteur nul est un espace vectoriel particulier, dont on convient qu'il est de dimension 0. Tous les espaces vectoriels considérés dans la suite sont supposés contenir au moins un vecteur non nul.

La notion de *combinaison linéaire*, que nous avons rappelée dans le cas de deux vecteurs, est l'outil de base des espaces vectoriels. Dans tout ce qui suit, n désigne un entier strictement positif. Une combinaison linéaire de n vecteurs se définit comme suit.

Définition 2. *Soient $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ n vecteurs dans un espace vectoriel. On appelle* combinaison linéaire *des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ tout vecteur s'écrivant :*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \vec{u}_i = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n \ ,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels.

Un *sous-espace* d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble qui est lui-même un espace vectoriel pour les opérations de E. Pour qu'un sous-ensemble soit un sous-espace, il est nécessaire et suffisant qu'il contienne toutes les combinaisons linéaires d'un nombre quelconque de ses vecteurs.

Définition 3. *Soit E un espace vectoriel, F un sous-ensemble de E. On appelle* sous-espace engendré par *F l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de F.*

Tout sous-espace contenant F, contient nécessairement le sous-espace engendré par F.

Définition 4. *Soit E un espace vectoriel, $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ n vecteurs de E.*

1. *On dit que $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une* famille génératrice *de E si le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est égal à E lui-même.*

$$\forall \vec{v} \in E\ ,\ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\ , \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \vec{u}_i$$

2. *On dit que E est de* dimension finie *s'il est engendré par une famille finie de vecteurs. Un sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie, est lui-même de dimension finie.*
3. *On dit que $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une* famille libre *si la seule combinaison linéaire nulle a tous ses coefficients nuls.*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \vec{u}_i = \vec{0} \implies (\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0)$$

   Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

4. *On dit que $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une* base *de E si c'est une famille à la fois génératrice et libre.*

Deux vecteurs liés sont colinéaires, trois vecteurs liés sont dits coplanaires.

Rappelons que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$. Plus généralement, si $n \geq 2$, une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée si et seulement s'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tels que u_i soit combinaison linéaire de la famille $(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n)$.

Théorème 1. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, contenant des vecteurs non nuls, il existe une infinité de bases et toutes les bases ont le même cardinal.*

Par définition, le nombre d'éléments commun de toutes les bases est la *dimension* de l'espace.

Les *coordonnées* d'un vecteur sont définies grâce au résultat suivant.

Théorème 2. *Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une base de E. Pour tout $\vec{v} \in E$, il existe un unique n-uplet de réels $(x_1, \ldots, x_n)$ tel que :*

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i \ .$$

Les réels $x_1, \ldots, x_n$ sont les *coordonnées* de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$.

Le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Dans $\mathbb{R}^n$, la base la plus naturelle est constituée des n-uplets dont une seule coordonnée vaut 1, les autres étant nulles.

$$\Big((1, 0, \ldots, 0) \,,\ (0, 1, \ldots, 0) \,,\ \ldots \,,\ (0, 0, \ldots, 1) \Big) \ .$$

On appelle cette base, la *base canonique*. Constatez avec soulagement que les coordonnées du n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base canonique sont les n réels $x_1, \ldots, x_n$.

1.3 Déterminants

Dans cette section, nous définissons la notion de déterminant, puis nous en déduisons un critère pratique pour reconnaître une base, dans un espace vectoriel de dimension 2 ou 3. Nous commençons par la dimension 2.

Définition 5. *Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de E. Soient $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}$ des éléments de E. On appelle déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $\mathcal{B}$ le nombre réel :*

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2 \ .$$

Proposition 2. *Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de E. Le déterminant vérifie les assertions suivantes :*

a) *Pour tout vecteur $\vec{u}$ de E,*

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \ .$$

b) *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de E,*

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = -\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{u}) \ .$$

c) *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des éléments de E, λ et μ des nombres réels.*

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) &= \lambda\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v})+\mu\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{w}),\\ \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}, \vec{w}) &= \lambda\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{w})+\mu\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v},\vec{w});\end{aligned}$$

d) *Si $\mathcal{B}' = (\vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,')$ est une base de E, alors :*

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\vec{u},\vec{v})\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{\imath}\,',\vec{\jmath}\,')\ .$$

Démonstration : Soient x_1 et y_1 deux réels.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ y_1 & y_1 \end{vmatrix} = x_1y_1 - y_1x_1 = 0\ .$$

Donc, pour tout $\vec{u}$ de E, $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{u}) = 0$, ce qui démontre *a)*. De même, la relation

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix} = x_2y_1 - y_2x_1 = -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

entraîne l'assertion *b)*.

Soient x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, λ et μ des nombres réels. L'assertion *c)* découle des égalités :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x_1 & \lambda x_2+\mu x_3 \\ y_1 & \lambda y_2+\mu y_3 \end{vmatrix} &= x_1(\lambda y_2+\mu y_3) - y_1(\lambda x_2+\mu x_3)\\ &= \lambda(x_1y_2 - y_1x_2) + \mu(x_1y_3 - y_1x_3)\\ &= \lambda\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\ .\end{aligned}$$

Reprenons les notations de l'assertion *d)*. Soient x'_1, y'_1 (resp. x'_2, y'_2) les coordonnées de $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) dans la base $\mathcal{B}'$.

$$\vec{u} = x'_1\vec{\imath}\,' + y'_1\vec{\jmath}\,' \quad \text{et} \quad \vec{v} = x'_2\vec{\imath}\,' + y'_2\vec{\jmath}\,'\ .$$

En appliquant *c)*, *b)* et *a)* on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v}) &= \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(x'_1\vec{\imath}\,' + y'_1\vec{\jmath}\,', x'_2\vec{\imath}\,' + y'_2\vec{\jmath}\,')\\ &= x'_1\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{\imath}\,', x'_2\vec{\imath}\,' + y'_2\vec{\jmath}\,') + y'_1\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{\jmath}\,', x'_2\vec{\imath}\,' + y'_2\vec{\jmath}\,')\\ &= x'_1y'_2\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{\imath}\,',\vec{\jmath}\,') + y'_1x'_2\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{\jmath}\,',\vec{\imath}\,')\\ &= \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\vec{u},\vec{v})\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{\imath}\,',\vec{\jmath}\,')\ .\end{aligned}$$

□

Corollaire 1. *Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de E. Pour tous $\vec{u}$, $\vec{v}$ de E,* $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v}) = 0$ *si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*

Démonstration : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Dans les deux cas, il résulte des assertions *a)* et *c)* de la proposition que $\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors la famille $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E. Par la relation *d)*, on obtient que :

$$\text{Det}_{\mathcal{B}'}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \ .$$

Par conséquent, $\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$. □

Passons maintenant à la dimension 3. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 (par exemple $E = \mathbb{R}^3$). Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de E. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée si et seulement si les trois vecteurs sont coplanaires, ou encore si et seulement si un de ces vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres.

Définition 6. *Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de l'espace vectoriel E. Soient $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ des vecteurs de E. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note (x_i, y_i, z_i) des coordonnées de $\vec{u}_i$ dans la base $\mathcal{B}$. On appelle* déterminant de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ dans la base $\mathcal{B}$ *le nombre réel :*

$$\begin{aligned} \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - z_1y_2x_3 - z_2y_3x_1 - z_3y_1x_2 \\ &= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \ . \end{aligned}$$

Pour calculer le déterminant de trois vecteurs, on peut utiliser la règle de Sarrus : on réécrit les deux premières lignes du déterminant en dessous de celui-ci, puis on effectue tous les produits en diagonale. On affecte du signe + les diagonales descendantes, du signe − les diagonales montantes, et on ajoute le tout (figure 2). Par exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = +(-2) + (-12) + (+6) - (-9) - (-2) - (+8) = -5$$

Proposition 3. *Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de l'espace vectoriel E. Le déterminant de trois vecteurs de E vérifie les assertions suivantes :*

a) *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des éléments de E.*

$$\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = 0.$$

b) *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des éléments de E.*

$$\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}).$$

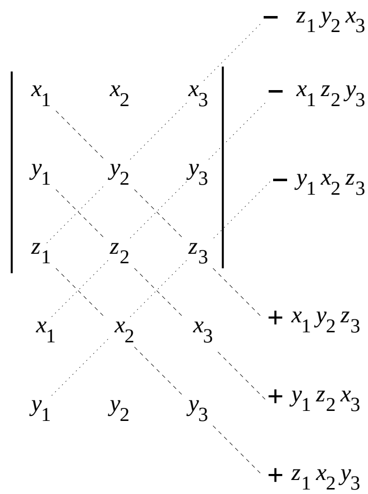

FIGURE 2 – Règle de Sarrus.

c) *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{x}$ des éléments de E, λ et μ des nombres réels. Les relations suivantes sont vraies.*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v},\vec{w},\vec{x}) & = & \lambda\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{w},\vec{x})+\mu\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v},\vec{w},\vec{x}) \\ \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\lambda\vec{v}+\mu\vec{w},\vec{x}) & = & \lambda\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{x})+\mu\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{w},\vec{x}) \\ \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\lambda\vec{w}+\mu\vec{x}) & = & \lambda\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+\mu\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{x}) \;. \end{array}$$

d) *Si $\mathcal{B}'=(\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')$ est une base de E, alors pour tout triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de vecteurs de E,*

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')\;.$$

Démonstration : Ces assertions se montrent par des calculs élémentaires comme dans le cas du déterminant de deux vecteurs. □

Corollaire 2. *Soit $\mathcal{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ une base de E. Pour tout triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de vecteurs de E, $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.*

1.4 Espaces affines

Passons maintenant à la définition d'un espace affine.

Définition 7. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle* espace affine *de direction E un ensemble $\mathcal{E}$ non vide, muni d'une application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}\times\mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ (A,B) & \longmapsto & \overrightarrow{AB} \end{array}$$

telle que :

1. *pour tout $A \in \mathcal{E}$, l'application qui à B associe $\overrightarrow{AB}$ est bijective : pour tout $\vec{u} \in E$, il existe un unique $B \in \mathcal{E}$, tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On le note $B = A + \vec{u}$;*
2. *la relation de Chasles est vérifiée.*

$$\forall A, B, C \in \mathcal{E}\ , \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\ .$$

Soient A, C deux points de $\mathcal{E}$, $\vec{u}$ un vecteur de E. Notons $B = A + \vec{u}$ et $D = C + \vec{u}$. Les couples de points (A, B) et (C, D) sont dits *équipollents* : les 4 points A, B, D, C forment un parallélogramme (ses diagonales se coupent en leur milieu : figure 3).

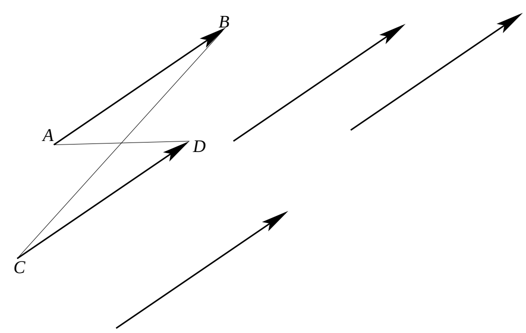

FIGURE 3 – Couples de points équipollents.

La relation d'équipollence est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ des couples de points de l'espace affine. À tout vecteur $\vec{u}$ de E correspond une classe d'équivalence de couples et une seule :

$$\vec{u} \longleftrightarrow \{(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}\ ,\ B = A + \vec{u}\,\}\ .$$

Ceci définit une bijection entre l'ensemble quotient de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ par la relation d'équipollence, et l'espace vectoriel associé E.

À tout vecteur correspond une classe d'équivalence de couples de points équipollents. Etant donné un couple de points (A, B), le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut donc être interprété comme la classe d'équivalence de (A, B) pour la relation d'équipollence.

1.5 Combinaisons linéaires et barycentres

Soit E un espace vectoriel, et $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Rappelons que la combinaison linéaire des n vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ affectés des coefficients réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ est le vecteur :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \vec{u}_i\ .$$

Passons de l'espace vectoriel à l'espace affine, c'est-à-dire des vecteurs aux points. Dès qu'une origine O a été choisie, on peut associer à n points $A_1, \dots, A_n$ et n réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le point M tel que $\overrightarrow{OM}$ soit la combinaison linéaire :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} .$$

La proposition suivante montre que ce point M ne dépend pas du choix de l'origine, quand la somme des coefficients vaut 1.

Proposition 4. *Soient $A_1, \dots, A_n$ n points dans un espace affine $\mathcal{E}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n réels tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Soit O un point de $\mathcal{E}$, et M le point défini par :*

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} .$$

Pour tout point O' de $\mathcal{E}$,

$$\overrightarrow{O'M} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{O'A_i} .$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{O'A_i} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{O'A_i}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \overrightarrow{O'O} + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}\right) \\
&= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M} .
\end{aligned}$$

□

Vous avez sans doute reconnu dans la proposition précédente la notion de *barycentre* d'une famille de points affectés de coefficients (ou *pondérations*). Elle vous a été présentée comme suit.

Définition 8. *Soient $A_1, \dots, A_n$ n points dans un espace affine $\mathcal{E}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n réels tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$. On appelle* barycentre *des points $A_1, \dots, A_n$ affectés des pondérations $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le point M tel que pour tout point O :*

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum \lambda_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}\right) . \qquad (1)$$

En remplaçant O par M dans (1), on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0} .$$

Le barycentre M est le seul point de l'espace tel que la combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{MA_i}$ affectés des coefficients λ_i soit nulle.

Quand les coefficients λ_i sont tous égaux, on parle d'*isobarycentre*. En physique, la notion de barycentre se réfère à des coefficients tous positifs, que l'on comprend comme des masses placées aux points $A_1, \ldots, A_n$. Le barycentre, ou centre de gravité, est un point d'équilibre pour l'ensemble des masses. Insistons sur le fait que dans la définition 8, les coefficients sont de signe quelconque.

Proposition 5. *Soient A, B deux points distincts d'un espace affine. La droite affine passant par A et B est l'ensemble des barycentres de A et B, affectés de coefficients λ et μ tels que $\lambda + \mu \neq 0$.*

Démonstration : La droite passant par A et B peut être vue comme la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$:

$$\mathcal{D} = \{ A + \lambda\overrightarrow{AB}\,,\ \lambda \in \mathbb{R} \}\ .$$

Soit O une origine quelconque. Le point M appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}\ ,$$

pour un certain réel λ. Donc M est le barycentre de A et B affectés des coefficients $(1-\lambda)$ et λ. Réciproquement, si M est le barycentre de A et B affectés des coefficients λ_1 et λ_2, alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}(\lambda_1\overrightarrow{OA} + \lambda_2\overrightarrow{OB}) \\
&= \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}(\lambda_1\overrightarrow{OA} + \lambda_2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB})) \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\overrightarrow{AB}\ .
\end{aligned}$$

□

De façon analogue, l'ensemble des barycentres de 3 points est le plan passant par ces 3 points.

Proposition 6. *Soient A, B, C trois points non alignés d'un espace affine. Le plan affine contenant A, B et C est l'ensemble des barycentres de A, B, C affectés de coefficients λ, μ, ν tels que $\lambda + \mu + \nu \neq 0$.*

1.6 Droites et plans

Cette section rappelle les équations des droites et des plans. Nous commençons par la dimension 2, et considérons un plan affine $\mathcal{P}$ et son plan vectoriel associé P.

Soit A un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de P. La droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A est l'ensemble des points $A + \lambda\vec{u}$, où λ parcourt $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{D} = \{A + \lambda\vec{u}\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\}\ .$$

Supposons le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Notons x_A et y_A les coordonnées de A dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, x_u et y_u les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Les coordonnées x, y de $M = A + \lambda\vec{u}$ sont :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda x_u \\ y = y_A + \lambda y_u\ . \end{cases} \tag{2}$$

Les équations ci-dessus sont les *équations paramétriques* de la droite $\mathcal{D}$. On obtient son *équation implicite* (on dit aussi « *cartésienne* ») en notant que le point M appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, ce qui se traduit, à l'aide du déterminant par l'équation :

$$\begin{vmatrix} x - x_A & x_u \\ y - y_A & y_u \end{vmatrix} = 0\ ,$$

c'est-à-dire :

$$y_u x - x_u y - (y_u x_A - x_u y_A) = 0\ .$$

La proposition suivante montre que, réciproquement, toute équation de ce type définit bien une droite.

Proposition 7. *Soient a et b deux réels, dont un au moins est non nul. Pour tout réel c l'ensemble des points de coordonnées (x, y) telles que :*

$$ax + by + c = 0\ , \tag{3}$$

est une droite dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(-b, a)$.

Démonstration : Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $a \neq 0$. Soit A un point dont les coordonnées (x_A, y_A) vérifient (3) (par exemple $x_A = -c/a$ et $y_A = 0$). Nous devons démontrer que, pour tout point M dont les coordonnées vérifient (3), le vecteur $\overrightarrow{AM}$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b, a)$ sont colinéaires. Ecrivons :

$$\begin{array}{cccc} ax & +by & +c & = & 0 \\ ax_A & +by_A & +c & = & 0\ , \end{array}$$

et soustrayons les deux équations. On obtient :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0\ .$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont $(x - x_A, y - y_A)$. Posons $\lambda = -a$ et $\mu = y - y_A$. On vérifie que

$$\lambda(x - x_A) + \mu(-b) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda(y - y_A) + \mu(a) = 0\ ,$$

soit

$$\lambda\overrightarrow{AM} + \mu\,\vec{u} = \vec{0}\;.$$

Réciproquement, soit M un point tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Soient x et y les coordonnées de M : il existe un réel λ tel que,

$$x - x_A = -\lambda b \quad \text{et} \quad y - y_A = \lambda a\;.$$

Ceci entraîne :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0\;,$$

et donc :

$$ax + by + c = 0\;.$$

□

En dimension 3 un plan est déterminé par un point A et deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires.

$$\mathcal{P} = \{\, A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\,,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,\}\;.$$

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Les trois coordonnées d'un point du plan $\mathcal{P}$ s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_A + \lambda\, x_u + \mu\, x_v \\ y = y_A + \lambda\, y_u + \mu\, y_v \\ z = z_A + \lambda\, z_u + \mu\, z_v\;. \end{array}\right. \tag{4}$$

Ce sont les *équations paramétriques* du plan $\mathcal{P}$. Pour obtenir son *équation implicite*, il faut éliminer λ et μ dans les équations paramétriques. C'est moins facile qu'en dimension 2. L'expression des trois coefficients a, b, c ci-dessous peut paraître arbitraire, mais vous y reconnaîtrez en fait trois déterminants. Nous expliquerons plus loin leur sens mathématique.

$$a = y_u z_v - y_v z_u\;, \quad b = z_u x_v - z_v x_u\;, \quad c = x_u y_v - x_v y_u\;. \tag{5}$$

Lemme 1. *Pour tous réels $x_u, y_y, z_u, x_v, y_v, z_v$, si a, b, c sont définis par* (5)*, alors :*

$$ax_u + by_u + cz_u = 0 \quad \textit{et} \quad ax_v + by_v + cz_v = 0\;. \tag{6}$$

Démonstration : La vérification, laissée au lecteur, est un peu fastidieuse, mais elle ne présente aucune difficulté. □

Multiplions les équations paramétriques (4) respectivement par a, b et c, et ajoutons les trois : d'après le lemme 1 λ et μ disparaissent et on obtient :

$$ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0\;.$$

Réciproquement, toute équation du type $ax + by + cz + d = 0$ définit bien un plan, que nous caractériserons à la section suivante.

En dimension 3, les équations paramétriques de la droite

$$\mathcal{D} = \{\, A + \lambda\vec{u}\,,\ \lambda \in \mathbb{R} \,\}\ ,$$

sont sans surprise :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_A + \lambda\, x_u \\ y = y_A + \lambda\, y_u \\ z = z_A + \lambda\, z_u\ . \end{array} \right. \tag{7}$$

Pour éliminer λ et obtenir des équations implicites, nous pouvons appliquer la technique déjà utilisée en dimension 2, par exemple aux deux premières équations, ensuite aux deux dernières. Voici le résultat.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_u x - x_u y - (y_u x_A - x_u y_A) = 0 \\ z_u y - y_u z - (z_u y_A - y_u z_A) = 0\ . \end{array} \right.$$

Les deux équations obtenues sont les équations de deux plans dont la droite $\mathcal{D}$ est l'intersection. Evidemment elles n'ont rien d'uniques. Il existe une infinité de manières d'exprimer une droite comme intersection de deux plans.

1.7 Produit scalaire et orthogonalité

Commençons par la définition d'un *produit scalaire*.

Définition 9. *Soit E un espace vectoriel. Soit S une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$. On dit que l'application S est un produit scalaire si elle est :*

1. symétrique : *pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$,*

$$S(\vec{u},\vec{v}) = S(\vec{v},\vec{u})\ ;$$

2. bilinéaire : *pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tous réels λ, μ,*

$$\begin{array}{rcl} S(\vec{u},(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w})) & = & \lambda S(\vec{u},\vec{v}) + \mu S(\vec{u},\vec{w}) \\ S((\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}),\vec{w}) & = & \lambda S(\vec{u},\vec{w}) + \mu S(\vec{v},\vec{w})\ ; \end{array}$$

3. définie positive : *pour tout vecteur $\vec{u}$,*

$$S(\vec{u},\vec{u}) \geq 0 \quad \textit{et} \quad S(\vec{u},\vec{u}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}\ .$$

Observez que si S est symétrique, et linéaire par rapport à l'une des composantes, elle est nécessairement linéaire par rapport à l'autre.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E.

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\vec{u}_i \quad \text{et} \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} y_i\,\vec{u}_i$$

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ relatif à la base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$, et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ la somme des produits deux à deux des coordonnées.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \; .$$

Il est immédiat de vérifier que le produit scalaire relatif à une base, vérifie bien la définition 9. On démontre que si S est un produit scalaire au sens de la définition 9, sur un espace de dimension finie, alors il existe une base $\mathcal{B}$ telle que S soit le produit scalaire relatif à la base $\mathcal{B}$. En dimension finie, quitte à changer de base, on se ramène donc toujours au cas où le produit scalaire est la somme des produits deux à deux des coordonnées. Nous noterons donc désormais $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le produit scalaire de deux vecteurs, comme vous en avez l'habitude.

Dans un espace vectoriel, la donnée d'un produit scalaire induit les notions d'orthogonalité, et de norme.

Définition 10. *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

1. *On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E sont* orthogonaux *si leur produit scalaire est nul.*
2. *On appelle* norme *d'un vecteur $\vec{u}$ de E, et on note $\|\vec{u}\|$ la racine carrée du produit scalaire de u par lui même.*
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \; .$$

Comme conséquence du fait qu'un produit scalaire est défini positif, la norme d'un vecteur ne peut être nulle que si ce vecteur est nul. De même, si deux vecteurs sont à la fois orthogonaux et colinéaires alors l'un d'entre eux est le vecteur nul ; ou de manière équivalente, si deux vecteurs non nuls sont orthogonaux, ils ne sont pas colinéaires.

Considérons un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ et notons $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le produit scalaire relatif à cette base.

Dans la base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$, le vecteur $\vec{u}_i$ a toutes ses coordonnées nulles, sauf la i-ième qui vaut 1. On vérifie donc immédiatement que $\vec{u}_i$ a pour norme 1 et que $\vec{u}_i$ et $\vec{u}_j$ sont orthogonaux pour $i \neq j$. On dit que la base est *orthonormée.*

Définition 11. *Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'un produit scalaire. On dit que la base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est* orthonormée*, si les vecteurs sont orthogonaux deux à deux, et chacun d'eux est de norme* 1*.*

$$\forall i, j = 1, \dots, n \; , \quad \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \; . \end{cases}$$

Tel que nous l'avons défini, le produit scalaire semble dépendre de la base. La proposition suivante montre que si on remplace la base initiale par une autre base orthonormée, le produit scalaire garde la même écriture.

Proposition 8. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n, et $\vec{u}\cdot\vec{v}$ leur produit scalaire relatif à la base $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$. Soit $(\vec{u}'_1,\ldots,\vec{u}'_n)$ une autre base orthonormée. Soient $(x'_1,\ldots,x'_n)$ et $(y'_1,\ldots,y'_n)$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cette nouvelle base. Alors :*

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\sum_{i=1}^{n}x'_iy'_i\;.$$

Démonstration : En utilisant la bilinéarité :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \left(\sum_{i=1}^{n}x'_i\,\vec{u}'_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}y'_j\,\vec{u}'_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}x'_iy'_j\,\vec{u}'_i\cdot\vec{u}'_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}x'_iy'_i\;,\end{aligned}$$

car puisque la base est orthonormée,

$$\vec{u}'_i\cdot\vec{u}'_i=1\quad\text{et}\quad\vec{u}'_i\cdot\vec{u}'_j=0\text{ si }i\neq j\;.$$

□

Voici un résultat souvent utile, l'*inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Théorème 3. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.*

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\;,\tag{8}$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Démonstration : Soit x un réel quelconque. Calculons le produit scalaire du vecteur $x\vec{u}+\vec{v}$ par lui-même, en utilisant la bilinéarité et la symétrie :

$$(x\vec{u}+\vec{v})\cdot(x\vec{u}+\vec{v})=x^2(\vec{u}\cdot\vec{u})+2x(\vec{u}\cdot\vec{v})+(\vec{v}\cdot\vec{v})$$

Cette expression est un polynôme du second degré en x. Or pour tout x, il prend une valeur positive ou nulle. Son discriminant ne peut pas être strictement positif, car sinon le polynôme aurait deux racines réelles entre lesquelles il prendrait des valeurs négatives. Ecrire que le discriminant est négatif ou nul donne :

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2\leq(\vec{u}\cdot\vec{u})\,(\vec{v}\cdot\vec{v})\;,$$

soit

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2\leq\|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2\;,$$

ce qui entraîne (8). L'égalité a lieu si et seulement si le trinôme admet une racine double x, valeur pour laquelle $x\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur nul. □

Passons maintenant à l'espace affine. Rappelons qu'un repère est constitué d'une origine O et d'une base de l'espace vectoriel associé. Dire qu'on munit l'espace d'un *repère orthonormé*, c'est supposer implicitement qu'on dispose d'un produit scalaire, pour lequel les vecteurs de la base sont orthogonaux deux à deux, et de norme 1. Ceci permet de définir la *distance euclidienne*.

Définition 12. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, muni d'un repère orthonormé. On appelle distance euclidienne de deux points A et B, et on note $d(A,B)$, la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.*

Vous apprendrez plus tard qu'il existe de multiples manières de définir une distance dans un espace. Pour l'instant, nous n'utiliserons que celle-ci, et nous omettrons l'adjectif « euclidienne ».

L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que le rapport entre le produit scalaire de deux vecteurs non nuls et le produit de leurs normes est compris entre -1 et 1. Ce rapport est interprété comme le cosinus de l'*angle* que forment les deux vecteurs.

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = d(O,A)d(O,B)\cos(\widehat{AOB})\ . \tag{9}$$

Cette interprétation permet de retrouver tous les résultats classiques de la géométrie plane ; par exemple le théorème suivant, dit *théorème d'Al-Kashi* (figure 4).

Théorème 4. *Soient A,B,C trois points du plan et α l'angle des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.*

$$d^2(B,C) = d^2(A,B)+d^2(A,C)-2d(A,B)d(A,C)\cos(\alpha)\ .$$

Le cas particulier où le triangle est rectangle en A ($\cos(\alpha)=0$) est le théorème du regretté Pythagore.

Démonstration : La relation de Chasles donne :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\ .$$

En utilisant la bilinéarité du produit scalaire, on écrit :

$$\begin{array}{rcl}
\|\overrightarrow{BC}\|^2 &=& (\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\
&=& \|\overrightarrow{AC}\|^2-2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})+\|\overrightarrow{AB}\|^2\\
&=& \|\overrightarrow{AC}\|^2-2\|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\alpha)+\|\overrightarrow{AB}\|^2\ .
\end{array}$$

□

Définir rigoureusement la notion d'*angle* de deux vecteurs pose un problème de choix d'orientation. En dimension 2 les angles sont mesurés de 0 à 2π, dans le sens

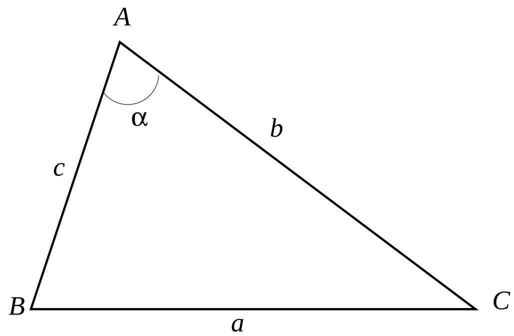

FIGURE 4 – Le théorème d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

trigonométrique. En dimension 3, parler d'angle dans un plan suppose qu'on a défini une *orientation* du plan, ce qui peut se faire si on a défini une orientation de l'espace, et une orientation normale du plan.

Deux ensembles de vecteurs sont dits orthogonaux si tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre. Nous examinons le cas particulier de deux droites vectorielles dans un plan. Observons que, du fait de la bilinéarité, si deux vecteurs sont orthogonaux, tout vecteur colinéaire à l'un est orthogonal à tout vecteur colinéaire à l'autre.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \implies \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,,\ (\lambda\vec{u}) \cdot (\mu\vec{v}) = \lambda\mu(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 0\ .$$

Réciproquement, l'ensemble des vecteurs du plan, orthogonaux à un vecteur donné est une droite vectorielle.

Définition 13. *On dit que deux droites du plan affine sont orthogonales (ou perpendiculaires) si tout vecteur directeur de l'une est orthogonal à tout vecteur directeur de l'autre.*

La *projection orthogonale* utilise le fait qu'il existe une seule perpendiculaire à une droite donnée passant par un point extérieur à cette droite (figure 5).

Définition 14. *Soit $\mathcal{D}$ une droite et A un point du plan, n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. on appelle* projection orthogonale *de A sur $\mathcal{D}$ le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec la droite orthogonale à $\mathcal{D}$ passant par A. On appelle* distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ *la distance du point à sa projection orthogonale sur la droite.*

On étend cette définition de façon évidente aux points de $\mathcal{D}$: la projection orthogonale d'un point de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}$ est le point lui-même, et sa distance à $\mathcal{D}$ est nulle. Le théorème de Pythagore entraîne que la distance d'un point à une droite est la plus petite des distances de ce point à un point de la droite. Dans le cas où la droite est définie par une équation implicite, la distance d'un point à cette droite se calcule très simplement.

Proposition 9. *Considérons le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation implicite $ax + by + c = 0$, et A le point de coordonnées (x_A, y_A). La distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ est :*

$$\frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

Démonstration : Si $A \in \mathcal{D}$ la distance est nulle, et la formule est vraie. Supposons maintenant que le point A n'appartienne pas à la droite $\mathcal{D}$ (figure 5). Le vecteur de coordonnées (a, b), que nous noterons $\vec{n}$, est orthogonal au vecteur de coordonnées $(-b, a)$, qui est un vecteur directeur de la droite ($\vec{n}$ pour « normal » : un autre synonyme d'orthogonal). Notons H la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}$. Tout point M de la droite vérifie :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{HM} - \overrightarrow{HA}) \cdot \vec{n} = -\overrightarrow{HA} \cdot \vec{n} ,$$

car $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. Comme $\overrightarrow{HA}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, la valeur absolue de leur produit scalaire est le produit des normes. On obtient donc :

$$|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = \|\overrightarrow{HA}\| \, \|\vec{n}\| .$$

Par définition, $\|\overrightarrow{HA}\|$ est la distance de A à la droite, et $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Il reste à évaluer le produit scalaire de $\overrightarrow{AM}$ par $\vec{n}$.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x_M - x_A) + b(x_M - x_A) = -(ax_A + bx_A + c) ,$$

car $ax_M + bx_M + c = 0$. D'où le résultat. □

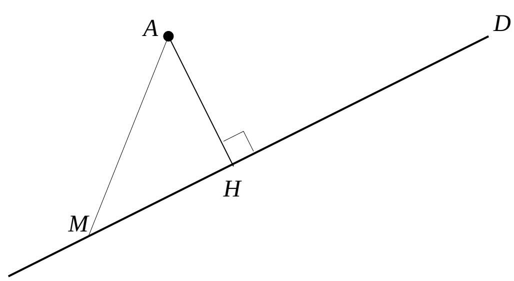

FIGURE 5 – Projection orthogonale d'un point sur une droite.

Les notions de projection orthogonale et de distance sont définies de la même façon en dimension 3. Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, non colinéaires, et P le plan vectoriel qu'ils engendrent.

$$P = \{ \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} , \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} .$$

Nous avons introduit à la section précédente les trois coefficients :

$$a = y_u z_v - y_v z_u , \quad b = z_u x_v - z_v x_u , \quad c = x_u y_v - x_v y_u .$$

Ce sont trois déterminants. Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, la proposition 1 entraîne que a, b, c ne sont pas tous les trois nuls. Les deux relations :

$$ax_u + by_u + cz_u = 0 \quad \text{et} \quad ax_v + by_v + cz_v = 0$$

montrent que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a, b, c) est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ (voir lemme 1). La bilinéarité du produit scalaire entraîne que $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de P. Réciproquement, tout vecteur orthogonal à $\vec{n}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et donc appartient à P.

Proposition 10. *Dans un espace affine de dimension* 3*, l'ensemble des points de coordonnées x, y, z tels que :*

$$ax + by + cz + d = 0 \;,$$

est un plan affine, dont le plan vectoriel associé est l'ensemble des vecteurs orthogonaux au vecteur $\vec{n}$, de coordonnées (a, b, c).

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine dans un espace de dimension 3, et A un point n'appartenant pas à $\mathcal{P}$. La projection orthogonale de A sur $\mathcal{P}$ est l'intersection avec $\mathcal{P}$ de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$ (la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par A). La distance d'un point à un plan défini par une équation implicite se calcule par une formule analogue à celle de la proposition 9.

Proposition 11. *Considérons un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension* 3*, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Dans ce repère, soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation implicite $ax + by + cz + d = 0$, et A le point de coordonnées (x_A, y_A, z_A). La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est :*

$$\frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \;.$$

1.8 Produit vectoriel

Nous utilisons à nouveau les déterminants. La définition 5 semble dépendre du choix d'une base particulière. Nous ne considérons ici que des bases orthonormées. Observons que $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ est le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}'$, de coordonnées $(y_2, -x_2)$. Or $\vec{v}'$ est l'un des deux vecteurs orthogonaux à $\vec{v}$, de même norme que $\vec{v}$. La proposition 8 montre que le produit scalaire, et donc l'orthogonalité et la norme ne dépendent pas de la base orthonormée dans laquelle on écrit les vecteurs. Ceci entraîne que le calcul de $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\vec{u}, \vec{v})$ donnera soit le même résultat, soit l'opposé, si on exprime les vecteurs dans une autre base orthonormée $\mathcal{B}'$. Ceci permet de définir l'orientation du plan, à partir d'une seule base de référence. Nous supposons désormais que le plan est muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$, et nous omettons l'indice $\mathcal{B}$ dans l'écriture des déterminants.

Définition 15. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. On dit du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ qu'il est une* base directe *si* $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) > 0$.

Observons que si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base directe, alors $(\vec{v}, \vec{u})$ ne l'est pas, d'après le point *b)* de la proposition 2.

La valeur du déterminant s'interprète géométriquement grâce à la formule suivante, qui se déduit immédiatement de (9).

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = d(O,A)d(O,B)\sin(\widehat{AOB}) \ .$$

On en déduit que la valeur absolue du déterminant est l'*aire du parallélogramme* de sommets $O, A, B, A + \overrightarrow{OB}$ (figure 6).

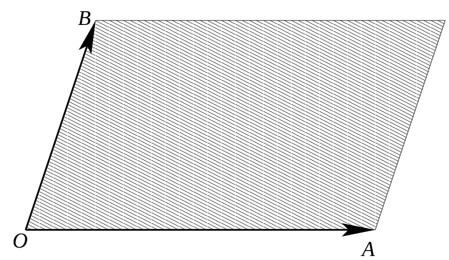

Figure 6 – La valeur absolue du déterminant est l'aire du parallélogramme.

Nous avons déjà rencontré des déterminants pour établir l'équation implicite d'un plan dans l'espace.

Définition 16. *Dans un espace affine de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On appelle* produit vectoriel *de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur de coordonnées a, b, c définies par :*

$$a = y_u z_v - y_v z_u \ , \quad b = z_u x_v - z_v x_u \ , \quad c = x_u y_v - x_v y_u \ .$$

Pour calculer le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$, retenez que sa première coordonnée est le déterminant des deux dernières coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis écrivez les deux coordonnées suivantes en permutant deux fois circulairement $x \to y \to z \to x$.

Les propriétés du produit vectoriel en dimension 3 rappellent celles du déterminant en dimension 2.

Proposition 12.

1. *Le produit vectoriel est changé en son opposé si on permute les deux vecteurs*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E \ , \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} \ ;$$

2. *le produit vectoriel est bilinéaire*

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E\ ,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ ,$$

$$\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda\, \vec{u} \wedge \vec{v} + \mu\, \vec{u} \wedge \vec{w}\ ;$$

$$(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \wedge \vec{w} = \lambda\, \vec{u} \wedge \vec{w} + \mu\, \vec{v} \wedge \vec{w}\ ;$$

3. *Le produit vectoriel* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *est le vecteur nul si et seulement si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires.*

Nous avons déjà observé que le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (lemme 1). Sa *norme* est la surface du parallélogramme construit à partir des deux vecteurs (cf. figure 6).

Passons maintenant à la dimension 3. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Nous continuons à omettre l'indice $\mathcal{B}$ dans l'écriture des déterminants. La proposition suivante consiste simplement à écrire la définition 6 à l'aide des produits scalaire et vectoriel.

Proposition 13. *Soient* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *trois vecteurs. Le déterminant de* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *est :*

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})\ .$$

L'expression $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ permet de donner une interprétation géométrique du déterminant en dimension 3, analogue à la dimension 2 : la valeur absolue du déterminant de 3 vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ est le volume du parallélépipède de sommets O, A, B, C, $A+\overrightarrow{OB}$, $A+\overrightarrow{OC}$, $B+\overrightarrow{OC}$, $A+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ (figure 7). Le signe est positif si les 3 vecteurs sont orientés dans le sens direct (comme sur la figure 7), négatif s'il est orienté dans le sens indirect (rappelons que le déterminant change de signe si on permute 2 des 3 vecteurs). Le signe du déterminant permet donc d'orienter une base quelconque, par rapport à une base de référence. L'orientation de la base de référence se fait selon la règle du bonhomme d'Ampère, autrement nommé tire-bouchon de Maxwell.

Définition 17. *Soit* $\mathcal{E}$ *un espace vectoriel de dimension* 3*, muni d'une base* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$*. Soient* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *trois vecteurs non coplanaires. On dit du triplet* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *qu'il est une* base directe *si* $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) > 0$*.*

1.9 Systèmes de coordonnées

En dimension 2, il faut voir un *système de coordonnées* comme une *application* de l'ensemble des couples de réels $\mathbb{R}^2$ (ou un de ses sous-ensembles) vers l'ensemble des points du plan : à un couple de réels l'application associe un point du plan et un seul. Moyennant le choix d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'application qui à un couple de réels (x, y) associe le point A du plan tel que :

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}\ ,$$

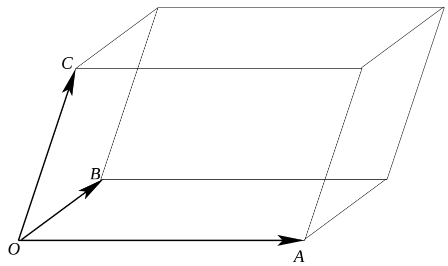

FIGURE 7 – La valeur absolue du déterminant est le volume du parallélépipède.

est une application de $\mathbb{R}^2$ vers le plan. Cette application est bijective : à tout point du plan correspond un unique couple de réels.

De même dans un espace de dimension 3 muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, l'application qui à un triplet de réels (x, y, z) associe le point A tel que :

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \ ,$$

est une bijection de $\mathbb{R}^3$ vers l'espace. Ces applications sont les systèmes de coordonnées *cartésiennes*.

On rencontre souvent en physique des situations où les calculs s'effectuent plus simplement en utilisant d'autres systèmes de coordonnées. Nous allons présenter les plus courants : les coordonnées polaires dans le plan, les coordonnées cylindriques et sphériques en dimension 3. Elles sont définies par référence aux coordonnées cartésiennes.

Les coordonnées polaires sont la traduction géométrique de la forme trigonométrique des nombres complexes. Supposons le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Voici l'application qui aux coordonnées polaires associe les coordonnées cartésiennes (figure 8).

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \theta) & \longmapsto & (x, y) \\ & & x = \rho \cos\theta \ , \ y = \rho \sin\theta \ . \end{array}$$

Les réels ρ et θ sont le module et l'argument de l'affixe du point de coordonnées cartésiennes (x, y) : ρ est la distance de l'origine au point et θ est l'angle orienté entre le vecteur $\vec{\imath}$ et le vecteur $\overrightarrow{A}$. Observons que l'application ainsi définie n'est pas (tout à fait) bijective : tout couple (x, y) a un antécédent unique, sauf $(0, 0)$ qui a pour antécédents tous les couples $(0, \theta)$. Si on la restreint aux valeurs de ρ strictement positives, l'application définie ci-dessus est bien une bijection de $]0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ vers le plan privé de l'origine.

Les coordonnées cylindriques remplacent les deux premières des trois coordonnées cartésiennes par les coordonnées polaires correspondantes, en conservant la troisième (figure 9)

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \theta, z) & \longmapsto & (x, y, z) \\ & & x = \rho \cos\theta \ , \ y = \rho \sin\theta \ . \end{array}$$

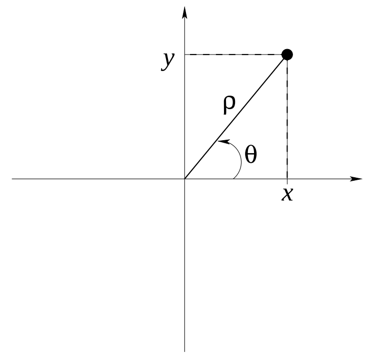

FIGURE 8 – Coordonnées polaires d'un point du plan.

Cette application n'est toujours pas une bijection, puisque l'image réciproque de $(0,0,z)$ est l'ensemble des triplets de la forme $(0,\theta,z)$, $\theta \in [0,2\pi[$.

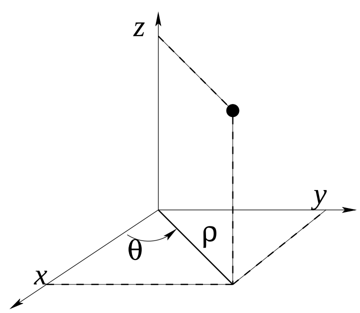

FIGURE 9 – Coordonnées cylindriques d'un point de l'espace.

Les coordonnées sphériques suivent la même logique que les coordonnées polaires : la première des trois est la distance de l'origine au point. Les deux autres sont deux angles, correspondant à la longitude et la co-latitude terrestres (figure 10).

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[\times[0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r,\phi,\theta) & \longmapsto & (x,y,z) \\ & & x = r\sin\theta\cos\phi\,,\ y = r\sin\theta\sin\phi\,,\ z = r\cos\theta\ . \end{array}$$

Cette application n'est pas plus bijective que les précédentes (la latitude et la longitude ne sont pas définies de façon unique au centre de la terre).

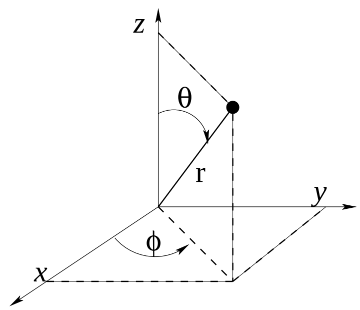

FIGURE 10 – Coordonnées sphériques d'un point de l'espace.

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul dans un espace vectoriel et A un point d'un espace affine associé. On pose $B = A+\vec{u}$ et $C = A-\vec{u}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont égaux.
2. ☒ Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont égaux.
3. ☐ $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère affine.
4. ☒ $(A, \overrightarrow{AB})$ est un repère affine de la droite passant par B et C.
5. ☐ Le point B est le milieu du segment $[AC]$.
6. ☒ Le point B est un barycentre de A et C.
7. ☒ Le point A est l'isobarycentre de B et C.
8. ☐ $C = B + 2\vec{u}$.
9. ☒ $A = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
10. ☒ $\overrightarrow{AB} = -\vec{u} + 2\overrightarrow{CA}$.

Vrai-Faux 2. Soient A, B, C trois points d'un plan affine $\mathcal{P}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une famille libre, alors $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathcal{P}$.
2. ☐ Si $B \neq C$ alors $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathcal{P}$.
3. ☒ Si $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathcal{P}$, alors $(C, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathcal{P}$.
4. ☒ Si $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathcal{P}$, alors $(C, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB})$ est un repère de $\mathcal{P}$.
5. ☐ $(B, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA})$ est un repère de $\mathcal{P}$.

6. ☐ Si $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathcal{P}$, alors C est un barycentre de A et B.
7. ☒ $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathcal{P}$, si et seulement si C n'est pas un barycentre de A et B.
8. ☒ L'isobarycentre de A, B, C appartient à une droite passant par C et le milieu du segment $[A, B]$.
9. ☐ L'isobarycentre de A, B, C appartient à une droite passant par B et le milieu du segment $[A, B]$.
10. ☒ L'isobarycentre de A, B, C appartient à la droite joignant B au milieu du segment $[A, B]$ si et seulement si $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ n'est pas un repère de $\mathcal{P}$.

Vrai-Faux 3. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 dont les coordonnées (x, y, z) dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$ vérifient $x + 2y + 3 = 0$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\mathcal{F}$ est une droite affine.
2. ☐ $\mathcal{F}$ contient le point O.
3. ☒ Si $\mathcal{F}$ contient un point M, alors il contient le point $M + \vec{k}$.
4. ☒ $\vec{k}$ appartient à l'espace vectoriel associé à $\mathcal{F}$.
5. ☐ $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ appartient au plan vectoriel associé à $\mathcal{F}$.
6. ☒ $2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 3\vec{k}$ appartient au plan vectoriel associé à $\mathcal{F}$.
7. ☒ $(2\vec{\imath} - \vec{\jmath}, 3\vec{k})$ est une base du plan vectoriel associé à $\mathcal{F}$.
8. ☐ $(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}, -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 6\vec{k})$ est une base du plan vectoriel associé à $\mathcal{F}$.

Vrai-Faux 4. On considère un espace vectoriel E, muni d'un repère orthonormé. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille libre dans E.
2. ☐ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$.
3. ☒ Si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2$, alors $\vec{u} = \vec{v}$.
4. ☐ $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
5. ☐ $(\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
6. ☒ $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
7. ☒ $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.
8. ☐ Si $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 0$ alors $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 0$.
9. ☒ Si $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 0$ alors $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

Vrai-Faux 5. Dans un espace affine euclidien de dimension 3, que l'on munit d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on note $\mathcal{P}$ le plan d'équation implicite $2x+2y+z+3=0$, et H la projection orthogonale de O sur $\mathcal{P}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $O \in \mathcal{P}$.
2. ☐ le vecteur de coordonnées $(2, 2, 1)$ appartient à l'espace vectoriel associé à $\mathcal{P}$.
3. ☒ Toute droite de vecteur directeur $(2, 2, 1)$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
4. ☐ H est le point de coordonnées $(2, 2, 1)$.
5. ☒ La distance de O à $\mathcal{P}$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{OH}$.
6. ☒ La distance de O à $\mathcal{P}$ vaut 1.
7. ☒ Le vecteur de coordonnées $(1, 0, -2)$ appartient à l'espace vectoriel associé à $\mathcal{P}$.
8. ☐ La distance de O à la droite passant par H dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(1, 0, -2)$ est strictement supérieure à 1.
9. ☐ Il existe une droite dans $\mathcal{P}$ telle que la distance de O à cette droite soit strictement inférieure à 1.

Vrai-Faux 6. On considère deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ dans un espace affine de dimension 3. On note P_1 et P_2 les plans vectoriels associés. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ L'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est une droite affine si et seulement si P_1 et P_2 sont distincts.
2. ☒ Si $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$, alors la distance à $\mathcal{P}_2$ d'un point M de $\mathcal{P}_1$ ne dépend pas de M.
3. ☐ Il se peut que tout vecteur de P_1 soit orthogonal à tout vecteur de P_2.
4. ☐ Si P_2 contient l'ensemble des vecteurs orthogonaux à P_1 alors $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles ou confondus.
5. ☒ Si P_2 contient l'ensemble des vecteurs orthogonaux à P_1 alors P_1 contient l'ensemble des vecteurs orthogonaux à P_2.
6. ☐ S'il existe deux droites perpendiculaires, une dans $\mathcal{P}_1$, l'autre dans $\mathcal{P}_2$, alors P_1 contient l'ensemble des vecteurs orthogonaux à P_2.
7. ☒ Si $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset$, alors pour toute droite de $\mathcal{P}_1$, il existe une droite de $\mathcal{P}_2$, telle que ces deux droites sont perpendiculaires.

Vrai-Faux 7. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques dans un espace vectoriel de dimension 3. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ $\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$.

2. ☐ Si $(\vec{u}-\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})=\vec{0}$ alors $\vec{u}=\vec{v}$.
3. ☒ Si $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
4. ☒ Si $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})$ est colinéaire à $\vec{v}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
5. ☐ Si $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
6. ☒ Si $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\vec{0}$, alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
7. ☐ Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\vec{v}$.
8. ☒ Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.

Vrai-Faux 8. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs quelconques dans un espace vectoriel de dimension 3. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ $\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\mathrm{Det}(\vec{w},\vec{u},\vec{v})$.
2. ☐ $\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\mathrm{Det}(\vec{w},\vec{v},\vec{u})$.
3. ☒ $\mathrm{Det}(\vec{u}+\vec{v},\vec{v},\vec{w})=\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.
4. ☒ $\mathrm{Det}(\vec{u}+\vec{v},\vec{v},\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})=\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.
5. ☐ $\mathrm{Det}(\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w})=\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.
6. ☒ $\mathrm{Det}(\vec{u}+2\vec{v},\vec{v},\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w})=\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.
7. ☒ $\mathrm{Det}(\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{u}+\vec{w})=2\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

2.2 Exercices

Exercice 1. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites dans le plan, données par leurs équations implicites ou paramétriques. Déterminer si les droites sont sécantes, parallèles ou confondues. Dans le cas ou elles sont sécantes, donner les coordonnées de leur point d'intersection.

$$\mathcal{D}_1 : 3x+5y-2=0\ ;\quad \mathcal{D}_2 : x-2y+3=0\ .$$

$$\mathcal{D}_1 : 2x-4y+1=0\ ;\quad \mathcal{D}_2 : -5x+10y+3=0\ .$$

$$\mathcal{D}_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+4\lambda \\ y &=& 2-\lambda \end{array}\right. \ ;\quad \mathcal{D}_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5-\mu \\ y &=& 2+3\mu \end{array}\right. .$$

$$\mathcal{D}_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2\lambda \\ y &=& 2-3\lambda \end{array}\right. \ ;\quad \mathcal{D}_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3-4\mu \\ y &=& -1+6\mu \end{array}\right. .$$

$$\mathcal{D}_1 : x-2y+3=0\ ;\quad \mathcal{D}_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+\mu \\ y &=& 3-2\mu \end{array}\right. .$$

$$\mathcal{D}_1 : 3x-2y+1=0\ ;\quad \mathcal{D}_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-4\mu \\ y &=& 2-6\mu \end{array}\right. .$$

Exercice 2. Soit A un point du plan, donné par ses coordonnées dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, déterminé par ses coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considérera les cas suivants.

$$A : (-1, 1)\ , \quad \vec{u} : (1, 0)\ .$$

$$A : (2, 1)\ , \quad \vec{u} : (-3, -1)\ .$$

$$A : (0, 1)\ , \quad \vec{u} : (1, 2)\ .$$

$$A : (-3, 1)\ , \quad \vec{u} : (1, -1)\ .$$

1. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite $\mathcal{D}$ passant par A, admettant $\vec{u}$ comme vecteur directeur.
2. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite $\mathcal{D}'$ passant par A, et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

Exercice 3. On considère trois points A, B, C non alignés d'un plan affine. On note $\mathcal{D}_1$ (respectivement $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$) la droite (B, C) (respectivement (A, C), (A, B)).

1. Montrer que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.
2. Donner les équations des 3 droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
3. Donner les équations des 3 médianes du triangle ABC dans le même repère.
4. Donner les coordonnées de l'isobarycentre de A, B, C dans le même repère, et vérifier qu'il est le point d'intersection des trois médianes.
5. Montrer que $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ est un repère du plan et déterminer l'ensemble des points ayant les mêmes coordonnées dans les deux repères $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.
6. Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan affine, dont une équation implicite dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $ax + by + c$. A quelles conditions portant sur les réels a, b, c la droite $\mathcal{D}$ est-elle sécante avec les trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$?
   On suppose ces conditions réalisées et on note I (respectivement J, K) le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{D}_1$ (respectivement $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$).
7. On appelle « diagonales » les segments $[A, I]$, $[B, J]$, $[C, K]$. Donner les coordonnées des milieux des 3 diagonales dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, et vérifier que ces trois points sont alignés.

Exercice 4. Soient A, B, C trois points du plan affine, donnés par leurs coordonnées dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considérera les cas suivants.

$$A : (0, 0)\ , \quad B : (0, 1)\ , \quad C : (1, 0)\ .$$

$$A : (0, 3)\ , \quad B : (-2, 0)\ , \quad C : (0, 2)\ .$$

$$A : (1, 0)\ , \quad B : (-1, 0)\ , \quad C : (2, 3)\ .$$

$$A : (2, 0)\ , \quad B : (-1, 4)\ , \quad C : (-4, 3)\ .$$

1. Donner des équations paramétriques et implicites des trois droites passant par (A, B), (A, C), (B, C).
2. Donner des équations paramétriques et implicites des trois médianes du triangle ABC et vérifier que l'isobarycentre G de A, B, C est leur point d'intersection.
3. Donner des équations paramétriques et implicites des trois hauteurs du triangle ABC. Vérifier qu'elles sont concourantes et donner les coordonnées de leur point d'intersection H.
4. Donner des équations paramétriques et implicites des trois médiatrices du triangle ABC. Vérifier qu'elles sont concourantes et donner les coordonnées de leur point d'intersection M.
5. Vérifier que les trois points G, H, M sont alignés et que $\overrightarrow{MH} = 3\overrightarrow{MG}$.

Exercice 5. Soient A, B, C, D quatre points d'un plan affine. Soient I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$, $[D, A]$, $[A, C]$, $[B, D]$.

1. Montrer que les segments $[I, K]$, $[J, L]$ et $[M, N]$ ont le même milieu.
2. Montrer que le quadrilatère de sommets I, J, K, L est un parallélogramme.

Exercice 6. Dans un plan affine, muni d'un repère orthonormé, on considère deux droites sécantes, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, données par leurs équations implicites :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

1. Soit M un point équidistant des deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Quelle équation vérifient les coordonnées (x, y) de M ?
2. En déduire que l'ensemble des points équidistants de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est la réunion de deux droites Δ_1 et Δ_2, dont on donnera une équation implicite.
3. Vérifier que Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales.
4. Pour $i = 1, 2$, soit $\vec{u_i}$ un vecteur directeur de D_i, $\vec{v_i}$ un vecteur directeur de Δ_i. On suppose que ces 4 vecteurs ont tous la même norme. Montrer que :
$$|\vec{u_1} \cdot \vec{v_1}| = |\vec{u_2} \cdot \vec{v_1}| \quad \text{et} \quad |\vec{u_1} \cdot \vec{v_2}| = |\vec{u_2} \cdot \vec{v_2}|$$
5. Donner des équations paramétriques et implicites des droites Δ_1 et Δ_2 dans les cas suivants.
$$\mathcal{D}_1 : x = 1 \;; \quad \mathcal{D}_2 : y = 1 \;.$$
$$\mathcal{D}_1 : x + y = 2 \;; \quad \mathcal{D}_2 : x - y = 2 \;.$$
$$\mathcal{D}_1 : x + y = 2 \;; \quad \mathcal{D}_2 : y = 1 \;.$$
$$\mathcal{D}_1 : 2x + y = 3 \;; \quad \mathcal{D}_2 : x - 2y = -1 \;.$$

Exercice 7. Soit a, b deux réels. Soit D_1 la droite d'équation $2x + ay - 1 = 0$ et D_2 la droite d'équations paramétriques $x = b - \lambda$, $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Discuter suivant les valeurs de a et b si D_1 et D_2 sont sécantes, parallèles ou confondues.

Exercice 8. On considère le triangle ABC dont les côtés ont pour équations (AB) : $x + 2y = 3$, $(AC) : x + y = 2$, $(BC) : 2x + 3y = 4$.

1. Donnez les coordonnées des points A, B, C.
2. Donnez les coordonnées des milieux A', B', C' de (BC), (AC) et (AB) respectivement.
3. Donnez une équation de chaque médiane et vérifiez qu'elles sont concourantes.

Exercice 9. Soit A un point donné par ses coordonnées dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul donné par ses coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considérera les cas suivants.

$$A : (1, 0, 0)\ , \quad \vec{u} : (1, 1, 1)\ .$$

$$A : (1, -1, 1)\ , \quad \vec{u} : (1, 1, 1)\ .$$

$$A : (1, 0, 0)\ , \quad \vec{u} : (1, -1, 1)\ .$$

$$A : (1, 2, 3)\ , \quad \vec{u} : (3, 2, 1)\ .$$

1. Donner des équations paramétriques et implicites pour la droite $\mathcal{D}$, de vecteur directeur $\vec{u}$, passant par A.
2. Donner des équations paramétriques et implicites pour le plan $\mathcal{P}$ passant par A et orthogonal à $\mathcal{D}$.
3. Calculer la distance de O à $\mathcal{P}$ et de O à $\mathcal{D}$.

Exercice 10. Soient A, B, C, D quatre points d'un espace affine de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Les points sont donnés par leur coordonnées. On considérera les cas suivants.

$$A : (0, 0, 0)\ , \quad B : (1, 0, 0)\ , \quad C : (0, 1, 0)\ , \quad D : (0, 0, 1)\ .$$

$$A : (0, 0, 0)\ , \quad B : (1, 0, 0)\ , \quad C : (1, 1, 0)\ , \quad D : (1, 1, 1)\ .$$

$$A : (1, 0, 0)\ , \quad B : (1, 2, -1)\ , \quad C : (-1, 1, 2)\ , \quad D : (2, -1, 1)\ .$$

$$A : (1, 2, 3)\ , \quad B : (1, 3, 2)\ , \quad C : (3, 1, 2)\ , \quad D : (3, 3, 3)\ .$$

1. Vérifier que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère.
2. On pose $A' = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Calculer les coordonnées de A'. Vérifier que $(A', \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'D})$ est un repère.
3. Donner les coordonnées de A' dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
4. Déterminer des équations paramétriques et implicites des 3 plans, contenant respectivement (A, B, C), (A, B, D), (A, C, D), dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
5. Déterminer des équations paramétriques et implicites des 3 plans, contenant respectivement (A, B, C), (A, B, D), (A, C, D), dans le repère $(A', \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'D})$.

6. En supposant le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormé, calculer la distance de A' à chacun des trois plans de la question précédente.
7. Calculer la distance de A' à chacune des 3 droites, contenant respectivement (A, B), (A, C), (A, D).
8. Reprendre les questions 3 à 7 en échangeant les rôles de A et A'.

Exercice 11. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans non parallèles et A un point n'appartenant ni à $\mathcal{P}_1$ ni à $\mathcal{P}_2$ dans un espace de dimension 3, muni d'un repère orthonormé. Les deux plans sont donnés par des équations implicites et A par ses coordonnées. On note $\mathcal{D}$ la droite intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. On considérera les cas suivants.

$$\mathcal{P}_1 : z = 0 \;; \quad \mathcal{P}_2 : y = 0 \;, \quad A : (1, 1, 1) \;.$$

$$\mathcal{P}_1 : x + y = 0 \;; \quad \mathcal{P}_2 : x + z + 1 = 0 \;, \quad A : (1, 1, 1) \;.$$

$$\mathcal{P}_1 : x + y + z + 2 = 0 \;; \quad \mathcal{P}_2 : 2x - y + 3z - 4 = 0 \;, \quad A : (2, 1, 0) \;.$$

$$\mathcal{P}_1 : 2x + y - z - 2 = 0 \;; \quad \mathcal{P}_2 : x + 3y + 7z - 11 = 0 \;, \quad A : (1, 2, 1) \;.$$

$$\mathcal{P}_1 : 2x - y + 1 = 0 \;; \quad \mathcal{P}_2 : 3y - z - 2 = 0 \;, \quad A : (3, -1, 2) \;.$$

$$\mathcal{P}_1 : x + y + z - 1 = 0 \;; \quad \mathcal{P}_2 : -x + y - z + 1 = 0 \;, \quad A : (1, 1, 2) \;.$$

1. Vérifier que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.
2. Donner des équations paramétriques de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
3. Donner des équations paramétriques de $\mathcal{D}$.
4. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite orthogonale à $\mathcal{P}_1$ passant par A.
5. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite orthogonale à $\mathcal{P}_2$ passant par A.
6. Donner des équations paramétriques et implicites du plan orthogonal à $\mathcal{D}$ passant par A.
7. Calculer la distance de A à $\mathcal{P}_1$, puis à $\mathcal{P}_2$, puis à $\mathcal{D}$.

Exercice 12. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, trois vecteurs déterminés par leurs coordonnées dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considérera les cas suivants.

$$\vec{u} : (1, 0, 0) \;, \quad \vec{v} : (1, 1, 0) \;, \quad \vec{w} : (1, 1, 1) \;.$$

$$\vec{u} : (0, 2, 2) \;, \quad \vec{v} : (1, 0, 1) \;, \quad \vec{w} : (1, 2, 0) \;.$$

$$\vec{u} : (0, 2, 1) \;, \quad \vec{v} : (2, 1, -1) \;, \quad \vec{w} : (-1, 2, 1) \;.$$

$$\vec{u} : (1, 1, -2) \;, \quad \vec{v} : (1, -2, 1) \;, \quad \vec{w} : (-2, 1, 1) \;.$$

$$\vec{u} : (1, 2, 3) \;, \quad \vec{v} : (4, 5, 6) \;, \quad \vec{w} : (7, 8, 9) \;.$$

$$\vec{u} : (1, -3, 2) \;, \quad \vec{v} : (-5, 3, 4) \;, \quad \vec{w} : (-2, 3, -1) \;.$$

1. Calculer les trois produits scalaires $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}$, $\vec{v}\cdot\vec{w}$.
2. Calculer les trois produits vectoriels $\vec{u}\wedge\vec{v}$, $\vec{u}\wedge\vec{w}$, $\vec{v}\wedge\vec{w}$.
3. Calculer les trois produits scalaires $\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$, $\vec{v}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{u})$, $\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})$.
4. Calculer le déterminant $\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ par la règle de Sarrus.

Exercice 13. *Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.* Soient $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$, trois vecteurs non coplanaires, donnés par leurs coordonnées dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considérera les cas suivants.

$$\vec{u}:(1,0,0)\;,\quad \vec{v}:(1,1,0)\;,\quad \vec{w}:(1,1,1)\;.$$

$$\vec{u}:(0,2,2)\;,\quad \vec{v}:(1,0,1)\;,\quad \vec{w}:(1,2,0)\;.$$

$$\vec{u}:(0,2,1)\;,\quad \vec{v}:(2,1,-1)\;,\quad \vec{w}:(-1,2,1)\;.$$

$$\vec{u}:(1,-3,2)\;,\quad \vec{v}:(-5,3,4)\;,\quad \vec{w}:(-2,3,-1)\;.$$

1. Calculer $\|\vec{u}\|$. On pose $\vec{u}'=(1/\|\vec{u}\|)\vec{u}$. Calculer les coordonnées de $\vec{u}'$.
2. On pose :
$$\vec{v}_1=\vec{v}-(\vec{u}'\cdot\vec{v})\vec{u}'\;,$$
puis $\vec{v}'=(1/\|\vec{v}_1\|)\vec{v}_1$. Calculer les coordonnées de $\vec{v}'$.
3. On pose :
$$\overrightarrow{w_1}=\vec{w}-(\vec{u}'\cdot\vec{w})\vec{u}'-(\vec{v}'\cdot\vec{w})\vec{v}'\;,$$
puis $\vec{w}'=(1/\|\overrightarrow{w_1}\|)\overrightarrow{w_1}$. Calculer les coordonnées de $\vec{w}'$.
4. Vérifier que $(\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}')$ est une base orthonormée.
5. Démontrer que si $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base quelconque de l'espace vectoriel, alors $(\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}')$ est une base orthonormée.

Exercice 14. Soit A un point d'un espace de dimension 3, donné par ses coordonnées dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considérera les cas suivants.

$$A:(1,0,0)\;,\quad A:(0,1,0)\;,\quad A:(0,0,1)\;,\quad A:(-1,0,0)\;,$$

$$A:(1,0,1)\;,\quad A:(1,1,0)\;,\quad A:(1,1,\sqrt{2})\;,\quad A:(-1,1,-\sqrt{2})\;,$$

$$A:(1,1,-\sqrt{6})\;,\quad A:(1,\sqrt{3},-2)\;,\quad A:(-\sqrt{3},1,2)\;,\quad A:(-\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{2})\;.$$

1. Donner les coordonnées cylindriques de A.
2. Donner les coordonnées sphériques de A.

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul dans un espace vectoriel, et A un point dans un espace affine associé. On pose $B = A + 2\vec{u}$ et $C = A - \vec{u}$.

$\boxed{\text{A}}$ La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ contient les points B et C.

$\boxed{\text{B}}$ Il existe une unique droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

$\boxed{\text{C}}$ A est le milieu du segment $[B, C]$.

$\boxed{\text{D}}$ Il existe un unique plan passant par les trois points A, B et C.

$\boxed{\text{E}}$ Le vecteur $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Question 2. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul dans un espace vectoriel, et A un point dans un espace affine associé. On pose $B = A + 2\vec{u}$ et $C = A - \vec{u}$.

$\boxed{\text{A}}$ $A = C - \vec{u}$.

$\boxed{\text{B}}$ $B = C + 3\vec{u}$.

$\boxed{\text{C}}$ $C = A + \overrightarrow{BA}$.

$\boxed{\text{D}}$ $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$.

$\boxed{\text{E}}$ $\overrightarrow{BA} = 2\vec{u}$.

Question 3. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de E.

$\boxed{\text{A}}$ $\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{\jmath}, \vec{\imath}, \vec{k}) = 1$.

$\boxed{\text{B}}$ $\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{\imath}) = 1$.

$\boxed{\text{C}}$ $\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{\imath}, \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}, \vec{k}) = 1$.

$\boxed{\text{D}}$ $\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{\imath} + \vec{k}, \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}, \vec{k} - 2\vec{\jmath}) = 0$.

$\boxed{\text{E}}$ $\text{Det}(\vec{\imath} + \vec{\jmath}, \vec{\imath} + \vec{k}, \vec{\jmath} + \vec{k}) = 0$.

Question 4. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul dans un espace vectoriel, et A un point dans un espace affine associé. On pose $B = A + 2\vec{u}$ et $C = A - \vec{u}$.

$\boxed{\text{A}}$ A est le barycentre de B et C affectés des coefficients respectifs 1 et 2.

$\boxed{\text{B}}$ B est le barycentre de A et C affectés des coefficients respectifs -2 et 1.

$\boxed{\text{C}}$ C est le barycentre de A et B affectés des coefficients respectifs 2 et -1.

$\boxed{\text{D}}$ A est l'isobarycentre de B et C.

$\boxed{\text{E}}$ B est le barycentre de A et C affectés des coefficients respectifs 3 et -2.

Question 5. Dans un espace affine de dimension 3, muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère le plan affine $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + z = 3$.

$\boxed{\text{A}}$ La droite passant par le point de coordonnées $(1, 2, 0)$, de vecteur directeur $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ ne coupe pas le plan $\mathcal{P}$.

B La droite passant par le point de coordonnées $(1,2,3)$, de vecteur directeur $\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point et un seul.

C La droite passant par le point de coordonnées $(1,2,3)$, de vecteur directeur $\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+3\vec{k}$ ne coupe pas le plan $\mathcal{P}$.

D La droite passant par le point de coordonnées $(1,2,0)$, de vecteur directeur $\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+3\vec{k}$ coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point et un seul.

E La droite passant par le point de coordonnées $(1,0,1)$, de vecteur directeur $\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ ne coupe pas le plan $\mathcal{P}$.

Question 6. Dans un espace affine de dimension 3, muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère le point A de coordonnées $(1,0,1)$ le vecteur $\vec{u}=\vec{\imath}+\vec{k}$ et la droite affine $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

A La droite $\mathcal{D}$ est contenue dans le plan d'équation $x+z=0$.

B La droite $\mathcal{D}$ admet pour équations paramétriques $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+\lambda \\ y &=& 0 \\ z &=& 1+\lambda \end{array}\right. \quad , \quad \lambda\in\mathbb{R}$.

C La droite $\mathcal{D}$ contient le point O.

D La droite $\mathcal{D}$ ne coupe pas le plan d'équation $x-z=0$.

E La droite $\mathcal{D}$ admet pour équations implicites $\left\{\begin{array}{lcl} x-z &=& 0 \\ x+y+z &=& 2 \end{array}\right.$.

Question 7. Dans un espace affine de dimension 3, muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère le point A de coordonnées $(1,0,1)$ le vecteur $\vec{u}=\vec{\imath}+\vec{k}$, et le plan affine $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteurs directeur $\vec{u}$ et $\vec{\jmath}$.

A Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite passant par l'origine et par le point de coordonnées $(1,1,1)$.

B Le plan $\mathcal{P}$ admet pour équations paramétriques $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+\lambda \\ y &=& \lambda \\ z &=& 1+\lambda \end{array}\right. \quad , \quad \lambda\in\mathbb{R}$.

C Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite passant par A, de vecteur directeur $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$.

D Le plan $\mathcal{P}$ ne rencontre pas la droite passant par le point de coordonnées $(0,0,1)$, et de vecteur directeur $\vec{\jmath}$.

E Le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan passant par O, de vecteurs directeurs $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

Question 8. Dans un espace affine de dimension 3, muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère le plan affine $\mathcal{P}$ d'équation implicite $x+z=2$.

A Le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$ contient le vecteur $\vec{\jmath}$.

B Le vecteur $\vec{\imath}+\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

C Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite passant par O, de vecteur directeur $\vec{\jmath}$.

D Le plan contient la droite passant par le point de coordonnées $(1,0,1)$, de vecteur directeur $\vec{\imath}+\vec{k}$.

E Toute droite affine de vecteur directeur $\vec{\imath}-\vec{k}$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

Question 9. Dans un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orhonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère le plan affine $\mathcal{P}$ d'équation implicite $x + z = 2$.

$\boxed{\text{A}}$ La distance de O au plan $\mathcal{P}$ vaut 1.

$\boxed{\text{B}}$ Toute droite de vecteur directeur $\vec{\imath} + \vec{k}$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

$\boxed{\text{C}}$ La distance de O au point de coordonnées $(2, 0, 0)$ est égale à la distance de O à $\mathcal{P}$.

$\boxed{\text{D}}$ La distance de O à la droite passant par les points $(2, 0, 0)$ et $(0, 0, 2)$ est strictement supérieure à la distance de O à $\mathcal{P}$.

$\boxed{\text{E}}$ La projection orthogonale de O sur le plan P est le point de coordonnées $(1, 0, 1)$.

Question 10. On considère un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orhonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

$\boxed{\text{A}}$ $(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$.

$\boxed{\text{B}}$ $(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \wedge (\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = \vec{k}$.

$\boxed{\text{C}}$ $(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \wedge \vec{\imath} = \vec{k}$.

$\boxed{\text{D}}$ $\vec{\jmath} \cdot \Big((\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \wedge \vec{k}\Big) = 1$.

$\boxed{\text{E}}$ $\vec{\imath} \cdot \Big((\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \wedge (\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})\Big) = 1$.

Réponses : 1–AB 2–BD 3–BD 4–AE 5–AD 6–BC 7–AD 8–AB 9–BE 10–AE

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours :

1. Soient $\vec{u} = (x_1, y_1)$ et $\vec{v} = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique. Démontrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
2. Soient $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique. Démontrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$.
3. Soient $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique. Démontrer que le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal au plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
4. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique. En utilisant l'expression du déterminant à l'aide du produit scalaire et du produit vectoriel, démontrer que si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, alors $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.
5. On pose $\vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} = (1, -2, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, -1)$. Calculer le déterminant de ces trois vecteurs par la règle de Sarrus, puis vérifier que chacun des trois vecteurs est orthogonal au produit vectoriel des deux autres.

Exercice 1 : On considère un espace affine de dimension 3, muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Dans cet espace, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - 2z = -4$, et les points A de coordonnées $(3, 2, 6)$, B de coordonnées $(1, 2, 4)$ et C de coordonnées $(4, -2, 5)$.

1. Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ est l'unique plan contenant les points A, B et C.
2. Calculer les distances $d(A, B)$, $d(A, C)$ et $d(B, C)$ et démontrer que le triangle ABC est rectangle.
3. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$, normal au plan $\mathcal{P}$. Vérifier que les trois produits vectoriels $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}$ sont colinéaires au vecteur $\vec{n}$.
4. Calculer la distance de O au plan $\mathcal{P}$.
5. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ passant par O et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
6. Soit K la projection orthogonale de O sur $\mathcal{P}$. Calculer les coordonnées de K, puis la norme du vecteur $\overrightarrow{OK}$. Retrouver le résultat de la question 4.
7. Soit G le barycentre des points O, A, B, C, munis des poids respectifs $3, 1, 1, 1$. Déterminer les coordonnées de G, puis la distance de G au plan P.
8. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Démontrer que G est le milieu du segment $[O, I]$.
9. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace, vérifiant :
$$\| 3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = 6 \,.$$
Montrer que l'intersection de Γ avec $\mathcal{P}$ est un cercle, déterminer son centre et son rayon.

Exercice 2 : On considére un espace affine de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit A le point de coordonnées $(0, 1, 1)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(3, 1, 0)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et admettant $\vec{u}$ comme vecteur directeur.
2. Donner des équations paramétriques et une équation implicite du plan $\mathcal{P}$ passant par A et orthogonal à $\mathcal{D}$.
3. Calculer la distance de O à $\mathcal{P}$ et la distance de O à $\mathcal{D}$.
4. Soit $\mathcal{P}'$ le plan passant par 0 et parallèle à $\mathcal{P}$. Soit A' l'intersection de $\mathcal{P}'$ avec $\mathcal{D}$. Justifier, sans calculs, le fait que la distance de O à A' est égale à la distance de O à la droite $\mathcal{D}$.
5. Soit I la projection orthogonale de O sur le plan $\mathcal{P}$. Calculer les coordonnées de I.

6. Démontrer que les 4 points O, A, A', I sont dans un même plan, et que le quadrilatère $OAA'I$ est un rectangle.

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. Par définition, le déterminant $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v})$ vaut $x_1y_2 - x_2y_1$. Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires. Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Sinon, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, donc $x_2 = \lambda x_1$ et $y_2 = \lambda y_1$. Dans ce cas,
$$x_1y_2 - x_2y_1 = \lambda x_1y_1 - \lambda x_1y_1 = 0 \, .$$
2. Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ définis comme suit.
$$\vec{u}_a = (y_1, z_1) \, , \quad \vec{u}_b = (x_1, z_1) \, , \quad \vec{u}_c = (x_1, y_1) \, ,$$
$$\vec{v}_a = (y_2, z_2) \, , \quad \vec{v}_b = (x_2, z_2) \, , \quad \vec{v}_c = (x_2, y_2) \, .$$
Par définition, le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est :
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \Big(\text{Det}(\vec{u}_a, \vec{v}_a) \, , \, -\text{Det}(\vec{u}_b, \vec{v}_b) \, , \, \text{Det}(\vec{u}_c, \vec{v}_c) \Big) \, .$$
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}_a$ et $\vec{v}_a$ le sont aussi, et également $\vec{u}_b$ et $\vec{v}_b$, ainsi que $\vec{u}_c$ et $\vec{v}_c$. Donc les trois coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont nulles, d'après la question précédente.
3. Nous devons montrer que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à tous les vecteurs de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, où λ et μ sont deux réels quelconques. Pour montrer que deux vecteurs sont orthogonaux, nous devons montrer que leur produit scalaire est nul. Par la bilinéarité du produit scalaire, il suffit de montrer que :
$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$$
C'est une vérification facile.
$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = x_1(y_1z_2 - y_2z_1) + y_1(x_2z_1 - x_1z_2) + z_1(x_1y_2 - x_2y_1) = 0 \, ,$$
$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = x_2(y_1z_2 - y_2z_1) + y_2(x_2z_1 - x_1z_2) + z_2(x_1y_2 - x_2y_1) = 0 \, .$$
4. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, alors l'un des trois vecteurs est combinaison linéaire des deux autres. Sans perte de généralité, nous allons supposer qu'il existe deux réels λ et μ, tels que $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$. Ecrivons :
$$\begin{aligned} \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \text{Det}(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}) \\ &= \lambda\text{Det}(\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}) + \mu\text{Det}(\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}) \\ &= \lambda\vec{v} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \mu\vec{w} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \\ &= 0 \, , \end{aligned}$$
d'après la question précédente.

5. On trouve $\text{Det}(\vec{w},\vec{v},\vec{w}) = 0$. Le calcul est inutile, il suffit d'observer que $\vec{u}-\vec{v} = 2\vec{w}$. En effectuant le calcul des produits vectoriels, on trouve :
$$\vec{u}\wedge\vec{v} = (-2,-2,-2)\;,\quad \vec{u}\wedge\vec{w} = (1,1,1)\;,\quad \vec{v}\wedge\vec{w} = (1,1,1)\;.$$
Les produits scalaires suivants sont bien nuls.
$$(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = (\vec{u}\wedge\vec{w})\cdot\vec{v} = (\vec{v}\wedge\vec{w})\cdot\vec{u} = 0\;.$$

Exercice 1 :

1. Nous devons d'abord vérifier que les trois points appartiennent au plan $\mathcal{P}$:
$$2\times 3+2-2=-4\;,\quad 2\times 1+2-2=-4\;,\quad 2\times 4-2-2=-4\;.$$
Nous devons ensuite montrer que les 3 points ne sont pas alignés, ce qui se vérifie par exemple en montrant que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Il suffit pour cela de calculer leur produit vectoriel, et de vérifier qu'il est non nul.
$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = (-2,0,-2)\wedge(1,-4,-1) = (-8,-4,8) \neq \vec{0}\;.$$
2. $$d^2(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 8\;,\quad d^2(A,C) = \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 18\;,\quad d^2(B,C) = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = 26\;.$$
Donc $d(A,B) = 2\sqrt{2}$, $d(A,C) = 3\sqrt{2}$ et $d(B,C) = \sqrt{26}$. Puisque $d^2(AB)+d^2(AC) = d^2(BC)$, le triangle ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore.
3. Le plan affine $\mathcal{P}$ est associé au plan vectoriel P, d'équation $2x+y-2z=0$. Cette équation traduit le fait que tout vecteur directeur de $\mathcal{P}$, de coordonnées x,y,z, est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $2,1,-2$, qui est donc un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. En effectuant les produits vectoriels, on trouve :
$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} & = & (-8,-4,8) = -4\vec{n}\;,\\ \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC} & = & (8,4,-8) = 4\vec{n}\;,\\ \overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB} & = & (-8,-4,8) = -4\vec{n}\;.\end{array}$$
4. En appliquant la formule,
$$d(O,\mathcal{P}) = \frac{4}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}\;.$$
5. La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{n}$. Tout point M, s'il appartient à $\mathcal{D}$, est tel que $\overrightarrow{OM}$ est colinéaire à $\vec{n}$, dont les coordonnées x,y,z de M vérifient :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2\lambda\\ y & = & \lambda\\ z & = & -2\lambda\end{array}\right.\;,\quad \lambda\in\mathbb{R}\;.$$

6. Le point K est l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec le plan $\mathcal{P}$. Nous devons donc trouver le réel λ tel que :
$$2(2\lambda) + \lambda - 2(-2\lambda) = -4 \ ,$$
soit $\lambda = -4/9$. Le point K a pour coordonnées $-8/9, -4/9, 8/9$. La norme du vecteur $\overrightarrow{OK}$ est telle que :
$$\|\overrightarrow{OK}\|^2 = \left(-\frac{8}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \ .$$
La distance $d(O, K)$, qui est aussi la distance de O au plan $\mathcal{P}$, vaut $4/3$.
7. Par définition,
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}\Big(\, 3\,\vec{0} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\,\Big) \ .$$
On en déduit les coordonnées de G : $\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{2}$. Pour calculer la distance de G au plan $\mathcal{P}$, on applique la formule :
$$d(G, \mathcal{P}) = \frac{\left|2\frac{4}{3} + \frac{1}{3} - 2\frac{5}{2} + 4\right|}{\sqrt{2^2 + 1 + 2^2}} = \frac{2}{3} \ .$$
8. Le centre de gravité du triangle ABC est tel que :
$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}\Big(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\Big) = 2\,\overrightarrow{OG} \ .$$
Donc $\overrightarrow{OG} = (1/2)\overrightarrow{OI}$: G est le milieu du segment $[O, I]$.
9. Le point G est tel que, pour tout point M de l'espace :
$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{6}\Big(3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\Big) \ .$$
Donc Γ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$$\|\overrightarrow{MG}\| = 1 \ .$$
C'est la sphère de centre G et de rayon 1. Nous avons vu que la distance de G au plan P est $2/3$, donc inférieure au rayon de la sphère. Donc l'intersection de Γ et $\mathcal{P}$ est non vide : c'est bien un cercle. Son centre est la projection orthogonale de G sur P. Son rayon r est tel que $r^2 + (2/3)^2 = 1$, soit $r = \sqrt{5}/3$.

Exercice 2 : Considérons un espace affine de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit A le point de coordonnées $(0, 1, 1)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(3, 1, 0)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. Soit M un point de $\mathcal{D}$. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$. Donc les coordonnées x, y, z de M vérifient :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3\lambda \\ y & = & 1+\lambda \\ z & = & 1 \end{array}\right. \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$
Ce sont les équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$. Pour obtenir des équations implicites, il faut éliminer λ dans les équations ci-dessus :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x-3y & = & -3 \\ z & = & 1 . \end{array}\right.$$
2. Le plan $\mathcal{P}$ admet $\vec{u}$ comme vecteur normal. Nous devons trouver deux vecteurs non colinéaires, et orthogonaux au vecteur $\vec{u}$. Par exemple : $(1, -3, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Tout point M de $\mathcal{P}$ est tel que $\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire de ces deux vecteurs. Ses coordonnées x, y, z vérifient donc :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \lambda \\ y & = & 1-3\lambda \\ z & = & 1+\mu \end{array}\right. \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} .$$
Pour l'équation implicite, nous savons que $\vec{u}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, qui admet donc une équation du type $3x + y = d$. Pour déterminer d, il suffit d'écrire que A vérifie l'équation. On trouve ainsi l'équation $3x + y = 1$.
3. La distance de O à $\mathcal{P}$ se calcule par la formule :
$$d(O, \mathcal{P}) = \frac{1}{\sqrt{3^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}} .$$
La distance de O à $\mathcal{D}$ peut se déduire du théorème de Pythagore, puisque $d^2(O, A) = d^2(O, \mathcal{P}) + d^2(O, \mathcal{D})$. On trouve :
$$d^2(O, \mathcal{D}) = d^2(O, A) - d^2(O, \mathcal{P}) = 2 - \frac{1}{10} = \frac{19}{10} .$$
Donc la distance de 0 à $\mathcal{D}$ est de $\sqrt{19/10}$.
4. Par construction, le vecteur $\overrightarrow{OA'}$ appartient au plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$, ainsi qu'à $\mathcal{P}'$. Il est donc orthogonal à la droite $\mathcal{D}$. Donc A' est la projection orthogonale de O sur $\mathcal{D}$, donc la distance de O à A' est égale à la distance de O à la droite $\mathcal{D}$.
5. Considérons la droite $\mathcal{D}'$, passant par O et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ (figure 11). Un système d'équations paramétriques de cette droite est :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3\lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & 0 \end{array}\right. \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$
La projection orthogonale de O sur $\mathcal{P}$ est l'intersection de la droite $\mathcal{D}'$ avec le plan $\mathcal{P}$. elle a pour coordonnées $3/10, 1/10, 0$.

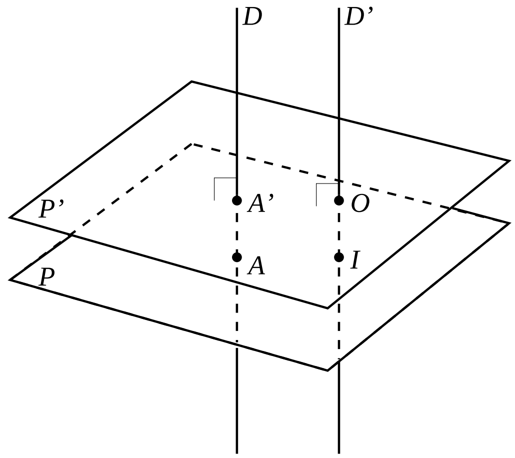

FIGURE 11 – Plans et droites parallèles.

6. Par construction, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles. Considérons les trois points O, A, A'. Par construction, les vecteurs $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont orthogonaux, donc non colinéaires. Il existe donc un unique plan passant par O, A, A'. Ce plan contient toute droite, passant par un de ses points, et parallèle à $\mathcal{D}$, en particulier $\mathcal{D}'$. Il contient donc I. Les vecteurs $\overrightarrow{A'A}$ et $\overrightarrow{OI}$ sont égaux, donc le quadrilatère $OAA'I$ est un parallélogramme. De plus, $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont orthogonaux, donc c'est un rectangle.

3 Compléments

3.1 La géométrie du triangle

Les Éléments d'Euclide, écrits au IIIe siècle avant notre ère, contenaient déjà de nombreux résultats sur la géométrie des triangles. Les formulations d'Euclide sont très différentes des nôtres, car il ne disposait pas des fonctions trigonométriques et raisonnait uniquement en termes de longueurs et d'aires. De plus il n'était pas question de traiter les quantités à ôter comme des quantités négatives à ajouter. Pour cette raison, les propositions 12 et 13 du livre II des Éléments, séparent le cas d'un triangle obtusangle (ayant un angle obtus) et celui d'un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus). La proposition 12 est énoncée comme suit. Avec un peu de réflexion, vous devriez pouvoir y reconnaître le théorème d'Al-Kashi.

Dans les triangles obtusangles, le carré du côté qui soutient l'angle obtus est plus grand que les carrés des deux autres côtés, de la quantité de deux fois le rectangle formé d'un des côtés contenant l'angle obtus, à savoir celui sur le prolongement duquel tombe la hauteur, et de la ligne prise en-dehors entre le pied de la hauteur et l'angle obtus.

L'astronome et mathématicien Al-Battani généralisa le résultat d'Euclide à la géométrie sphérique au début du Xe siècle, ce qui lui permit d'effectuer des calculs de distance angulaire entre étoiles. Ghiyath Al-Kashi, mathématicien de l'école de Samarcande, mit le théorème sous une forme utilisable pour la triangulation, au cours du XVe siècle.

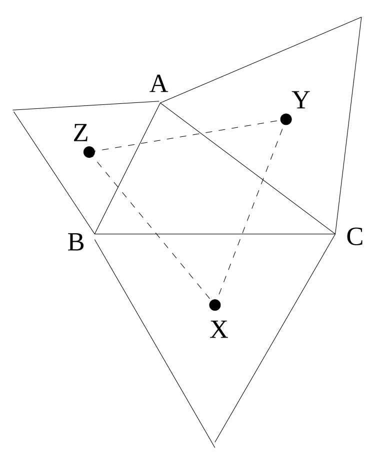

FIGURE 12 – Le théorème de Napoléon.

On ignore si le théorème suivant, attribué à Napoléon Bonaparte en 1797, était ou non connu des grecs.

Théorème 5. *Soit ABC un triangle quelconque. Soient X, Y, Z les isobarycentres des*

3 *triangles équilatéraux extérieurs au triangle ABC, construits sur chacun des trois côtés. Le triangle XYZ est équilatéral (figure* 12*).*

Il est connu que Napoléon se piquait de mathématiques, et qu'il a eu plusieurs conversations avec Laplace et Lagrange. Sur ses capacités réelles, les avis divergent, selon l'interprétation de ce que lui aurait dit Laplace. Voici deux versions.

1. *H. Poincaré :* « Nous attendions tout de vous, Général, sauf des leçons de géométrie »
2. *H.S.M. Coxeter et S.L. Greitzer :* « The last thing we want from you, General, is a lesson in engineering »

À vous de choisir ! En attendant, vous pouvez démontrer vous-même le théorème de Napoléon, par exemple en utilisant le calcul dans le plan complexe.

Le magnifique théorème suivant, en revanche, ne prête pas à polémique. Il a bien été démontré par Frank Morley (1860-1937), en 1899.

Théorème 6. *Soit ABC un triangle quelconque. Soient X, Y, Z les points d'intersection deux à deux des trissectrices adjacentes du triangle. Le triangle XYZ est équilatéral (figure* 13*).*

Pourquoi les grecs ne l'avaient-ils pas trouvé ? Peut-être parce qu'il est impossible de construire les trissectrices d'un angle à la règle et au compas. . .

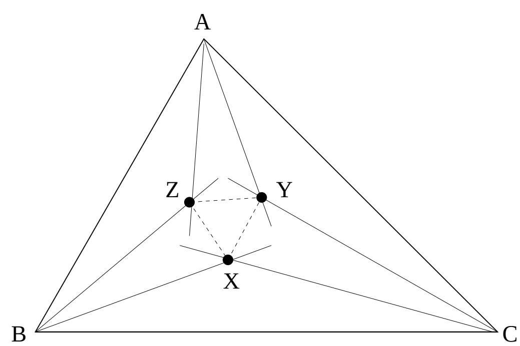

FIGURE 13 – Le théorème de Morley.

3.2 La proposition xxxii

Le père de Blaise Pascal avait peut-être acheté « Les quinze livres des éléments géométriques d'Euclide : plus le livre des donnez du mesme Euclide aussi traduict en françois par ledit Henrion, et imprimé de son vivant », en 1632. Voici ce qu'on y lit, page 54.

THEOR 22. PROP. XXXII

> En tout triangle, l'vn des costez estant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux opposez interieurs ; et de chacun triangle les trois angles interieurs sont egaux à deux droicts.

Pas de quoi s'émerveiller pensez-vous ? Commencez par vérifier que vous savez le démontrer, puis lisez la suite. La scène se passe en 1635 et c'est la sœur de Blaise qui raconte.

> Son génie pour la géométrie commença à paraître qu'il n'avait encore que douze ans, par une rencontre si extraordinaire, qu'il me semble qu'elle mérite bien d'être déduite en particulier.
>
> Mon père était savant dans les mathématiques, et il avait habitude par là avec tous les habiles gens en cette science, qui étaient souvent chez lui. Mais comme il avait dessein d'instruire mon frère dans les langues, et qu'il savait que la mathématique est une chose qui remplit et satisfait l'esprit, il ne voulut point que mon frère en eût aucune connaissance, de peur que cela ne le rendit négligent pour le latin et les autres langues dans lesquelles il voulait le perfectionner. Par cette raison il avait fermé tous les livres qui en traitent. Il s'abstenait d'en parler avec ses amis, en sa présence : mais cette précaution n'empêchait pas que la curiosité de cet enfant ne fût excitée, de sorte qu'il priait souvent mon père de lui apprendre les mathématiques. Mais il le lui refusait en lui proposant cela comme une récompense. Il lui promettait qu'aussitôt qu'il saurait le latin et le grec, il les lui apprendrait. Mon frère, voyant cette résistance, lui demanda un jour ce que c'était que cette science, et de quoi on y traitait ; mon père lui dit en général que c'était le moyen de faire des figures justes, et de trouver les proportions qu'elles ont entre elles, et en même temps lui défendit d'en parler davantage et d'y penser jamais. Mais cet esprit qui ne pouvait demeurer dans ces bornes, dès qu'il eut cette simple ouverture, que la mathématique donnait des moyens de faire des figures infailliblement justes, il se mit lui-même à rêver, et, à ses heures de récréation, étant venu dans une salle où il avait accoutumé de se divertir, il prenait du charbon et faisait des figures sur des carreaux, cherchant les moyens, par exemple, de faire un cercle parfaitement rond, un triangle dont les côtés et les angles fussent égaux, et d'autres choses semblables. Il trouvait tout cela lui seul sans peine ; ensuite il cherchait les proportions des figures entre elles. Mais comme le soin de mon père avait été si grand de lui cacher toutes ces choses qu'il n'en savait pas même les noms, il fut contraint lui-même de s'en faire. Il appelait un cercle un rond, une ligne une barre, ainsi des autres. Après ces noms il se fit des axiomes, et enfin des démonstrations parfaites ; et comme l'on va de l'un à l'autre dans ces choses, il passa et poussa sa recherche si avant, qu'il en vint jusqu'à la trente-deuxième proposition du premier livre d'Euclide. Comme il en était là-dessus, mon père entra par hasard dans le lieu où il était, sans que

mon frère l'entendît ; il le trouva si fort appliqué, qu'il fut longtemps sans s'apercevoir de sa venue. On ne peut dire lequel fut le plus surpris ; ou le fils de voir son père, à cause de la défense expresse qu'il lui en avait faite, ou le père de voir son fils au milieu de toutes ces choses. Mais la surprise du père fut bien plus grande lorsque lui ayant demandé ce qu'il faisait, il lui dit qu'il cherchait telle chose, qui était la trente-deuxième proposition du premier livre d'Euclide. Mon père lui demanda ce qui l'avait fait penser à cela. Il dit que c'était qu'il avait trouvé telle chose. Et sur cela, lui ayant fait encore la même question, il lui dit encore quelques démonstrations qu'il avait faites ; et enfin en rétrogradant et s'expliquant toujours par les noms de rond et de barre, il en vint à ses définitions et à ses axiomes.

Mon père fut si épouvanté de la grandeur et de la puissance de ce génie, que sans lui dire un mot il le quitta et alla chez M. Le Pailleur, qui était son ami intime, et qui était aussi très savant. Lorsqu'il y fut arrivé, il demeura immobile comme transporté. M. Le Pailleur, voyant cela, et voyant même qu'il versait quelques larmes, fut épouvanté, et le pria de ne lui pas celer plus longtemps la cause de son déplaisir. Mon père lui répondit : « Je ne pleure pas d'affliction, mais de joie ; vous savez le soin que j'ai pris pour ôter à mon fils la connaissance de la géométrie, de peur de le détourner de ses autres études : cependant voyez ce qu'il a fait.» Sur cela il lui montra même ce qu'il avait trouvé, par où l'on pouvait dire en quelque façon qu'il avait trouvé la mathématique.

M. Le Pailleur ne fut pas moins surpris que mon père l'avait été, et lui dit qu'il ne trouvait pas juste de captiver plus longtemps cet esprit, et de lui cacher encore cette connaissance ; qu'il fallait lui laisser voir les livres sans le retenir davantage.

Mon père, ayant trouvé cela à propos, lui donna les Éléments d'Euclide, pour les lire à ses heures de récréation. Il les vit et les entendit tout seul, sans avoir jamais eu besoin d'explication ; et pendant qu'il les voyait, il composait et allait si avant, qu'il se trouvait régulièrement aux conférences qui se faisaient toutes les semaines, où tous les habiles gens de Paris s'assemblaient pour porter leurs ouvrages, et pour examiner ceux des autres. Mon frère tenait fort bien son rang, tant pour l'examen que pour la production ; car il était de ceux qui y portaient le plus souvent des choses nouvelles. On voyait souvent aussi dans ces assemblées des propositions qui étaient envoyées d'Allemagne et d'autres pays étrangers, et on prenait son avis sur tout avec autant de soin que de pas un autre ; car il avait des lumières si vives, qu'il est arrivé qu'il a découvert des fautes dont les autres ne s'étaient point aperçus. Cependant il n'employait à cette étude que les heures de récréation ; car il apprenait le latin sur des règles que mon père lui avait faites exprès. Mais comme il trouvait dans cette science la vérité qu'il avait toujours cherchée si ardemment, il en était si satisfait, qu'il y mettait tout son esprit ; de sorte

> que, pour peu qu'il s'y occupât, il y avançait tellement, qu'à l'âge de seize ans il fit un Traité des Coniques qui passa pour un si grand effort d'esprit, qu'on disait que depuis Archimède on n'avait rien vu de cette force. Tous les habiles gens étaient d'avis qu'on l'imprimât dès lors, parce qu'ils disaient qu'encore que ce fût un ouvrage qui serait toujours admirable, néanmoins, si on l'imprimait dans le temps que celui qui l'avait inventé n'avait encore que seize ans, cette circonstance ajouterait beaucoup à sa beauté : mais comme mon frère n'a jamais eu de passion pour la réputation, il ne fit point de cas de cela ; et ainsi, cet ouvrage n'a jamais été imprimé.

3.3 Les Sangakus

La bataille de Sekigahara s'est déroulée les 20 et 21 octobre 1600 sous une pluie battante. Elle allait décider de l'avenir du pays pour 2 siècles et demi. Le vainqueur, Ieyasu Tokugawa, s'empara du pouvoir et transféra la capitale dans une petite bourgade tranquille promise à un certain avenir : l'ancienne Edo devint finalement Tokyo. Sous l'ère Edo donc, les dirigeants successifs appliquèrent une stricte politique d'isolement qui permit de maintenir la paix. Commerçants chinois, missionnaires européens, tous ces fauteurs de troubles porteurs d'idées nouvelles n'étaient pas les bienvenus. Ceci engendra le développement de particularités culturelles originales dans tous les domaines, du théâtre à la poésie, en passant par la musique... et les mathématiques. Certains prirent l'habitude d'accrocher au fronton des temples des planches de bois décorées exposant des énigmes mathématiques, les *sangakus*. Exposés aux intempéries et à l'indifférence, beaucoup de ces sangakus du XVII^e au XIX^e siècle se sont perdus : environ 800 seulement ont été conservés. Les auteurs viennent de toutes les classes sociales, jeunes ou vieux, hommes ou femmes. Offrande aux Dieux, ex-voto, publicité, ostentation ou simple amusement ? Si le sens religieux ou mystique s'est perdu, en revanche l'intérêt esthétique et la signification mathématique restent parfaitement clairs. Jusque de nos jours, des passionnés affichent encore leurs énigmes, et il en est même qui en proposent sur le web. Ce sont en général des problèmes de géométrie euclidienne, à base de cercles, de carrés et de triangles.

Nous vous proposons celui de la figure 14. Dans un cercle de rayon R on trace 4 cercles dans chacun des quarts du cercle initial, tangents entre eux et au grand cercle. Entre ces 4 cercles, on considère le cercle tangent aux 4, concentrique au grand cercle. Soit r son rayon : quel est le rapport de r à R ? Essayez de jouer le jeu : pas de logiciel de calcul, pas d'équation algébrique, pas de nombres complexes... Après tout peu importe : faites comme vous voulez, mais trouvez $3-2\sqrt{2}$.

FIGURE 14 – Sangaku du temple d'Isaniwa Jinjya, 107 × 77 cm (1937)

3.4 La règle de Sarrus

Âgé de 17 ans, Pierre-Frédéric Sarrus [1], natif de Saint-Affrique dans l'Aveyron, descend à Montpellier pour y faire ses études. Nous sommes à la rentrée 1815, Napoléon vient d'être chassé du pouvoir, et il ne fait pas bon être à la fois protestant et bonapartiste. Sarrus, qui hésite encore entre mathématiques et médecine, va l'apprendre à ses dépens. Pour exercer la médecine, il faut un « certificat de bonne vie et mœurs », qu'il demande au maire de Saint-Affrique. Voici la réponse.

> Le maire pense qu'un jeune homme auteur et propagateur de chansons séditieuses, outrageantes pour le roi et la famille royale, qui avant l'interrègne se permit d'arracher et de fouler aux pieds le ruban blanc que portait à la boutonnière un de ses camarades, et qui, dans une autre circonstance, lui prend la fleur de lys et fait semblant de la conspuer, ne peut être un bon citoyen, et ne mérite pas le certificat qu'il demande.

Ce sera donc les mathématiques. Il deviendra professeur et même doyen de la Faculté des Sciences de Strasbourg. Il est l'auteur de publications d'un nombre et d'un niveau tout à fait respectables, et il est quelque peu injuste qu'il soit surtout connu pour sa règle de calcul d'un déterminant d'ordre 3, qui n'est au fond qu'une astuce mnémotechnique, et qu'il n'a probablement pas publiée lui-même. Elle apparaît en 1846 dans les « Éléments d'Algèbre » de P.J.E. Finck, son collègue à l'Université de Strasbourg, à propos de la résolution des systèmes linéaires 3×3.

> Pour calculer, dans un exemple donné, les valeurs de x, y, et z, M. Sarrus a imaginé la méthode pratique suivante, qui est fort ingénieuse. D'abord on peut calculer le dénominateur, et à cet effet on écrit les coefficients des

1. J.-B. Hirriart-Urruty et H. Caussinus : Sarrus, Borel, Deltheil. Le Rouergue et ses mathématiciens *Gazette de la SMF (104) p. 88–97 (2005)*

inconnues ainsi

$$\begin{array}{rccc} & a & b & c \\ & a' & b' & c' \\ & a'' & b'' & c'' \\ \text{On répète les trois premiers} & a & b & c \\ \text{et les trois suivants} & a' & b' & c' \end{array}$$

Alors partant de a, on prend diagonalement du haut en bas, en descendant à la fois d'un rang, et reculant d'autant à droite, $ab'c''$; on part de a' de même, et on a $a'b''c$; de a'', et on trouve $a''bc'$; on a ainsi les trois termes positifs (c'est-à-dire à prendre avec leurs signes) du dénominateur. On commence ensuite par c et descendant de même vers la gauche on a $cb'a''$, $c'b''a$, $c''ba'$, ou les trois termes négatifs (ou plutôt les termes qu'il faut changer de signe).

3.5 Les géodésiens

Si dans un triangle on connaît les longueurs de deux côtés et la valeur de l'angle entre ces deux côtés, alors on peut calculer l'autre côté et les deux autres angles, grâce au théorème d'Al-Kashi. De même si on connaît la longueur d'un côté et la valeur des deux angles à ses extrémités, alors on peut calculer les longueurs des deux autres côtés et l'angle restant. Connus au moins depuis Euclide, ces résultats ont été longtemps utilisés pour les calculs de longueur, tant en astronomie que pour les relevés terrestres. Il sont la base de la *triangulation*, seule méthode possible pour mesurer de grandes distances, avant le laser et les satellites.

Ses réflexions sur la gravitation universelle avaient conduit Newton à affirmer que la Terre est un ellipsoïde aplati aux pôles (Principia Naturalis, 1687). Depuis, l'Europe savante, et en particulier l'Académie Royale des Sciences se passionnait pour la vérification de cette affirmation. Les Cassini, père puis fils, avaient recueilli une masse impressionnante de données en triangulant le territoire français. Leurs conclusions semblaient infirmer celles de Newton. La polémique s'étend sur des centaines de pages dans les comptes-rendus de l'Académie pour les années 1720. Arguant de considérations géopolitiques autant que scientifiques, le secrétaire de l'Académie Maurepas, réussit à persuader le roi Louis XV de financer deux expéditions. L'une ira en Laponie mesurer un degré de méridien au voisinage du pôle, l'autre devra mesurer un degré de méridien à l'équateur. Si la Terre est bien aplatie, un degré de méridien au pôle doit être plus court qu'en France, et à l'équateur il doit être plus long.

Le 16 mai 1735, l'expédition de l'équateur, composée de dix scientifiques et ingénieurs s'embarque à La Rochelle, en direction du Pérou, une colonie espagnole qui recouvrait la plus grande partie de la Bolivie, de l'Equateur et du Pérou actuels. Il est impossible de décrire ici l'extraordinaire aventure scientifique et humaine que fut cette expédition[2]. Il y eut dans la dizaine d'années que dura cette épopée, deux meurtres,

2. F. Trsytram : Le procès des étoiles, *Seghers, Paris (1979)*

une dizaine de procès, d'innombrables maladies, un mort de fièvre jaune, un dans un accident d'échafaudage, un disparu dans la jungle, un mariage, des affaires de cœur, du trafic d'or et d'objets de luxe, une affaire d'espionnage.

Scientifiquement, rien ne semblait pourtant présenter de difficulté insurmontable. Pour mesurer un degré de méridien, il faut essentiellement trois étapes. La première consiste à mesurer, par arpentage direct sur le terrain, une base rectiligne. La seconde est la triangulation. On construit à partir de la base un maillage, composé de triangles dont on mesure tous les angles, et dont on calcule les longueurs des côtés. On en déduit, par projection orthogonale, la longueur d'un arc de méridien. Il reste ensuite à déterminer la différence des latitudes des deux extrémités de l'arc dont la longueur a été mesurée.

Suite aux difficultés du voyage, la mesure de la base ne put pas avoir lieu avant l'automne 1736. Une toise, spécialement amenée de Paris, sert d'étalon pour des perches en bois, que l'on met bout à bout pour mesurer, en deux équipes indépendantes, une étendue de terrain préalablement défriché, aplani et aménagé pour les mesures. Selon l'heure de la journée, il faut tenir compte des variations des longueurs des perches avec la température et l'humidité. Quand les deux équipes confrontent leurs résultats, la différence sur plus de 12 kilomètres est de l'ordre de la dizaine de centimètres !

Forts de ce succès, les savants se lancent dans une triangulation d'envergure : 43 triangles seront mesurés sur une longueur de 354 kilomètres. La région de Quito où se déroulent les mesures est montagneuse, et pour être bien visibles, les repères marquant les extrémités des triangles sont placés en altitude. Dès la première visée, les savants passent une nuit à 4600 mètres, sous une tempête de neige. Ce n'est que le début d'une épreuve de trois ans, passés pour l'essentiel sur des sentiers de montagne ou dans des campements de fortune, où ni les nombreuses maladies, ni les vols de matériel, ni la crainte des animaux sauvages ne les empêcheront de mesurer leurs triangles, toujours avec le souci de précision le plus extrême. Leur plan initial prévoyait trois équipes, mesurant chacune deux angles de chaque triangle, de manière à ce que tous les angles soient systématiquement mesurés deux fois. Même si les dissensions et les circonstances les empêcheront de s'en tenir à un programme aussi contraignant, c'est la satisfaction du travail bien fait qui domine fin 1739. Ils s'offrent même le luxe, nécessaire à leurs yeux, de mesurer une deuxième base à l'autre extrémité de leur triangulation, afin de vérifier leurs calculs en les reprenant à l'envers. Tous pensent que le plus facile reste à faire : déterminer la latitude des deux extrémités de l'arc. Il leur faudra encore des années de travail et de polémique pour parvenir à un résultat.

Non pas que l'enjeu scientifique soit bien grand : en 1737, une mauvaise nouvelle leur est parvenue. Fortement aidé par l'astuce et la puissance de calcul de Clairaut, Maupertuis, qui dirigeait l'expédition en Laponie, n'a mis que quelques mois à ramener le résultat qu'on attendait : la Terre est bien aplatie aux pôles. Maupertuis s'est déjà fait représenter en majesté pour la postérité, devant un globe terrestre exagérément aplati, la main négligemment posée sur un exemplaire des *Principia Naturalis* de Newton !

Longtemps après cette aventure, la triangulation de la terre devait occuper encore de nombreux mathématiciens. Enjeux scientifiques, mais aussi économiques et surtout militaires, les raisons pour établir des cartes précises, et donc mesurer des triangulations sur le terrain ne manquaient pas. Au cours des XVIII^e et XIX^e siècles, ces mesures furent souvent confiées à des militaires, qui devaient parfois se montrer aussi bons alpinistes que mathématiciens. Lors de la triangulation des Pyrénées en 1825, les officiers géodésiens Peytier et Hossard utilisèrent pour leurs calculs le sommet du Balaïtous (3144m). En 1865, C. Packes, pensant être le premier à réaliser l'ascension de ce pic, fut plutôt déçu d'y trouver le repère que Peytier et Hossard avaient édifié 40 ans plus tôt. Un sommet proche a été baptisé de leurs noms, et un autre s'appelle « pointe des géodésiens ». Dans les Alpes, la pointe Helbronner, la pointe Dufour, la pointe Durand portent aussi des noms de géodésiens.

3.6 Le cinquième postulat

Les *Éléments* sont un traité mathématique et géométrique, constitué de 13 livres organisés thématiquement, probablement écrit par Euclide vers 300 avant J.-C. Il comprend une collection de définitions, axiomes, théorèmes et démonstrations sur la géométrie et les nombres.

C'est le plus ancien exemple connu d'un traitement axiomatique et systématique de la géométrie et son influence sur le développement de la science occidentale est fondamentale. Il s'agit du livre de mathématiques le plus lu au cours de l'histoire : les Éléments furent l'un des premiers livres imprimés et ont connu depuis plus de 1000 éditions. Pendant des siècles, vos prédecesseurs ont appris les mathématiques non pas dans des polycopiés, mais dans les Éléments.

Le livre I contient 5 postulats de géométrie plane.

1. Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques.
2. Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
3. Etant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
4. Tous les angles droits sont congruents
5. Si deux droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côte soit inférieure à deux angles droits, alors ces deux droites sont forcément sécantes de ce côté.

La contraposée du cinquième postulat est que si deux droites ne se coupent pas, alors la somme des angles intérieurs à toute sécante est égale à π. En conséquence, par un point donné, il ne peut passer qu'une parallèle à une droite donnée.

Pour cette raison, le cinquième postulat s'appelle le *postulat des parallèles*. Il a toujours semblé moins évident que les autres, et de nombreux mathématiciens ont pensé qu'il pouvait être démontré à partir des précédents. Pendant des siècles, toutes les tentatives échouèrent. La plupart d'entre elles étaient des essais de démonstration par l'absurde. Nombreux furent ceux qui conclurent à une contradiction devant ce qu'ils percevaient comme une impossibilité « évidente » mais qui n'était nullement une contradiction mathématique. Parmi ces courageux, Giovanni Saccheri (1667-1733) mérite une mention spéciale. En 1733, il publie « Euclides ab omni naevo vindicatus » (Euclide lavé de toute tache). Partant du postulat que par un point on peut faire passer une infinité de droites distinctes qui ne coupent pas une droite donnée, Saccheri démontre quantité de théorèmes, et devant leur évidente bizarrerie, conclut qu'il a démontré par l'absurde le cinquième postulat d'Euclide.

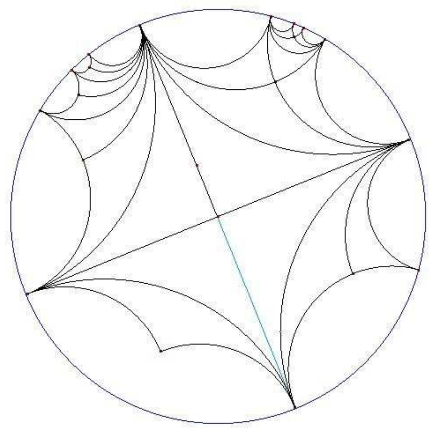

FIGURE 15 – Le disque de Poincaré : modèle de la géométrie hyperbolique.

Pourtant, les résultats de Saccheri sont maintenant des théorèmes connus de la *géométrie hyperbolique*. Ce n'est qu'au XIX^{e} siècle que Lobachevski, Boliaï, et sans doute Gauss, reconnurent qu'il était impossible de démontrer le cinquième postulat d'Euclide : on obtient simplement des géométries différentes avec des postulats différents.

1. par un point ne passe aucune parallèle à une droite donnée : *géométrie sphérique*
2. par un point passe exactement une parallèle à une droite donnée : *géométrie euclidienne*
3. par un point passe une infinité de parallèles à une droite donnée : *géométrie hyperbolique*

Parmi les conséquences, la somme des angles d'un triangle, qui vaut π en géométrie euclidienne, est supérieure à π en géométrie sphérique, et inférieure à π en géométrie hyperbolique. Voici l'expression du théorème d'Al-Kashi 4 dans les trois géométries.

1. *géométrie sphérique :* $\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha)$
2. *géométrie euclidienne :* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$
3. *géométrie hyperbolique :* $\cosh(a) = \cosh(b)\cosh(c) - \sinh(b)\sinh(c)\cos(\alpha)$

La géométrie sphérique est facile à visualiser : sur une sphère en dimension 3, il suffit de baptiser « droite » tout cercle de rayon maximal (intersection de la sphère avec un plan passant par le centre). La géométrie hyperbolique est moins facile à imaginer. Henri Poincaré (1854-1912) a proposé deux modèles équivalents. Dans le premier, les points sont ceux d'un demi-plan de la géométrie euclidienne, mais on appelle « droite » les demi-cercles centrés sur l'axe des abscisses. Dans le second, les points sont ceux d'un disque, et les « droites » sont les arcs de cercle qui coupent orthogonalement le cercle bordant le disque. La figure 15 montre des droites hyperboliques, soit orthogonales deux à deux, soit parallèles. Elles forment des « triangles » rectangles dont deux côtés sont infinis et deux angles nuls.

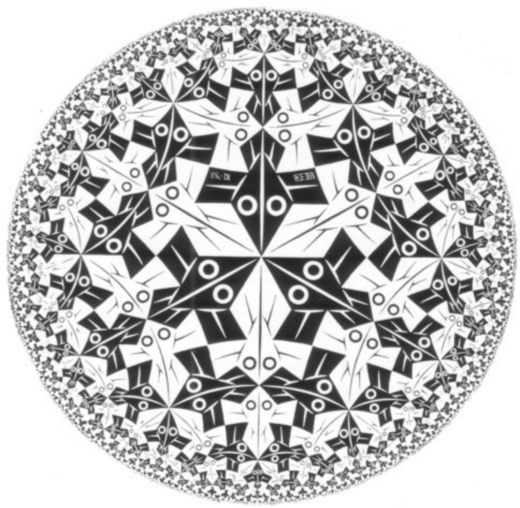

FIGURE 16 – « Limite circulaire » de M.C. Escher.

Les triangles de la figure 15 constituent un pavage du plan hyperbolique. Les possibilités pour paver le plan hyperbolique sont beaucoup plus étendues qu'en géométrie euclidienne : on peut par exemple utiliser des pavés à 4 côtés dont deux angles opposés valent $\pi/3$, et les deux autres $\pi/2$: ce pavage est illustré par la figure 16. Le peintre hollandais M.C. Escher était fasciné par la symétrie et l'infini mais il ne connaissait pas les mathématiques quand il a réalisé cette gravure. Après avoir vu ses œuvres, le mathématicien H.S.M. Coxeter demanda à le rencontrer, et lui expliqua qu'il avait réinventé les pavages du plan hyperbolique.