Dimension finie

Bernard Ycart

Ce chapitre est fondamental : les espaces vectoriels vous accompagneront tout au long de vos études mathématiques, et il est indispensable d'avoir compris les espaces de dimension finie avant d'aller plus loin. Même si les espaces vectoriels vous sont présentés ici sous forme assez générale, l'objectif principal est de comprendre le cas de $\mathbb{R}^n$, l'espace vectoriel des n-uplets de réels. N'hésitez pas à vous reporter à l'intuition géométrique que vous avez des vecteurs en dimension 2 et 3.

Table des matières

8 novembre 2011

1 Cours

1.1 Espaces et sous-espaces

Nous reprenons dans ce chapitre, de manière plus détaillée, la théorie des espaces vectoriels de dimension finie. Dans la mesure où il ne sera question que de vecteurs, abandonner les flèches au-dessus de leurs écritures ne devrait pas introduire de confusion.

Un espace vectoriel est un ensemble sur lequel sont définies
- une addition interne (on peut ajouter entre eux deux éléments de l'ensemble) ;
- une multiplication externe (on peut multiplier un élément de l'ensemble par un nombre réel).

Ces deux opérations doivent vérifier certaines propriétés de compatibilité qui sont listées dans la définition 1.

Définition 1. *On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si E est muni d'une addition et d'une multiplication externe vérifiant les propriétés suivantes.*

- Addition : $\left\{\begin{array}{lcl} E\times E & \longrightarrow & E \\ (v,w) & \longmapsto & v+w \end{array}\right.$
  1. Associativité : $\forall u,v,w\in E\,,\quad u+(v+w)=(u+v)+w$
  2. Elément neutre : $\exists e\in E\,,\ \forall v\in E\,,\quad v+e=e+v=v$
  3. Opposé : $\forall v\in E\,,\exists v'\in E\,,\quad v+v'=v'+v=e$
  4. Commutativité : $\forall v,w\in E\,,\quad v+w=w+v$

  Ces propriétés font de $(E,+)$ un groupe commutatif.
- Multiplication externe : $\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,v) & \longmapsto & \lambda\, v \end{array}\right.$
  5. Associativité : $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}\,,\ \forall v\in E\,,\quad \lambda(\mu\, v)=(\lambda\mu)\, v$
  6. Elément neutre : $\forall v\in E\,,\quad 1\, v=v$
  7. Distributivité (1) : $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}\,,\ \forall v\in E\,,\quad (\lambda+\mu)\, v=\lambda\, v+\mu\, v$
  8. Distributivité (2) : $\forall \lambda\in\mathbb{R}\,,\ \forall v,w\in E\,,\quad \lambda\,(v+w)=\lambda\, v+\lambda\, w$

La proposition suivante nous autorisera à noter 0 l'élément neutre pour l'addition (nous l'appellerons « vecteur nul ») et $-v$ l'opposé de v.

Proposition 1. *Soit E un espace vectoriel.*

1. *Le produit par le réel 0 d'un vecteur v quelconque est l'élément neutre pour l'addition :*
$$\forall v\in E\,,\quad 0\, v=e\,.$$
2. *Le produit par le réel -1 d'un vecteur v quelconque est son opposé pour l'addition :*
$$\forall v\in E\,,\quad v+(-1)\, v=e\,.$$

Démonstration : Notons (provisoirement) v' l'opposé de v pour l'addition : $v + v' = e$. En utilisant les propriétés de la définition 1 :

$$\begin{array}{rcll} 0\,v & = & 0\,v + e & \text{par } \mathit{2.} \\ & = & 0\,v + (v + v') & \text{par } \mathit{3.} \\ & = & 0\,v + (1\,v + v') & \text{par } \mathit{6.} \\ & = & (0\,v + 1\,v) + v' & \text{par } \mathit{1.} \\ & = & (0 + 1)\,v + v' & \text{par } \mathit{7.} \\ & = & 1\,v + v' = v + v' = e & \text{par } \mathit{6.} \end{array}$$

Ceci démontre le premier point. Pour le second, il suffit d'écrire

$$v + (-1)\,v = 1\,v + (-1)\,v = (1 + (-1))\,v = 0\,v = e\ .$$

□

L'exemple fondamental est l'ensemble des *n-uplets de réels :*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)\ ,\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

L'ensemble des n-uplets de réels (couples pour $n = 2$, triplets pour $n = 3$, ...), est muni de l'addition et de la multiplication par un réel, coordonnée par coordonnée.

- *Addition :* $(1, 2, 3, 4) + (3, -1, -2, 2) = (4, 1, 1, 6)$
- *Multiplication externe :* $(-2)(3, -1, -2, 2) = (-6, 2, 4, -4)$

Le singleton contenant seulement le vecteur nul est un espace vectoriel particulier.

L'associativité de l'addition permet d'écrire (sans parenthèses) des *combinaisons linéaires* de vecteurs.

Définition 2. *Soient $v_1, \ldots, v_n$ n vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle* combinaison linéaire *de $v_1, \ldots, v_n$, tout vecteur s'écrivant :*

$$\lambda_1\,v_1 + \cdots + \lambda_n\,v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,v_i\ ,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels.

Il est inutile de s'inquiéter de la quantité de propriétés à vérifier dans la définition 1. Dans tous les exemples que l'on rencontrera, les opérations sont parfaitement naturelles et leurs propriétés évidentes. On ne vérifie d'ailleurs jamais les 8 propriétés de la définition 1. La raison pour laquelle c'est inutile est que tous les espaces vectoriels que l'on utilise sont des *sous-espaces* d'un espace vectoriel, c'est-à-dire qu'ils sont des sous-ensembles, sur lesquels on applique localement les opérations de l'espace entier.

Définition 3. *Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E. On dit que F est un* sous-espace vectoriel *de E s'il est un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication externe de E.*

Observons que tout sous-espace vectoriel de E contient au moins le vecteur nul. La notion prend tout son intérêt grâce au théorème suivant.

Théorème 1. *Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-ensemble non vide de E. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :*

$$\begin{array}{ll} \forall v, w \in F & v + w \in F \; ; \\ \forall v \in F \; , \; \forall \lambda \in \mathbb{R} & \lambda v \in F \; . \end{array} \tag{1}$$

Démonstration : Parmi les 8 propriétés de la définition 1, celles qui ne font intervenir que le quantificateur $\forall$ (associativités, commutativité, distributivités), puisqu'elles sont vraies dans E, restent vraies dans F à cause de (1). Il suffit donc de vérifier les 2 propriétés impliquant une existence (élément neutre et opposé). Nous devons démontrer que F contient le vecteur nul, ainsi que l'opposé de tout vecteur de F. D'après le premier point de la proposition 1, le vecteur nul s'écrit $0\,v$ pour tout vecteur v de E, donc pour tout vecteur de F. Comme F est non vide, le vecteur nul est donc dans F. De même si v est un vecteur de F, alors son opposé, qui s'écrit $(-1)\,v$ d'après le second point de la proposition 1, est aussi dans F. □

Théorème 2. *Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-ensemble non vide de E. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. *F est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *F contient toutes les combinaisons linéaires de 2 de ses vecteurs.*

$$\forall v, w \in F \; , \; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \; , \quad \lambda\, v + \mu\, w \in F \; .$$

3. *pour tout $n \geqslant 1$, F contient toutes les combinaisons linéaires de n de ses vecteurs.*

$$\forall v_1, \ldots, v_n \in F \; , \; \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \; , \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i \in F \; .$$

Démonstration : Rappelons que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si il vérifie (1). L'équivalence entre (1) et *2* est un exercice facile, laissé au lecteur. L'implication *3* $\Longrightarrow$ *2* est évidente. Nous allons démontrer la réciproque *2* $\Longrightarrow$ *3*, par récurrence sur n. Notons $H(n)$ l'hypothèse de récurrence :

$$H(n) \; : \qquad \forall v_1, \ldots, v_n \in F \; , \; \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \; , \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i \in F \; .$$

Le point *2* est $H(2)$, et il implique $H(1)$ (cas particulier $\mu = 0$). Supposons que $H(n)$ soit vrai. Soient $v_1, \ldots, v_{n+1}$ $n+1$ vecteurs de F et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ $n+1$ réels. Ecrivons

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i\, v_i = v + \lambda_{n+1}\, v_{n+1} \; ,$$

avec
$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i$$
Le vecteur v appartient à F, par $H(n)$. La combinaison linéaire $v+\lambda_{n+1}v_{n+1}$ appartient à F d'après $H(2)$, d'où le résultat. □

Comme conséquence directe des théorèmes 1 ou bien 2, on vérifie facilement le résultat suivant.

Proposition 2. *L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel en général (pensez à deux droites distinctes).

1.2 Combinaisons linéaires

D'après le théorème 2, un sous-espace vectoriel contient toutes les combinaisons linéaires d'un nombre quelconque de vecteurs : pour tout entier n, pour tous vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de E, et pour tous réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$,
$$\lambda_1 \, v_1 + \cdots + \lambda_n \, v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i \in E \; .$$
Une des manières de fabriquer un sous-espace vectoriel est de partir d'un ensemble quelconque d'éléments, puis de lui ajouter toutes les combinaisons linéaires de ces éléments.

Définition 4. *Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{V}$ un ensemble non vide (fini ou non) de vecteurs de E. On appelle* sous-espace engendré *par $\mathcal{V}$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini quelconque d'éléments de $\mathcal{V}$.*

L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel, d'après le théorème 2. Le même théorème implique aussi que tout espace vectoriel contenant $\mathcal{V}$ doit contenir toutes les combinaisons linéaires de ses éléments. Donc le sous-espace engendré par $\mathcal{V}$ est inclus dans tout sous-espace contenant $\mathcal{V}$.

Une *famille* finie de vecteurs est un n-uplet de vecteurs.
$$\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$$
L'*espace vectoriel engendré* par $\mathcal{F}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_n$.
$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i \, , \; \forall i = 1, \ldots, n \; \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} \; .$$

À cause de la commutativité de l'addition, changer l'ordre dans lequel on écrit les vecteurs de la famille, ne modifie pas l'espace engendré.

Pour $n = 1$, l'espace engendré par un seul vecteur v (non nul) est une droite vectorielle :

$$\{ \lambda v \,,\ \lambda \in \mathbb{R} \} \,.$$

Pour $n = 2$, l'espace engendré par deux vecteurs v et w (non proportionnels) est un plan vectoriel :

$$\{ \lambda v + \mu w \,,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} \,.$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est engendré par les n vecteurs

$$(1, 0, \ldots, 0) \,,\ (0, 1, \ldots, 0) \,,\ \ldots \,,\ (0, 0, \ldots, 1) \,.$$

En effet, on peut écrire tout vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, comme la combinaison linéaire :

$$x_1\,(1, 0, \ldots, 0) + x_2\,(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + x_n\,(0, 0, \ldots, 1) \,.$$

Deux familles de vecteurs différentes peuvent engendrer le même espace vectoriel. Par exemple $\mathbb{R}^2$ est engendré par

$$\mathcal{F} = \Big((1, 0) \,,\ (0, 1) \Big) \,,$$

mais aussi par

$$\mathcal{G} = \Big((1, 1) \,,\ (1, -1) \Big) \,.$$

En effet, tout vecteur (x, y) s'écrit :

$$(x, y) = \frac{x + y}{2}\,(1, 1) + \frac{x - y}{2}\,(1, -1) \,.$$

Définition 5. *Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille d'éléments de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une* famille génératrice *si l'espace engendré par $\mathcal{F}$ est égal à E.*

Par exemple $\mathcal{F} = ((1, 0), (0, 1))$ et $\mathcal{G} = ((1, 1), (1, -1))$ sont deux familles génératrices de $\mathbb{R}^2$. Par contre $((0, 1), (0, 2))$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Les familles suivantes sont aussi des familles génératrices de $\mathbb{R}^2$.

$$\Big((1, 0), (0, 1), (1, 1) \Big) \,;\ \Big((1, 1), (1, -1), (0, 1) \Big) \,;\ \Big((1, 0), (0, 1), (1, 1), (1, -1) \Big)$$

Par rapport à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, elles contiennent des vecteurs superflus. Si dans une famille de vecteurs, un vecteur est combinaison linéaire des autres, on peut l'enlever de la famille sans changer l'espace engendré. Une famille de laquelle on ne peut rien enlever sans changer l'espace engendré est une famille libre.

Définition 6. *Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs. On dit que $\mathcal{F}$ est une* famille libre *si pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i = 0 \implies (\forall i = 1, \dots, n\,,\ \lambda_i = 0)\ .$$

Elle est dite liée *dans le cas contraire.*

On dit aussi que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont *linéairement indépendants* quand leur famille est libre.

Comme cas particuliers, une famille contenant le vecteur nul est liée ; une famille contenant un seul vecteur non nul est libre. On utilise souvent la caractérisation suivante :

Proposition 3. *Soit n un entier au moins égal à 2. Une famille de n vecteurs est* liée *si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.*

Démonstration : Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille liée. Par définition, il existe une combinaison linéaire nulle, dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i = 0\ ,$$

et au moins un des λ_i est non nul. Observons que la propriété pour une famille d'être libre ou liée ne dépend pas de l'ordre dans lequel on écrit les vecteurs. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que λ_n est non nul. On en déduit alors :

$$v_n = -\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\, v_1 + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\, v_{n-1}\right)$$

Réciproquement, supposons que v_n soit combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_{n-1}$:

$$v_n = \lambda_1 \, v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \, v_{n-1}$$

Alors :

$$\lambda_1 \, v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \, v_{n-1} - v_n = 0\ ,$$

Donc la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée. □

Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $((0, 1), (0, 2))$ est liée. A l'inverse, les familles $\mathcal{F} = ((1, 0), (0, 1))$ et $\mathcal{G} = ((1, 1), (1, -1))$ sont deux familles libres de $\mathbb{R}^2$.

Dans $\mathbb{R}^n$,

$$\Big(\ (1, 0, \dots, 0)\,,\ (0, 1, \dots, 0)\,,\ \dots\ ,\ (0, 0, \dots, 1)\Big)$$

est une famille libre.

1.3 Bases

Ce chapitre ne traite que des espaces *finiment engendrés.*

Définition 7. *On dit qu'un espace vectoriel est finiment engendré s'il est engendré par un nombre fini de vecteurs.*

Voici deux observations symétriques.

1. *Si on ajoute un vecteur à une famille génératrice, alors elle ne peut plus être libre.* En effet, tout vecteur ajouté est forcément combinaison linéaire des précédents, ce qui n'est pas possible dans une famille libre.
2. *Si on enlève un vecteur à une famille libre, alors elle ne peut plus être génératrice.* En effet, le vecteur que l'on vient d'enlever n'est pas combinaison linéaire des autres, donc il n'est pas dans l'espace engendré par les autres.

Définition 8. *On appelle* base *toute famille à la fois génératrice et libre.*

Nous avons déjà rencontré plusieurs bases. Les familles $((1,0),(0,1))$ et $((1,1),(1,-1))$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$. Dans $\mathbb{R}^n$,

$$\Big(\,(1,0,\ldots,0)\,,\;(0,1,\ldots,0)\,,\;\ldots\;,\;(0,0,\ldots,1)\,\Big)$$

est une base, que l'on appelle la *base canonique*. La proposition suivante nous permettra de parler de bases en étant assurés de leur existence. Sa démonstration montrera aussi qu'on peut extraire une base de toute famille génératrice.

Proposition 4. *Dans un espace vectoriel, différent de* $\{0\}$ *et finiment engendré, il existe une base.*

Démonstration : Soit $(v_1,\ldots,v_n)$ une famille génératrice de l'espace. Puisque cet espace est différent de $\{0\}$, au moins un des v_i est non nul. Si $v_i \neq 0$, (v_i) est une famille libre. Parmi les sous-familles, extraites de $(v_1,\ldots,v_n)$, considérons celles qui sont des familles libres, et choisissons parmi elles une famille libre ayant le plus grand nombre d'éléments. Notons m ce nombre d'éléments maximal. On peut renuméroter les v_i de sorte que $(v_1,\ldots,v_m)$ soit une famille libre. Puisque le nombre m est maximal, les vecteurs $v_{m+1},\ldots,v_n$ sont des combinaisons linéaires de $v_1,\ldots,v_m$. Donc tout vecteur est combinaison linéaire de $v_1,\ldots,v_m$. Donc $(v_1,\ldots,v_m)$ est à la fois génératrice et libre : c'est une base. □

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 3. *Dans un espace vectoriel, différent de* $\{0\}$ *et finiment engendré, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.*

Démonstration : La partie difficile de la démonstration réside dans le lemme suivant.

Lemme 1. *Si un espace possède une famille génératrice à n éléments, alors toute famille de $n+1$ éléments est liée.*

Admettons ce lemme pour l'instant. Si deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ont pour cardinaux n_1 et n_2, alors $n_2 \leqslant n_1$ d'après le lemme, car $\mathcal{B}_1$ est génératrice et $\mathcal{B}_2$ est libre. De façon symétrique, puisque $\mathcal{B}_2$ est génératrice et $\mathcal{B}_1$ est libre, $n_1 \leqslant n_2$. Donc $n_1 = n_2$, et le théorème est démontré.

La démonstration du lemme se fait par récurrence sur le cardinal de la famille génératrice. Supposons que l'espace admette une famille génératrice à un seul élément v. Soit l'espace est une droite vectorielle soit il ne contient que le vecteur nul : tous les vecteurs sont proportionnel à v. Deux vecteurs quelconques s'écrivent $\lambda\, v$ et $\mu\, v$, pour un certain couple de réels (λ, μ), et ils sont liés car, soit au moins l'un des deux est nul, soit chacun est proportionnel à l'autre (cf. proposition 3).

Supposons maintenant que le résultat du lemme soit vrai pour une famille génératrice de n vecteurs. Nous voulons passer au rang $n+1$. Considérons un espace engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_{n+1}$ et une famille de $n+2$ vecteurs $(w_1, \ldots, w_{n+2})$. Nous devons montrer qu'elle est liée.

Chacun des w_i est combinaison linéaire des v_i. Dans ces combinaisons linéaires, isolons la partie concernant v_{n+1}.

$$\forall i = 1, \ldots, n+2 \;, \quad w_i = w_i' + \lambda_i\, v_{n+1} \;,$$

où w_i' appartient au sous-espace engendré par $(v_1, \ldots, v_n)$. Si tous les λ_i sont nuls, cela signifie que les $n+2$ vecteurs w_i sont tous dans le sous-espace engendré par $(v_1, \ldots, v_n)$. La famille est donc liée, par application de l'hypothèse de récurrence. Supposons maintenant que l'un des λ_i est non nul. Quitte à changer l'ordre des vecteurs, nous pouvons supposer $\lambda_{n+2} \neq 0$. Alors v_{n+1} s'écrit :

$$v_{n+1} = \frac{1}{\lambda_{n+2}}(w_{n+2} - w_{n+2}') \;.$$

Donc,

$$\forall i = 1, \ldots, n+1 \;, \quad w_i = w_i' + \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+2}}(w_{n+2} - w_{n+2}') \;,$$

soit,

$$\forall i = 1, \ldots, n+1 \;, \quad w_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+2}} w_{n+2} = w_i' - \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+2}} w_{n+2}' \;.$$

Les $n+1$ vecteurs $w_i' - \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+2}} w_{n+2}'$, qui appartiennent à l'espace engendré par $v_1, \ldots, v_n$, sont liés, d'après l'hypothèse de récurrence. Donc il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \left(w_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+2}} w_{n+2} \right) = 0 \;.$$

Ceci entraîne que $w_1, \ldots, w_{n+2}$ sont liés, ce qui achève la démonstration du lemme. □

Le théorème 3 permet de définir rigoureusement la notion de dimension.

Définition 9. *Soit E un espace vectoriel, différent de $\{0\}$ et finiment engendré. On appelle* dimension *de E le nombre d'éléments commun à toute base de E.*

On étend la définition à un espace vectoriel contenant seulement le vecteur nul, en convenant que sa dimension est 0. Les espaces de dimension 1 sont les droites vectorielles, ceux de dimension 2 sont les plans vectoriels. L'espace $\mathbb{R}^n$ est de dimension n. Les sous-espaces de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$ s'appellent les *hyperplans* de $\mathbb{R}^n$.

Si on connaît la dimension de l'espace, il est facile de vérifier si une famille de vecteurs est ou non une base, grâce au théorème suivant.

Théorème 4. *Dans un espace vectoriel de dimension n :*

1. *toute famille libre a au plus n éléments,*
2. *toute famille libre de n éléments est une base,*
3. *toute famille génératrice a au moins n éléments,*
4. *toute famille génératrice de n éléments est une base.*

Démonstration : Le premier point découle directement du lemme 1 : toute famille ayant au moins $n+1$ vecteurs est liée.

Pour le second point, soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille libre, et v un vecteur quelconque de l'espace. D'après le premier point, $(v_1, \ldots, v_n, v)$ est forcément liée : il existe une combinaison linéaire nulle, dont les coefficients ne sont pas tous nuls. Le coefficient de v dans cette combinaison linéaire ne peut pas être nul, car $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre. Donc v est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$. Donc $(v_1, \ldots, v_n)$ est génératrice : c'est une base.

Pour le troisième point si une famille génératrice avait $n-1$ éléments, alors par le lemme 1 toute famille de n éléments serait liée, et donc aucune base ne pourrait avoir n éléments.

Le quatrième point découle de la démonstration de la proposition 4. Si une famille est génératrice, une de ses sous-familles est une base. Si la famille génératrice a n éléments, la base extraite ne peut être que la famille elle-même. □

Comme il est naturel, tout sous-espace vectoriel d'une espace vectoriel de dimension finie est lui-même de dimension finie.

Proposition 5. *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Tout sous-espace vectoriel de E est de dimension finie, inférieure ou égale à n.*

Démonstration : Soit F un sous-espace vectoriel de E. Toute famille libre d'éléments de F est aussi une famille libre dans E, elle a donc moins de n éléments d'après le point *1* du théorème 4. Considérons une famille libre d'éléments de F, de longueur maximale. Soit $(v_1, \ldots, v_m)$ cette famille. Soit v un vecteur quelconque de F. La famille $(v_1, \ldots, v_m, v)$ ne peut pas être libre. Elle est donc liée, donc v est combinaison linéaire de $(v_1, \ldots, v_m)$. La famille $(v_1, \ldots, v_m)$ est donc génératrice : c'est une base de F. □

La dimension de l'espace engendré par une famille de vecteurs est le *rang* de cette famille.

Définition 10. *On appelle* rang *d'une famille de vecteurs la dimension de l'espace vectoriel qu'elle engendre.*

Les observations suivantes sont des conséquences faciles du théorème 4 :

- le rang d'une famille de n vecteurs est au plus n
- le rang d'une famille de n vecteurs est n si et seulement si cette famille est libre
- le rang d'une famille de n vecteurs est n si et seulement si cette famille est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre.

Nous verrons plus loin un moyen systématique pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, et en extraire une base de l'espace engendré.

L'intérêt des bases est qu'elles permettent d'identifier tout espace de dimension finie à $\mathbb{R}^n$, grâce à la notion de coordonnées.

Théorème 5. *Soit E un espace de dimension n et $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Pour tout vecteur $v \in E$ il existe un n-uplet de réels $(x_1, \ldots, x_n)$ unique tel que :*

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \, b_i \; .$$

Démonstration : Comme la famille $(b_1, \ldots, b_n)$ est génératrice, v s'exprime comme combinaison linéaire de $b_1, \ldots, b_n$, d'où l'existence. Pour l'unicité, supposons que deux combinaisons linéaires soient égales.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, b_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \, b_i$$

Ceci implique

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) \, b_i = 0 \; ,$$

donc $x_i = y_i$, pour tout $i = 1, \ldots, n$, puisque $(b_1, \ldots, b_n)$ est une famille libre. □

Les réels $x_1, \ldots, x_n$ sont les *coordonnées* de v dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$.

Par exemple, les coordonnées de $(2, 3)$ dans la base $((1, 0), (0, 1))$ sont $2, 3$. Dans la base $((1, 1), (1, -1))$, ses coordonnées sont $\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$. Les coordonnées de $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont $x_1, \ldots, x_n$.

Le théorème suivant, dit « théorème de la base incomplète » montre qu'on peut fabriquer une base en complétant une famille libre par des éléments d'une famille génératrice.

Théorème 6. *Soient l, n, m trois entiers tels que $1 \leqslant l < n \leqslant m$. Soit E un espace vectoriel de dimension n, $(v_1, \ldots, v_l)$ une famille libre, et $(w_1, \ldots, w_m)$ une famille génératrice. Alors il existe $n-l$ indices $i_1, \ldots, i_{n-l} \in \{1, \ldots, m\}$ tels que*

$$(v_1, \ldots, v_l, w_{i_1}, \ldots, w_{i_{n-l}}) \,,$$

soit une base de E.

Démonstration : Appelons « famille complétée », soit la famille $(v_1, \ldots, v_l)$, soit une famille du type

$$(v_1, \ldots, v_l, w_{i_1}, \ldots, w_{i_k}) \,,$$

avec $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$. On considère l'ensemble (fini et non vide) de toutes les familles complétées libres. Dans cet ensemble, on choisit une famille ayant le plus grand nombre possible d'éléments. Soit $l + k$ ce nombre maximal d'éléments. On peut renuméroter les w_i de sorte que

$$(v_1, \ldots, v_l, w_1, \ldots, w_k)$$

soit une famille libre. Puisque k est maximal, pour $j = k+1, \ldots, m$,

$$(v_1, \ldots, v_l, w_1, \ldots, w_k, w_j)$$

est liée. Il s'ensuit que w_j est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_l, w_1, \ldots, w_k$.

Mais comme $(w_1, \ldots, w_m)$ est génératrice, tout vecteur de l'espace est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_l, w_1, \ldots, w_k$. Donc $(v_1, \ldots, v_l, w_1, \ldots, w_k)$ est une base. □

On utilise le théorème 6 le plus souvent sous la forme affaiblie suivante.

Corollaire 1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit l un entier tel que $1 \leqslant l < n$ et $(v_1, \ldots, v_l)$ une famille libre dans E. Il existe $n-l$ vecteurs $w_1, \ldots, w_{n-l}$ tels que :*

$$(v_1, \ldots, v_l, w_1, \ldots, w_{n-l})$$

soit une base de E.

1.4 Morphismes

Une application entre deux espaces vectoriels est dite *linéaire* si elle envoie une combinaison linéaire de vecteurs sur la même combinaison linéaire de leurs images.

Définition 11. *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que f est une* application linéaire *si*

$$\begin{array}{lll} \forall v, w \in E & f(v+w) & = & f(v) + f(w) \\ \forall v \in E\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} & f(\lambda v) & = & \lambda\, f(v)\,. \end{array} \qquad (2)$$

Une application linéaire f de E dans F envoie nécessairement le vecteur nul de E sur le vecteur nul de F. Elle envoie l'opposé de v sur l'opposé de $f(v)$. La proposition suivante se démontre facilement, dans le style du théorème 2.

Proposition 6. *Soient E et F deux espaces vectoriels, et f une application de E dans F. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. *f est une application linéaire.*
2. $$\forall v, w \in E\,,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,,\quad f(\lambda\, v + \mu\, w) = \lambda\, f(v) + \mu\, f(w)\ .$$
3. *Pour tout $n \geqslant 1$,*
$$\forall v_1, \ldots, v_n \in E\,,\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\,,\quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f(v_i)\ .$$

Voici quelques exemples d'applications linéaires.

- *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \mapsto (x + y, 2x + 3y)$
- *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^3$: $(x, y) \mapsto (y, x, x + y)$
- *de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^2$: $(x, y, z) \mapsto (y - x, 2z + y)$

Une application linéaire respecte la structure d'espace vectoriel : l'image d'une somme est la somme des images, l'image du produit par un réel est le produit de l'image par le même réel. D'une application entre deux structures algébriques (groupes, corps, etc. . .) qui respecte la structure, on dit qu'elle est un *morphisme*. Le vocabulaire classique est le suivant.

Définition 12. *Une application linéaire de E dans F est un*

- endomorphisme *si $E = F$,*
- isomorphisme *si elle est bijective,*
- automorphisme *si $E = F$ et l'application est bijective.*

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Théorème 7. *Soient E, F, G trois espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. La composée $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.*

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \\ u & \longmapsto & f(u) & \longmapsto & g \circ f(u) = g(f(u))\ . \end{array}$$

Démonstration : On utilise successivement la linéarité de f et celle de g.

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda\, v + \mu\, w) &= g(f(\lambda\, v + \mu\, w)) \\ &= g(\lambda\, f(v) + \mu\, f(w)) \\ &= \lambda\, g(f(v)) + \mu\, g(f(w)) \\ &= \lambda\, g \circ f(v) + \mu\, g \circ f(w)\ . \end{aligned}$$

□

Si une application f est un isomorphisme, son application réciproque, que nous noterons f^{-1} est aussi une application linéaire.

Théorème 8. *Soit f un isomorphisme de E dans F. Sa réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.*

Démonstration : Nous devons vérifier que pour tous $w, w' \in F$, et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\lambda\, w + \mu\, w') = \lambda\, f^{-1}(w) + \mu\, f^{-1}(w')$. Puisque f est bijective, il existe $v, v' \in E$ tels que $f(v) = w$ et $f(v') = w'$. Utilisons la linéarité de f pour écrire :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda\, w + \mu\, w') &= f^{-1}(\lambda\, f(v) + \mu\, f(v')) \\ &= f^{-1}(f(\lambda\, v + \mu\, v')) \\ &= \lambda\, v + \mu\, v' \\ &= \lambda\, f^{-1}(w) + \mu\, f^{-1}(w')\ . \end{aligned}$$

□

La composée de f par f^{-1} est l'application identique, ou *identité*, de E dans lui-même. C'est un automorphisme particulier, que nous noterons I_E.

$$I_E\ : E \longrightarrow E\ , \quad v \longmapsto I_E(v) = v\ .$$

Une combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire.

Théorème 9. *Soient E et F deux espaces vectoriels. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F et λ, μ deux réels. L'application $\lambda\, f + \mu\, g$ est encore une application linéaire.*

Démonstration : L'application $\lambda\, f + \mu\, g$ est celle qui à v associe $\lambda\, f(v) + \mu\, g(v)$. Sa linéarité se déduit facilement de celles de f et g. □

Nous terminons la section par des interprétations géométriques d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Considérons un plan vectoriel muni d'une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. A tout couple de réels (x, y) est associé le vecteur $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même est associée à une transformation géométrique du plan, qui à un vecteur associe un autre vecteur. En voici trois (cf. figure 1) :

- *rotation d'angle $\pi/2$*
  $(x, y) \mapsto (-y, x)$
- *symétrie par rapport à la première bissectrice*
  $(x, y) \mapsto (y, x)$
- *projection sur la première bissectrice*
  $(x, y) \mapsto ((x + y)/2, (x + y)/2)$

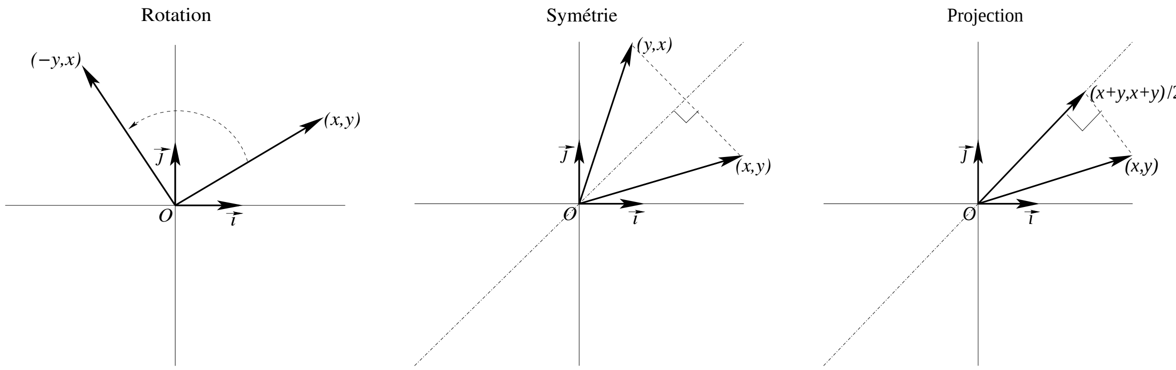

FIGURE 1 – Interprétations géométriques de trois applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: rotation d'angle $\pi/2$, symétrie par rapport à la première bissectrice, projection sur la première bissectrice.

Les rotations et les symétries sont des automorphismes du plan vectoriel. Les projections sont des endomorphismes, mais elles ne sont pas bijectives. Observons que les translations, par exemple $(x, y) \mapsto (x + 2, y - 1)$, ne sont pas linéaires. Ce sont des bijections, mais pas des automorphismes du plan vectoriel.

1.5 Images et noyaux

Qu'une application linéaire respecte les combinaisons linéaires entraîne qu'elle respecte aussi les sous-espaces vectoriels, au sens suivant.

Théorème 10. *Soient E, F deux espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F.*

1. *Soit A un sous-espace vectoriel de E. Alors*
$$f(A) = \{\, f(v)\,,\ v \in A\,\}\ ,$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. *Soit B un sous-espace vectoriel de F. Alors*
$$f^{-1}(B) = \{\, v \in E\,,\ f(v) \in B\,\}\ ,$$
est un sous-espace vectoriel de E.

L'ensemble des images par une application linéaire des éléments d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée (point *1*). L'ensemble des éléments de l'espace de départ dont l'image par une application linéaire est dans un sous-espace de l'espace d'arrivée, est un sous-espace de l'espace de départ (point *2*). Attention à la notation $f^{-1}(B)$: elle a un sens même si l'application f n'est pas bijective et donc si l'application réciproque f^{-1} n'existe pas.

Démonstration : Pour montrer qu'un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel, il suffit de vérifier qu'il est non vide, et que toute combinaison linéaire de deux de ses vecteurs reste dans l'ensemble (théorème 2). Rappelons que tout sous-espace vectoriel contient au moins le vecteur nul, et que si f est linéaire alors $f(0) = 0$. Donc le vecteur nul de F appartient à $f(A)$ et celui de E appartient à $f^{-1}(B)$. Les deux ensembles $f(A)$ et $f^{-1}(B)$ sont donc non vides.

1. Deux vecteurs quelconques de $f(A)$ s'écrivent $f(v), f(v')$, où $v, v' \in A$. Etant donnés deux réels λ et μ, $\lambda\, f(v) + \mu\, f(v')$ est l'image par f de $\lambda\, v + \mu\, v'$ qui est un vecteur de A.
2. Si v et v' sont tels que $f(v)$ et $f(v')$ appartiennent à B, alors $f(\lambda\, v + \mu\, v') = \lambda\, f(v) + \mu\, f(v') \in B$. Donc $\lambda\, v + \mu\, v' \in f^{-1}(B)$.

□

Parmi les cas particuliers du théorème 10, l'*image* et le *noyau* jouent un rôle important.

Définition 13. *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On appelle :*

1. image de f *et on note* $\mathrm{Im}(f)$ *le sous-espace vectoriel de F :*

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{\, f(v)\,,\ v \in E \,\}\ .$$

2. noyau de f *et on note* $\mathrm{Ker}(f)$ *le sous-espace vectoriel de E :*

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{\, v \in E\,,\ f(v) = 0 \,\}\ .$$

La notation Ker vient de l'allemand, où noyau se dit « Kern ».

Considérons par exemple l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f\ :\ (x, y) \longmapsto (x + y, x + y, x + y)\ .$$

Son image est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1, 1, 1)$. Son noyau est l'ensemble des vecteurs (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x + y = 0$: c'est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par le vecteur $(1, -1)$.

$$\mathrm{Im}(f) = \{\, \lambda\,(1, 1, 1)\,,\ \lambda \in \mathbb{R} \,\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(f) = \{\, \lambda\,(1, -1)\,,\ \lambda \in \mathbb{R} \,\}\ .$$

Proposition 7. *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. L'application f est :*

1. surjective *si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$,

2. injective *si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Démonstration : La caractérisation de la surjectivité est une simple traduction des définitions. Celle de l'injectivité utilise la linéarité. Soient v et w deux éléments de E.

$$f(v) = f(w) \iff f(v-w) = 0 \iff (v-w) \in \mathrm{Ker}(f)$$

Par définition, f est injective si et seulement si $f(v) = f(w)$ implique $v = w$, donc si et seulement si $(v-w) \in \mathrm{Ker}(f)$ implique $v - w = 0$, d'où le résultat. □

Le *rang* d'une application linéaire est la dimension de son image.

Définition 14. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. On appelle* rang *de f la dimension de* $\mathrm{Im}(f)$*.*

$$\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \; .$$

Supposons que E soit de dimension n et choisissons une base $(b_1, \ldots, b_n)$. L'image par f de tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $f(b_1), \ldots, f(b_n)$. Donc $\mathrm{Im}(f)$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $(f(b_1), \ldots, f(b_n))$. Le rang de f est la dimension de ce sous-espace ; c'est donc le rang de la famille de vecteurs $(f(b_1), \ldots, f(b_n))$ (cf. définition 10). Observons que le rang est inférieur ou égal aux deux dimensions des espaces vectoriels de départ et d'arrivée.

$$\mathrm{rang}(f) \leqslant \min\{\, \dim(E)\, , \, \dim(F)\, \} \; .$$

Théorème 11. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans F. L'application f est :*

1. surjective *si et seulement si l'image de toute famille génératrice dans E est une famille génératrice dans F,*
2. injective *si et seulement si l'image de toute famille libre dans E est une famille libre dans F,*
3. *bijective si et seulement si l'image de toute base de E est une base de F.*

Démonstration : Démontrons d'abord que si f est surjective alors l'image d'une famille génératrice dans E est génératrice dans F. Soit $(v_1, \ldots, v_m)$ une famille génératrice dans E. Pour tout élément w de F, il existe $v \in E$ tel que $f(v) = w$. Le vecteur v s'écrit :

$$v = \lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_m\, v_m \; .$$

Donc :

$$w = f(\lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_m\, v_m) = \lambda_1\, f(v_1) + \cdots + \lambda_m f(v_m) \; .$$

Tout vecteur w de F est combinaison linéaire de la famille $(f(v_1), \ldots, f(v_m))$, qui est donc génératrice.

Voici la réciproque. Si $(f(v_1), \ldots, f(v_m))$ est génératrice, alors un vecteur w de F quelconque s'écrit

$$w = \lambda_1\, f(v_1) + \cdots + \lambda_m f(v_m) = f(\lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_m\, v_m) \; .$$

Donc w est l'image par f d'un vecteur de E : f est bien surjective.

Démontrons maintenant que si f est injective alors l'image d'une famille libre dans E est une famille libre dans F. Soit $(v_1, \ldots, v_l)$ une famille libre dans E. Supposons que

$$\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_l) = 0 \;.$$

Par la linéarité de f,

$$\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_l f(v_l) = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_l v_l) = 0 \;.$$

Si f est injective, alors le seul vecteur d'image nulle est le vecteur nul, donc $\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n = 0$. Mais $(v_1, \ldots, v_l)$ est une famille libre. Donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Montrons la réciproque. Si l'image de toute famille libre est une famille libre, alors l'image d'un vecteur non nul est un vecteur non nul. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et f est injective, par la proposition 7.

Pour terminer la démonstration, il suffit d'observer qu'une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective ; d'autre part une famille est une base si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice. Le point *3* du théorème est donc conséquence des deux précédents. $\square$

La conjonction des théorèmes 11 et 4 implique les relations suivantes entre les dimensions des espaces de départ et d'arrivée.

Corollaire 2. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F.*

1. *Si f est surjective alors* $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.
2. *Si f est injective alors* $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.
3. *Si f est bijective alors* $\dim(E) = \dim(F)$.

La dimension est donc une forte contrainte sur la nature des applications linéaires. On peut aussi voir cette contrainte comme suit.

Corollaire 3. *Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension. Une application linéaire de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective ou surjective.*

Il ne peut exister un isomorphisme entre deux espaces vectoriels que s'ils ont la même dimension. Réciproquement, si deux espaces ont la même dimension, on peut toujours construire un isomorphisme entre eux, en envoyant une base de l'un sur une base de l'autre. En particulier, tous les espaces vectoriels de dimension n sont isomorphes à $\mathbb{R}^n$. Si E est de dimension n, avec une base $(b_1, \ldots, b_n)$, tous les vecteurs de E ont une décomposition unique

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \, b_i \;,$$

où les x_i sont les coordonnées de v (théorème 5). L'application de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à v associe le n-uplet de ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$.

La somme des dimensions de l'image et du noyau est la dimension de l'espace de départ : le théorème 12 ci-dessous, est le *théorème du rang*.

Théorème 12. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F.*

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) .$$

Démonstration : Soient k et l les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Soit $(b_1, \ldots, b_k)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $(c_1, \ldots, c_l)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. Pour $j = 1, \ldots, l$, soit v_j un vecteur de E tel que $f(v_j) = c_j$. Nous allons démontrer que

$$\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_k, v_1, \ldots, v_l)$$

est une base de E, ce qui entraîne que $\dim(E) = k + l$.

Montrons d'abord que c'est une famille libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ et $\mu_1, \ldots, \mu_l$, $k+l$ réels. Posons

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, b_i \quad \text{et} \quad w = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \, v_j$$

Puisque $v \in \mathrm{Ker}(f)$, l'image par f du vecteur $v + w$ est

$$f(v+w) = f(w) = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \, f(v_j) = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \, c_j$$

Si $v + w = 0$, alors $f(v + w) = 0$, ce qui entraîne la nullité des μ_j, car $(c_1, \ldots, c_l)$ est une famille libre. Alors $v = 0$, ce qui entraîne la nullité des λ_i, car $(b_1, \ldots, b_k)$ est une famille libre. Donc $\mathcal{B}$ est une famille libre.

Il reste à montrer que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice. Soit v un vecteur de E. Comme le vecteur $f(v)$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$, il est combinaison linéaire de $c_1, \ldots, c_l$:

$$f(v) = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \, c_j$$

Donc :

$$f(v) = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \, f(v_j) = f\left(\sum_{j=1}^{l} \mu_j \, v_j\right)$$

Ceci entraîne :

$$f\left(v - \sum_{j=1}^{l} \mu_j \, v_j\right) = 0 ,$$

donc

$$\left(v - \sum_{j=1}^{l} \mu_j\, v_j\right) \in \mathrm{Ker}(f)\ .$$

Donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que

$$\left(v - \sum_{j=1}^{l} \mu_j\, v_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, b_i\ ,$$

soit

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, b_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j\, v_j\ .$$

□

1.6 Ecriture matricielle

Les espaces vectoriels considérés sont tous de dimension finie $\geqslant 1$. Observons d'abord qu'une application linéaire est déterminée par l'image qu'elle donne d'une base de l'espace de départ.

Proposition 8. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Soit $(w_1, \ldots, w_n)$ un n-uplet de vecteurs de F. Il existe une application linéaire unique f telle que pour tout $i = 1, \ldots, n$, $f(b_i) = w_i$.*

Démonstration : Tout vecteur v de E s'écrit de façon unique sous la forme

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i\, b_i\ ,$$

où les x_i sont les coordonnées de v dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$. Puisque f doit être linéaire, l'image de v ne peut être que

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, f(b_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, w_i\ .$$

□

Si on choisit une base dans l'espace d'arrivée, alors les images des vecteurs de la base de départ ont des coordonnées dans cette base. S'il y a n vecteurs de base au départ et m à l'arrivée, l'application linéaire est déterminée par $m \times n$ réels : m coordonnées pour chacun des n vecteurs de base. Une *matrice* est la représentation sous forme de tableau de ces $m \times n$ réels.

Notons $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de l'espace de départ, et $(c_1, \ldots, c_m)$ une base de l'espace d'arrivée. Soit $a_{i,j}$ la i-ième coordonnée de $f(b_j)$:

$$\forall j = 1, \ldots, n \ , \quad f(b_j) = a_{1,j}\, c_1 + \cdots + a_{i,j}\, c_i + \cdots + a_{m,j}\, c_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, c_i \ .$$

Les coordonnées des vecteurs images $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ sont conventionnellement notées en colonnes. L'indice i (des vecteurs de la base d'arrivée) est l'indice de ligne, l'indice j (des vecteurs de la base de départ) est l'indice de colonne.

$$\begin{array}{ccccc|cc}
 & & \text{départ} & & & & \\
f(b_1) & \cdots & f(b_j) & \cdots & f(b_n) & & \\
\hline
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} & c_1 & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} & c_i & \text{arrivée} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} & c_m &
\end{array}$$

Le plus souvent, on se ramènera au cas où l'espace de départ est $\mathbb{R}^n$ et l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^m$, les deux étant munis de leurs bases canoniques. Comme premier exemple, considérons l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$f \ : \quad (x, y) \longmapsto (x + y, 2x + 3y, x - y) \ .$$

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $((1, 0), (0, 1))$. L'image de ces deux vecteurs est

$$f((1, 0)) = (1, 2, 1) \quad \text{et} \quad f((0, 1)) = (1, 3, -1) \ .$$

La matrice de f est donc la suivante (attention à l'écriture des vecteurs de l'espace d'arrivée en colonnes).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Munissons maintenant $\mathbb{R}^2$ de la base $((1, 1), (1, -1))$ au départ, et $\mathbb{R}^3$ de la base $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ à l'arrivée. Les images des vecteurs de la base de départ sont

$$\begin{array}{rclcl}
f((1, 1)) & = & (2, 5, 0) & = & -3\,(1, 0, 0) + 5\,(1, 1, 0) + 0\,(1, 1, 1) \\
f((1, -1)) & = & (0, -1, 2) & = & 1\,(1, 0, 0) - 3\,(1, 1, 0) + 2\,(1, 1, 1) \ .
\end{array}$$

D'où la matrice,

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quand l'espace d'arrivée et l'espace de départ sont les mêmes (l'application est un endomorphisme), on choisit la même base au départ et à l'arrivée. La matrice d'un endomorphisme a autant de lignes que de colonnes : on dit qu'elle est carrée. Voici les matrices de trois endomorphismes de $\mathbb{R}^2$, dans la base canonique.

- *Rotation d'angle* $\pi/2$ *:* $(x, y) \mapsto (-y, x)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Symétrie par rapport à la première bissectrice :* $(x, y) \mapsto (y, x)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Projection sur la première bissectrice :* $(x, y) \mapsto ((x + y)/2, (x + y)/2)$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dans un espace de dimension n, la matrice de l'application identique est la matrice carrée $n \times n$ qui a des 1 sur la diagonale (termes d'indices (i, i)) et des 0 en dehors (termes d'indices (i, j) avec $i \neq j$). On l'appelle *matrice identité d'ordre* n et on la note I_n.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La représentation matricielle présente l'avantage d'automatiser de nombreux calculs. Nous consacrerons le chapitre suivant au calcul matriciel. Pour l'instant nous allons voir comment la matrice d'une application linéaire permet de calculer l'image d'un vecteur dont on se donne les coordonnées dans la base de départ. Reprenons la situation générale : $(b_1, \ldots, b_n)$ est une base de l'espace de départ, et $(c_1, \ldots, c_m)$ une base de l'espace d'arrivée. Le coefficient d'indice (i, j) de la matrice de f, noté $a_{i,j}$, est la i-ième coordonnée de $f(b_j)$:

$$\forall j = 1, \ldots, n\ , \quad f(b_j) = a_{1,j}\, c_1 + \cdots + a_{i,j}\, c_i \cdots + a_{m,j}\, c_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, c_i\ .$$

Considérons maintenant un vecteur v de l'espace de départ, dont les coordonnées dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$ sont $(x_1, \ldots, x_n)$.

$$v = x_1\, b_1 + \cdots + x_n\, b_n\ .$$

L'image de v par f est :

$$\begin{aligned} f(v) &= x_1\, f(b_1) + \cdots + x_n\, f(b_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j\, f(b_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, c_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j \right) c_i \ . \end{aligned}$$

Donc le vecteur $f(v)$ se décompose dans la base $(c_1, \ldots, c_m)$ en $f(v) = y_1\, c_1 + \cdots + y_m\, c_m$, avec :

$$\forall i = 1, \ldots, m\ , \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j\ .$$

On dit que le vecteur $(y_i)_{i=1,\ldots,m}$ est le *produit* de la matrice $(a_{i,j})$ par le vecteur $(x_j)_{j=1,\ldots,n}$. Observez que ce produit n'a de sens que si le nombre de coordonnées du vecteur est égal au nombre de colonnes de la matrice.

Il est commode, pour calculer le produit d'une matrice par un vecteur, de représenter les x_i en colonne, au-dessus et à droite de la matrice $(a_{i,j})$ (voir figure 2).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \end{array}$$

Reprenons l'exemple de l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$f\ :\quad (x, y) \longmapsto (x + y, 2x + 3y, x - y)\ .$$

Les bases respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ étant les bases canoniques, la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

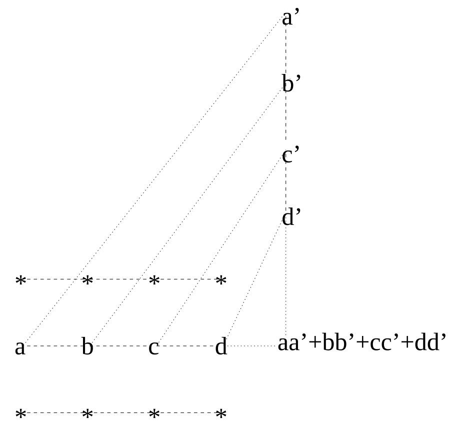

FIGURE 2 – Comment présenter le produit d’une matrice par un vecteur colonne.

Pour vérifier la cohérence de la notation matricielle, calculons le produit de cette matrice par un vecteur de $\mathbb{R}^2$ quelconque (x, y).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+3y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$$

1.7 Détermination pratique de l’image et du noyau

Nous reprenons les notations de la section précédente : E et F sont deux espaces vectoriels, munis respectivement des bases $(b_1, \ldots, b_n)$ et $(c_1, \ldots, c_m)$. La matrice de l’application linéaire f relative à ces deux bases est $(a_{i,j})$. Le *noyau* de f est l’ensemble des vecteurs de E dont l’image par f est le vecteur nul. Soit v un vecteur de E et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ le n-uplet de ses coordonnées dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$. La condition nécessaire et suffisante sur x pour que $f(v)$ soit nul est que toutes les coordonnées de $f(v)$, c’est-à-dire toutes les lignes du produit Ax, soient nulles.

$$(H) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\, x_1 + & \cdots & +a_{1,j}\, x_j + & \cdots & +a_{1,n}\, x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}\, x_1 + & \cdots & +a_{i,j}\, x_j + & \cdots & +a_{i,n}\, x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}\, x_1 + & \cdots & +a_{m,j}\, x_j + & \cdots & +a_{m,n}\, x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

Le système linéaire (H) est homogène : l’ensemble de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. La méthode du pivot de Gauss permet de déterminer une base de l’ensemble des solutions de (H), donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Nous allons voir qu’elle permet aussi au passage de déterminer le rang de f, et même une base de $\mathrm{Im}(f)$.

D'après la proposition 8, à toute famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ correspond une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Nous avons vu que le rang de cette application est le rang de la famille de vecteurs (définitions 10 et 14). La technique décrite ici s'applique indifféremment à une famille de vecteurs ou à une application linéaire.

La première étape de la méthode de Gauss consiste à mettre le système (H) *sous forme échelonnée.*

$$(H') \qquad \left\{\begin{array}{ccccccccc} p_1\,y_1 + & a'_{1,2}\,y_2 + & \cdots & + a'_{1,j}\,y_j + & \cdots & + a'_{1,n}\,y_n & = & 0 \\ & p_2\,y_2 + & \cdots & + a'_{2,j}\,y_j + & \cdots & + a'_{2,n}\,y_n & = & 0 \\ & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & p_r\,y_r + & \cdots & + a'_{r,n}\,y_n & = & 0 \\ & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & \vdots & \\ & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Mettre le système (H) sous forme échelonnée, c'est passer de (H) à (H') par des transformations de lignes consistant à ajouter à une ligne le produit d'une autre par une constante, échanger deux lignes, permuter éventuellement des coordonnées, de sorte que

1. les systèmes (H) et (H') sont équivalents,
2. les inconnues $(y_1, \ldots, y_n)$ de (H') sont celles de (H), mais dans un ordre qui peut être différent,
3. les pivots $p_1, \ldots p_r$ sont tous non nuls.

Au système (H') on peut associer la matrice suivante.

$$A' = \begin{pmatrix} p_1 & a'_{1,2} & \cdots & a'_{1,j} & \cdots & a'_{1,n} \\ 0 & p_2 & \cdots & a'_{2,j} & \cdots & a'_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 0 & p_r & \cdots & a'_{r,n} \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est celle d'une autre application linéaire f', de E vers F.

Théorème 13. *Les applications f et f' sont de rang r.*

- $(f'(b_1), \ldots, f'(b_r))$ *est une base de* $\mathrm{Im}(f')$
- *Soient $i_1, \ldots, i_r$ les indices tels que $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) = (y_1, \ldots, y_r)$.* $(f(b_{i_1}), \ldots, f(b_{i_r}))$ *est une base de* $\mathrm{Im}(f)$.

Démonstration : La famille $(f'(b_1),\dots,f'(b_n))$ engendre $\text{Im}(f)$, car $(b_1,\dots,b_n)$ engendre E. Or tous ces vecteurs appartiennent au sous-espace de F, engendré par $(c_1,\dots,c_r)$. Donc $\text{Im}(f')$ est de dimension au plus r. Pour montrer que le rang de f' est r et que $(f'(b_1,\dots,f'(b_r))$ est une base de $\text{Im}(f)$, il suffit de vérifier que c'est une famille libre. Nous devons montrer

$$\sum_{i=1}^{r} x_i\, f'(b_i) = 0 \implies (\,\forall i = 1,\dots,r\,,\ x_i = 0\,)\ .$$

Utilisant les coordonnées dans la base $(c_1,\dots,c_m)$, les x_i doivent vérifier le système :

$$(H'_r)\qquad \left\{\begin{array}{rrcrcl} p_1\,x_1 & +a'_{1,2}\,x_2 & +\cdots+ & a'_{1,r}\,x_r & = & 0\\ & p_2\,x_2 & +\cdots+ & a'_{2,r}\,x_r & = & 0\\ & \ddots & & & \vdots & \\ & & & p_r\,x_r & = & 0 \end{array}\right.$$

Nous devons montrer que ce système a pour unique solution $x_1 = \cdots = x_r = 0$. C'est une récurrence facile sur r. Si $r = 1$, le système se réduit à l'équation $p_1\,x_1 = 0$, qui a pour seule solution $x_1 = 0$, car le pivot p_1 est non nul. Supposons le résultat vrai pour tout système du même type, de taille $r-1$, et considérons la dernière équation du système de taille r. Si elle est satisfaite, alors $x_r = 0$, car le pivot p_r est non nul. En reportant $x_r = 0$ dans les équations précédentes, on obtient un système du même type, mais de taille $r-1$: la seule solution est $x_1 = \cdots = x_{r-1} = 0$, par l'hypothèse de récurrence.

Les deux systèmes (H) et (H') ayant le même ensemble de solutions, les applications f et f' ont le même noyau, et donc le même rang, d'après le théorème du rang 12. La dimension de $\text{Im}(f)$ est donc r. Pour montrer qu'un ensemble de r vecteurs est une base, il suffit de vérifier que c'est une famille libre. Inutile d'écrire le système en $x_{i_1},\dots,x_{i_r}$ qui exprime que $x_{i_1}\,f(b_{i_1}) + \cdots + x_{i_r}\,f(b_{i_r}) = 0$: il se déduit de (H) en annulant les variables autres que $x_{i_1},\dots,x_{i_r}$. La chaîne de tranformations qui conduit de (H) à (H') conduit forcément de ce nouveau système, au système (H'_r) ci-dessus. Les deux systèmes ont le même ensemble de solutions, d'où le résultat. □

La technique est beaucoup plus facile à appliquer qu'il n'y paraît. Considérons l'application suivante, de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$f\ :\quad (x,y,z,t) \longmapsto (x+2y+z+t, 2x+4y+3z+t, x+2y+2z)\ .$$

Sa matrice, relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ au départ, et $\mathbb{R}^3$ à l'arrivée est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système homogène permettant de déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ est :

$$(H) \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +2y & +z & +t & = & 0 \\ 2x & +4y & +3z & +t & = & 0 \\ x & +2y & +2z & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +2y & +z & +t & = & 0 \\ & & z & -t & = & 0 \\ & & z & -t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$y \leftrightarrow z \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +z & +2y & +t & = & 0 \\ & z & & -t & = & 0 \\ & z & & -t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +z & +2y & +t & = & 0 \\ & z & & -t & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Le système est de rang 2, il en est de même de l'application f. La mise sous forme échelonnée montre que les colonnes de A correspondant aux variables x et z, à savoir la première et la troisième, forment une famille libre, donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \;, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} .$$

Nous avons écrit les vecteurs en colonnes, pour souligner le fait qu'il s'agit nécessairement de vecteurs colonnes de la matrice A.

Pour trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$, il faut continuer la résolution.

$$(H) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcrr} x & +z & = & -2y & -t \\ & z & = & & t \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \quad \left\{\begin{array}{rrcrr} x & & = & -2y & -2t \\ & z & = & & t\ . \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des quadruplets $(-2y-2t, y, t, t)$, où y et t sont deux réels quelconques. Donc :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\; y\,(-2,1,0,0) + t\,(-2,0,1,1)\;,\; y,t \in \mathbb{R} \;\} \;.$$

C'est un sous-espace de dimension 2 dans $\mathbb{R}^4$.

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

1. ☒ $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,,\; x = 0 \}$
2. ☐ $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,,\; x + y = 1 \}$
3. ☒ $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,,\; x = 0 \text{ et } x + y + z = 0 \}$
4. ☐ $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,,\; x = 0 \text{ et } x + y + z = 1 \}$
5. ☐ $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,,\; \sin(x) = 0 \}$
6. ☒ $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,,\; x = y = z \}$
7. ☐ $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,,\; |x| = |y| = |z| \}$
8. ☐ $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,,\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$
9. ☒ $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,,\; x^2 + y^2 + z^2 = 0 \}$

Vrai-Faux 2. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ L'intersection de deux sous-espaces vectoriels peut être vide.
2. ☐ Si un ensemble contient toutes les droites vectorielles engendrées par ses vecteurs, alors c'est un espace vectoriel.
3. ☒ Si un ensemble contient tous les plans vectoriels engendrés par deux de ses vecteurs, alors c'est un espace vectoriel.
4. ☒ Si un ensemble contient toutes les combinaisons linéaires de 3 quelconques de ses vecteurs, alors c'est un espace vectoriel.
5. ☐ Si un ensemble contient la somme de deux quelconques de ses vecteurs, c'est un espace vectoriel.

Vrai-Faux 3. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont génératrices, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. ☐ $((1, 1, 0), (0, 1, 1))$
2. ☒ $((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$
3. ☐ $((0, 1, -1), (1, 0, -1), (1, -1, 0))$
4. ☐ $((1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9))$
5. ☒ $((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 1))$

Vrai-Faux 4. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, lesquelles sont génératrices, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. ☐ $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-2,7,-10,-1))$
2. ☒ $((0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1))$
3. ☒ $((1,2,3,4),(5,6,7,0),(8,9,0,0),(1,0,0,0))$
4. ☐ $((0,1,-1,0),(1,0,-1,0),(1,-1,0,0),(0,0,0,1))$
5. ☒ $((1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,2,1,1),(2,1,1,1))$

Vrai-Faux 5. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont libres, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. ☒ $((1,1,0),(0,1,1))$
2. ☐ $((1,1,0),(-1,-1,0))$
3. ☒ $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$
4. ☐ $((0,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0))$
5. ☐ $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$

Vrai-Faux 6. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, lesquelles sont libres, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. ☐ $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-2,7,-10,-1))$
2. ☐ $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-1,4,-6,0))$
3. ☒ $((0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1))$
4. ☐ $((0,1,-1,0),(1,0,-1,0),(1,-1,0,0),(0,0,0,1))$
5. ☒ $((1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,2,1,1),(2,1,1,1))$

Vrai-Faux 7. Parmi les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, lesquelles sont des applications linéaires, lesquelles ne le sont pas et pourquoi ?

1. ☒ $(x,y) \mapsto (x,0)$
2. ☐ $(x,y) \mapsto (x,1)$
3. ☐ $(x,y) \mapsto (|x|,0)$
4. ☒ $(x,y) \mapsto (x+y,x-y)$
5. ☒ $(x,y) \mapsto (y,x)$

Vrai-Faux 8. Parmi les applications suivantes de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont des applications linéaires, lesquelles ne le sont pas et pourquoi ?

1. ☐ $(x,y,z) \mapsto (x,y,z-1)$
2. ☐ $(x,y,z) \mapsto (x+y,y+z,xz)$
3. ☒ $(x,y,z) \mapsto (z,x,y)$
4. ☒ $(x,y,z) \mapsto (0,0,0)$
5. ☐ $(x,y,z) \mapsto (0,0,1)$

Vrai-Faux 9. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et f une application linéaire de E dans F. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ L'image par f du vecteur nul de E est le vecteur nul de F.
2. ☒ L'image par f de E est un sous-espace vectoriel de F.
3. ☐ L'image par f d'une famille libre dans E est toujours une famille libre dans F.
4. ☒ L'image par f d'une famille liée dans E est toujours une famille liée dans F.
5. ☐ L'image par f d'une famille génératrice dans E est toujours une famille génératrice dans F.
6. ☒ Si $\dim(E) > \dim(F)$ alors $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$.
7. ☐ Si $\dim(E) > \dim(F)$ alors f est surjective.
8. ☐ Si $\dim(E) < \dim(F)$ alors f est injective.
9. ☒ Si f est bijective, alors $\dim(E) = \dim(F)$

Vrai-Faux 10. Soient E un espace vectoriel de dimension n, F un espace vectoriel de dimension m et f une application linéaire de E dans F. On choisit une base $(b_1, \ldots, b_n)$ dans E, une base $(c_1, \ldots, c_m)$ dans F, et on note A la matrice de f relative à ces bases. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ La matrice A est carrée si et seulement si $m = n$.
2. ☐ Les lignes de A sont les images des vecteurs $c_1, \ldots, c_m$.
3. ☐ Si toutes les colonnes de A sont non nulles, alors l'application f est injective.
4. ☒ Si toutes les colonnes de A sont proportionnelles au même vecteur de $\mathbb{R}^m$, alors le rang de f est 0 ou 1.
5. ☒ La j-ième colonne de A est nulle si et seulement si le vecteur b_j appartient au noyau de f.
6. ☐ Si une ligne de A est nulle, alors f n'est pas injective.
7. ☒ Si une ligne de A est nulle, alors le rang de f est strictement inférieur à m.
8. ☒ Si les colonnes de A forment une famille libre dans $\mathbb{R}^m$, alors f est injective.
9. ☐ Si les lignes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$, alors f est surjective.
10. ☒ Si les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^m$, alors f est surjective.

2.2 Exercices

Exercice 1. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels n'en sont pas et pourquoi ?
a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ |x| = |y| = |z|\}$

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0 \text{ ou } y = 0\}$
c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + 3z = 0\}$
d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 1\}$
e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \leqslant y \leqslant z\}$
f) $\{(x,y,z),\ x = \alpha + 2\beta + 3\gamma,\ y = 4\alpha + 5\beta + 6\gamma,\ z = 7\alpha + 8\beta + 9\gamma, \text{où } (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3\}$

Exercice 2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les paramètres réels a et b pour que les familles suivantes soient des bases de $\mathbb{R}^3$.

1. $((1,1,1),(0,a,1),(0,0,b))$
2. $((1,0,1),(a,b,1),(b,a,1))$
3. $((1,a,b),(a,1,a),(b,b,1))$
4. $((a,a,b),(a,b,a),(b,a,a))$
5. $((0,a,b),(a,0,b),(a,b,0))$

Exercice 3. On considère les espaces vectoriels suivants.

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x + y = 0\}\ , \quad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x = y\}$$

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x + y + z = 0\}\ , \quad E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x = y = z\}$$

1. Déterminer la dimension de E.
2. Donner une base de E.

Exercice 4. Compléter les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

1. $((1,1,1))$
2. $((1,1,0))$
3. $((1,1,1),(1,-1,-1))$
4. $((1,1,0),(1,-1,0))$
5. $((1,1,0),(1,1,1))$
6. $((1,1,0),(1,-1,1))$

Exercice 5. On considère les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{llll} f : (x,y) \mapsto (-x,-y) & & f : (x,y) \mapsto (2x,2y) \\ f : (x,y) \mapsto (x,0) & & f : (x,y) \mapsto (x,x) \\ f : (x,y) \mapsto (y,0) & & f : (x,y) \mapsto (y,y) \\ f : (x,y) \mapsto (x+y,x-y) & & f : (x,y) \mapsto (x-y,x+y) \end{array}$$

Pour chacune de ces applications :

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Donner une interprétation géométrique de f comme transformation du plan vectoriel, muni d'une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

3. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. L'application est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^2$?
4. Reprendre les deux questions précédentes pour l'application $f - I$, où f est l'application considérée et I désigne l'application identique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. On considère les applications linéaires suivantes.

$$\begin{array}{rrcl} f \ : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y, y-z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g \ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, 2x+3y) \end{array}$$

1. L'application f est elle injective ? surjective ?
2. L'application g est elle injective ? surjective ?
3. Déterminer $g \circ f$. Est-elle injective ? surjective ?
4. Déterminer $f \circ g$. Est-elle injective ? surjective ?

Exercice 7. Soient E, F et G des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$.
2. Montrer que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.
3. Montrer que $g \circ f$ est l'application nulle si et seulement si $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.
4. Montrer que $g \circ f$ est injective si et seulement si f est injective et $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{0\}$.
5. Montrer que $g \circ f$ est surjective si et seulement si $g(\text{Im}(f)) = G$.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme de E.

1. On suppose que $f \circ f$ est l'application nulle. Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
2. On suppose que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$. Montrer que n est nécessairement pair.
3. On suppose que f n'est pas l'application nulle et qu'il existe un entier k tel que $f^{\circ k}$ (composée de f avec elle-même k fois) est l'application nulle (on dit que f est *nilpotente*). Soit k_0 le plus petit entier tel que $f^{\circ k_0}$ est l'application nulle. Montrer qu'il existe un vecteur $v \in E$ tel que $f^{\circ(k_0-1)}(v) \neq 0$. Montrer que si $f^{\circ(k_0-1)}(v) \neq 0$, alors la famille de vecteurs $(v, f(v), \ldots, f^{\circ(k_0-1)})$ est libre.
4. En déduire que si f est nilpotente, alors $f^{\circ n}$ est l'application nulle.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $(b_1, \ldots, b_n)$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on définit la i-ième application coordonnée L_i comme l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à $v \in E$ associe le réel x_i qui est la i-ième coordonnée de v sur la base $(b_1, \ldots, b_n)$.

$$\begin{array}{rcl} v & = & x_1\, b_1 + \cdots + x_i\, b_i + \cdots + x_n\, b_n \\ & = & L_1(v)\, b_1 + \cdots + L_i(v)\, b_i + \cdots + L_n(v)\, b_n\ . \end{array}$$

1. Montrer que les L_i sont des applications linéaires.
2. Montrer que le noyau de L_i est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de E (hyperplan).
3. On prend $E = \mathbb{R}^3$ et :

$$b_1 = (1, 0, -1) \ , \quad b_2 = (0, 2, 3) \ , \quad b_3 = (0, 0, 1) \ .$$

Montrer que (b_1, b_2, b_3) est une base de E. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer l'image par L_i d'un vecteur $v = (x, y, z)$ quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10. Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ tels que $V \cap W = \{0\}$.

1. On note $V + W = \{u \in \mathbb{R}^4,\ u = v + w,\ v \in V, w \in W\}$. Montrez que $V + W$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Soit v un vecteur non nul de V, et $\{w_1, w_2\}$ une famille libre de vecteurs de W.
   a. Qu'implique l'existence de ces deux familles libres sur les dimensions de V et W ?
   b. Montrez que la famille $\{v, w_1, w_2\}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$.
3. On considère maintenant une famille libre de deux vecteurs $\{v_1, v_2\}$ de V. Montrez que $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11. On considère les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{llll}
f \ : \ (x,y) \mapsto (-x,-y) & & f \ : \ (x,y) \mapsto (2x,2y) \\
f \ : \ (x,y) \mapsto (x,0) & & f \ : \ (x,y) \mapsto (x,x) \\
f \ : \ (x,y) \mapsto (y,0) & & f \ : \ (x,y) \mapsto (y,y) \\
f \ : \ (x,y) \mapsto (x+y,x-y) & & f \ : \ (x,y) \mapsto (x-y,x+y)
\end{array}$$

Déterminer la matrice de chacune de ces applications dans les bases suivantes de $\mathbb{R}^2$.

1. $((1, 0), (0, 1))$.
2. $((0, 1), (1, 0))$.
3. $((0, 2), (-3, 0))$.
4. $((0, 1), (1, 1))$.
5. $((1, 1), (1, -1))$.

Exercice 12. Pour tout entier n, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique. Donner la matrice de chacune des applications f suivantes. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

1. $f \ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ , \quad (x, y) \longmapsto f(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$.
2. $f \ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ , \quad (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (0, y - z, z - x)$.
3. $f \ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ , \quad (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$.
4. $f \ : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \quad (x, y, z, t) \longmapsto f(x, y, z, t) = (x + y + 2z - t, 2x + y + z + t)$.

5. $f\ : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\quad (x,y,z,t) \longmapsto f(x,y,z,t) = x - y + 2z + 3t.$

Exercice 13. Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, déterminer son rang et donner une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre.

1. $((1,0,1),(-1,0,-1),(2,0,2))$
2. $((1,0,1),(-1,0,-1),(2,0,2),(0,1,0),(1,1,1),(1,-2,1))$
3. $((1,0,1),(-1,0,-1),(2,0,2),(0,1,0),(1,1,1),(1,-2,-1))$
4. $((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,2,1,2))$
5. $((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,2,1,0))$
6. $((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,0),(0,1,0,1),(1,2,1,0))$

Exercice 14. On considère les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs suivants.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculer le produit de chacune des matrices par chacun des vecteurs.

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Soit E un espace vectoriel.

$\boxed{\text{A}}$ Si un sous-ensemble de E contient la somme d'une famille finie quelconque de ses éléments, alors c'est un espace vectoriel.

$\boxed{\text{B}}$ Si un sous-ensemble de E est un espace vectoriel, alors il contient l'opposé de tout vecteur de E.

$\boxed{\text{C}}$ L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est toujours un sous-espace vectoriel de E.

$\boxed{\text{D}}$ Si un sous-ensemble de E contient tous les plans vectoriels engendrés par deux quelconques de ses vecteurs, alors c'est un sous-espace vectoriel de E.

$\boxed{\text{E}}$ La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E est toujours un sous-espace vectoriel de E.

Question 2.

$\boxed{\text{A}}$ L'ensemble $\{\,(x,y,z)\,,\ x^2+y^2=1\,\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{B}}$ L'ensemble $\{\,(x,y,z)\,,\ x^2+y^2=0\,\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{C}}$ L'ensemble $\{\,(x,y,z)\,,\ x^2=y^2\,\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{D}}$ L'ensemble $\{\,(x,y,z)\,,\ x=y\,\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{E}}$ L'ensemble $\{\,(x,y,z)\,,\ x=y=1\,\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Question 3. Dans $\mathbb{R}^3$:

$\boxed{\text{A}}$ $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$ est une famille génératrice.

$\boxed{\text{B}}$ $((1,1,1),(0,1,1),(1,0,0),(1,2,2))$ est une famille génératrice.

$\boxed{\text{C}}$ $((1,0,1),(1,-1,1),(2,1,2),(1,2,1))$ est une famille génératrice.

$\boxed{\text{D}}$ $((1,0,1),(1,-1,1),(2,1,2),(1,2,0))$ est une famille génératrice.

$\boxed{\text{E}}$ $((0,3,-2),(1,-1,2),(2,1,2),(1,2,0))$ est une famille génératrice.

Question 4. Dans $\mathbb{R}^3$:

$\boxed{\text{A}}$ $((1,0,1),(1,-1,1),(0,1,0))$ est une famille libre.

$\boxed{\text{B}}$ $((1,0,1),(1,-1,1),(2,1,0))$ est une famille libre.

$\boxed{\text{C}}$ $((1,0,1),(1,-1,1),(2,1,2))$ est une famille libre.

$\boxed{\text{D}}$ $((0,3,-2),(1,-1,1),(2,1,0))$ est une famille libre.

$\boxed{\text{E}}$ $((0,3,-2),(1,-1,1),(2,1,2))$ est une famille libre.

Question 5. Dans $\mathbb{R}^4$:

$\boxed{\text{A}}$ Toute famille libre de 4 vecteurs est une base.

$\boxed{\text{B}}$ Si on ajoute un vecteur quelconque à une base, on obtient une famille génératrice.

$\boxed{\text{C}}$ Si on ajoute un vecteur quelconque à une famille libre de trois vecteurs, on obtient une base.

$\boxed{\text{D}}$ Si une famille de vecteurs contient le vecteur nul, elle n'est pas génératrice.

$\boxed{\text{E}}$ Toute famille de trois vecteurs non nuls est libre.

Question 6. Dans $\mathbb{R}^4$:

$\boxed{\text{A}}$ Si une famille de 4 vecteurs est de rang 3, alors 2 au moins des vecteurs de la famille sont colinéaires.

$\boxed{\text{B}}$ Si une famille de 3 vecteurs est de rang 3, alors elle est libre.

$\boxed{\text{C}}$ Si une famille de 3 vecteurs est de rang 1, alors tous ses vecteurs sont colinéaires à un même vecteur.

$\boxed{\text{D}}$ Si une famille de 5 vecteurs est de rang 4, alors toute sous-famille de 4 vecteurs est une base.

$\boxed{\text{E}}$ Si une famille de 3 vecteurs est de rang 2, alors on peut la compléter par un vecteur de manière à obtenir une base.

Question 7.

$\boxed{\text{A}}$ L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, qui à (x, y, z) associe $|x + y + z|$ est linéaire.

$\boxed{\text{B}}$ L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, qui à (x, y, z) associe $(x, (y + z)^2)$ est linéaire.

$\boxed{\text{C}}$ L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, qui à (x, y, z) associe $x + y + z$ est linéaire.

$\boxed{\text{D}}$ L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, qui à (x, y, z) associe $(x, y + z)$ est linéaire.

$\boxed{\text{E}}$ L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, qui à (x, y, z) associe $(x + y, (y + z)/(x + z))$ est linéaire.

Question 8. On considère l'application f, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, qui à (x, y, z) associe $(x + y, y + z)$.

$\boxed{\text{A}}$ L'application f est injective.

$\boxed{\text{B}}$ Le noyau de f est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{C}}$ L'application f est surjective.

$\boxed{\text{D}}$ L'image de f est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 1)$.

$\boxed{\text{E}}$ Le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, -1, 1)$.

Question 9. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{\text{A}}$ Si le noyau de f est une droite vectorielle, alors l'image de f est un plan vectoriel.

$\boxed{\text{B}}$ Si le noyau de f est un plan vectoriel, alors l'image de f est un plan vectoriel.

$\boxed{\text{C}}$ Si le noyau de f est réduit à $\{0\}$, alors f est surjective.

$\boxed{\text{D}}$ Si f est injective, alors l'image de f est un sous-espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{\text{E}}$ Si l'image de f est réduite à $\{0\}$, alors f est injective.

Question 10. Soit f l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

$\boxed{\text{A}}$ L'application f est injective.

$\boxed{\text{B}}$ L'image de f est engendrée par les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(1, 1, 1)$.

$\boxed{\text{C}}$ Le noyau de f est un plan vectoriel.

$\boxed{\text{D}}$ L'image de f est engendrée par les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(2, 0, 2)$.

$\boxed{\text{E}}$ Le noyau de f est engendré par les vecteurs $(-2, 0, 1, 0)$ et $(1, 0, 1, 1)$.

Réponses : 1–CD 2–BD 3–AD 4–BE 5–AB 6–BC 7–CD 8–CE 9–AD 10–BC

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours : Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F. Soit n un entier strictement positif, et $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. On suppose que $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice. Soit v un vecteur quelconque de E. Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_n, v)$ est génératrice.
2. On suppose que $(v_1, \dots, v_n)$ est libre. Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_{n-1})$ est libre.
3. On suppose que f est surjective et que $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice dans E. Montrer que $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ est génératrice dans F.
4. On suppose que f est injective et que $(v_1, \dots, v_n)$ est libre dans E. Montrer que $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ est libre dans F.
5. On suppose que f est bijective. Montrer que $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ est une base de F si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E.

Exercice : Soient a et b deux réels. On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants.

$$v_1 = (1, 0, a)\ , \quad v_2 = (a, 0, a)\ , \quad v_3 = (a, b, 1)\ .$$

On note :

- (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.
- f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à e_1 associe v_1, à e_2 associe v_2 et à e_3 associe v_3.

1. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $ab(a-1) \neq 0$.
2. Écrire en fonction de a et b la matrice de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3).
3. Pour $a = 0$, montrer que les deux vecteurs v_1 et v_3 forment une famille libre.
4. Pour $a = 0$, montrer que le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par e_2.
5. Pour $a = 0$, donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
6. Pour $a = 0$, vérifier que $f \circ f = f$.
7. Pour $a = 0$, montrer que (e_2, v_1, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice de f dans la base (e_2, v_1, v_3).

8. Pour $a \neq 1$ et $b = 0$, montrer que $\text{Ker}(f)$ est une droite vectorielle, dont on donnera un vecteur directeur fonction de a.
9. Pour $a^2 \neq 1$ et $b = 0$, montrer que $\text{Im}(f)$ est le plan vectoriel engendré par v_1 et v_3.
10. Pour $a = 1$ et $b = 0$, donner une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.
11. Pour $a = 1$ et $b = 0$, vérifier que la réunion des deux bases de la question précédente forme une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette nouvelle base.
12. Pour $a = -1$, $b = 1$, montrer que l'application f est bijective.
13. On considère l'application g qui à e_1 associe $e_1 - e_2$, à e_2 associe $2(e_1 + e_3)$, et à e_3 associe $-e_1 - e_2$. Ecrire la matrice de g dans la base (e_1, e_2, e_3).
14. Pour $a = -1$, $b = 1$, écrire la matrice de l'application $g \circ f$. En déduire la matrice de l'application réciproque f^{-1} dans la base (e_1, e_2, e_3).
15. Pour $a = -1$, $b = 1$, donner la matrice de l'application f dans la base (v_1, v_2, v_3).

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. Si $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice, alors tout vecteur w de E est combinaison linéaire des v_i :
$$\forall w \in E\ ,\ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\ , \quad w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n\ .$$
Soit v un vecteur donné de E. Le vecteur w s'écrit :
$$w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + 0v\ .$$
La famille $(v_1, \dots, v_n, v)$ est donc génératrice.
2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ des réels tels que :
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1} = 0\ .$$
Alors :
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + 0v_n = 0\ .$$
Si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, cela implique :
$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0\ .$$
Donc la famille $(v_1, \dots, v_{n-1})$ est aussi libre.

3. Soit w un vecteur quelconque de F. Puisque f est surjective, il existe $v \in E$ tel que $w = f(v)$. Si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice, il existe n réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :
$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \ .$$
Comme f est linéaire, on peut écrire :
$$w = f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) \ .$$
Donc $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ est génératrice dans F.
4. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que :
$$\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) = 0 \ .$$
Puisque f est linéaire :
$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = 0 \ .$$
Si f est injective, le seul vecteur d'image nulle est le vecteur nul. Donc :
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \ .$$
Puisque la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, ceci entraîne :
$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \ .$$
Donc la famille $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ est libre.
5. Si f est bijective, elle est à la fois injective et surjective. Si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E, elle est à la fois génératrice et libre. Donc $(f(v_1, \dots, f(v_n))$ est génératrice et libre, par application des deux questions précédentes : c'est une base de F.

   Montrons maintenant la réciproque. Si f est bijective, l'application réciproque f^{-1} est elle aussi linéaire et bijective. Si $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ est une base de F, alors $(f^{-1}(f(v_1)), \dots, f^{-1}(f(v_n))) = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E, en appliquant ce qui précède à f^{-1}.

Exercice :

1. Dans $\mathbb{R}^3$ une famille de trois vecteurs est une base si et seulement si c'est une famille libre. Soient α, β, γ trois réels. Supposons $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$. Dans la base (e_1, e_2, e_3), ce vecteur s'écrit :
$$\Big(\alpha + a\beta + a\gamma \, , \, b\gamma \, , \, a\alpha + a\beta + \gamma\Big) = (0, 0, 0) \ .$$
Donc α, β, γ sont solution du système linéaire :
$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} \alpha & +a\beta & +a\gamma & = & 0 \\ & & b\gamma & = & 0 \\ a\alpha & +a\beta & +\gamma & = & 0 \ . \end{array} \right.$$

La famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si ce système a pour solution unique $(0,0,0)$. Échangeons les équations 2 et 3, puis soustrayons la première équation multipliée par a de la seconde. Le système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} \alpha & +a\beta & +a\gamma & = & 0 \\ & a(a-1)\beta & +(1-a^2)\gamma & = & 0 \\ & & b\gamma & = & 0\,. \end{array}\right.$$

Ce système a pour solution unique $(0,0,0)$ si et seulement si il est de rang 3. C'est le cas si les 3 pivots sont non nuls : $a(a-1) \neq 0$ et $b \neq 0$, soit $ab(a-1) \neq 0$. Réciproquement, si $b = 0$ la troisième équation s'annule, si $a = 1$ la seconde équation s'annule, et si $a = 0$, les équations 2 et 3 sont proportionnelles : dans les 3 cas, le système est de rang au plus 2.

2. La matrice de f dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 0 & b \\ a & a & 1 \end{pmatrix}\,.$$

3. Soient α et β deux réels tels que $\alpha v_1 + \beta v_3 = 0$. Pour $a = 0$, ce vecteur s'écrit $(\alpha, b\beta, \beta)$. Il est nul si et seulement si $\alpha = \beta = 0$ Donc (v_1, v_3) est une famille libre.

4. Pour $a = 0$, $f(e_2) = v_2 = 0$. Donc tout vecteur multiple de e_2 appartient au noyau de f. La droite vectorielle engendrée par e_2 est donc incluse dans le noyau de f. Pour montrer qu'elle est égale, il suffit de montrer que le noyau de f est de dimension 1. Pour cela, considérons les vecteurs v_1 et v_3. Par définition, ce sont deux vecteurs de l'image de f. Or ils forment une famille libre d'après la question précédente. L'image de f contient deux vecteurs linéairement indépendants, donc elle est de dimension au moins 2. Par le théorème du rang, la dimension du noyau est au plus $3 - 2 = 1$. Comme le noyau contient la droite engendrée par e_2, il est de dimension 1.

5. Puisque le noyau est de dimension 1, l'image est de dimension 2, par le théorème du rang. Les vecteurs v_1 et v_3 forment une famille libre, donc (v_1, v_3) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

6. Puisque f est linéaire, il suffit de vérifier la relation demandée sur les éléments d'une base, par exemple la base canonique. Pour e_1 et e_2, c'est évident puisque $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = 0$. Pour e_3 :

$$f(f(e_3)) = f(be_2 + e_3) = bf(e_2) + f(e_3) = f(e_3)\,.$$

7. Il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soient α, β, γ trois réels tels que $\alpha e_2 + \beta v_1 + \gamma v_3 = 0$. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les coordonnées de ce vecteur sont $(\beta, \alpha + b\gamma, \gamma)$. Les trois coordonnées sont nulles si et seulement si

$\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc la famille (e_2, v_1, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. On sait que : $f(e_2) = 0$, $f(v_1) = f \circ f(e_1) = f(e_1) = v_1$ et $f(v_3) = f \circ f(e_3) = f(e_3) = v_3$. La matrice de f dans la base (e_2, v_1, v_3) est donc la suivante.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

8. Soit v un vecteur de $\mathrm{Ker}(f)$: ses coordonnées (x, y, z) sont solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +ay & +az & = & 0 \\ ax & +ay & +z & = & 0 \,. \end{array} \right.$$

Ce système équivaut au suivant.

$$\left\{ \begin{array}{lrrcl} x & +ay & +az & = & 0 \\ & (a-a^2)y & +(1-a^2)z & = & 0 \,. \end{array} \right.$$

Pour $a = 0$, l'ensemble des solutions est la droite vectorielle engendrée par e_2 (question 4). Pour a différent de 0 et 1, le système se résout en fonction de z :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & z \\ \quad y & = & -\frac{1+a}{a} z \,. \end{array} \right.$$

L'ensemble de solutions est le suivant.

$$\left\{ \left(z, -\frac{1+a}{a} z, z \right) \,,\ z \in \mathbb{R} \right\} .$$

Le vecteur $\left(1, -\frac{1+a}{a}, 1\right)$ est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

9. Pour $a \neq 1$ et $b = 0$, nous avons vu que $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite vectorielle. D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2 : c'est un plan vectoriel. Par définition de f, v_1 et v_3 appartiennent à $\mathrm{Im}(f)$. Pour montrer que ces deux vecteurs forment une base de $\mathrm{Im}(f)$, il suffit de vérifier que (v_1, v_3) est une famille libre. Soient α et β deux réels tels que $\alpha v_1 + \beta v_3 = 0$. Les coordonnées de ce vecteur sont : $(\alpha + a\beta, 0, a\alpha + \beta)$. Elles s'annulent si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} \alpha & +a\beta & = & 0 \\ a\alpha & +\beta & = & 0 \,. \end{array} \right.$$

Sous forme échelonnée :

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} \alpha & +a\beta & = & 0 \\ & (1-a^2)\beta & = & 0 \,. \end{array} \right.$$

Pour $a^2 \neq 1$, ce système est de rang 2 : il a pour seule solution $\alpha = \beta = 0$. D'où le résultat.

10. Pour $a = 1$ et $b = 0$, $v_1 = v_2 = v_3 = (1, 0, 1)$. Donc pour tout vecteur $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ de $\mathbb{R}^3$, $f(v) = (x + y + z)v_1$. Donc $\text{Im}(f)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v_1 = (1, 0, 1)$. La même expression montre que $\text{Ker}(f)$ est le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$, à savoir :

$$\Big\{ (-y - z, y, z)\,,\; y, z \in \mathbb{R} \Big\}\,.$$

Une base de $\text{Ker}(f)$ est donc :

$$\Big((-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \Big)\,.$$

11. Notons $w_2 = (-1, 1, 0)$ et $w_3 = (-1, 0, 1)$. Pour montrer que (v_1, w_2, w_3) est une base de $\mathbb{R}^2$, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soient α, β, γ trois réels tels que $\alpha v_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 = 0$. Ces trois réels sont solution du système :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} \alpha & -\beta & -\gamma & = & 0 \\ & \beta & & = & 0 \\ \alpha & & +\gamma & = & 0\,. \end{array}\right.$$

On vérifie immédiatement que ce système est de rang 3 : il a pour seule solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

La matrice de f dans la base (v_1, w_2, w_3) est la suivante.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

12. Pour montrer que l'application f est bijective, il suffit de vérifier que l'image par f de la base canonique est une base, c'est-à-dire que les trois vecteurs (v_1, v_2, v_3) forment une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soient α, β, γ trois réels tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$: ils sont solution du système :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} \alpha & -\beta & -\gamma & = & 0 \\ & & \gamma & = & 0 \\ -\alpha & -\beta & +\gamma & = & 0\,. \end{array}\right.$$

On vérifie immédiatement que ce système est de rang 3 : il a pour seule solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

13. La matrice de g dans la base (e_1, e_2, e_3) est la suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

14. Pour écrire la matrice de l'application $g \circ f$, on peut soit calculer les coordonnées des trois vecteurs $g(v_1)$, $g(v_2)$, $g(v_3)$, ce qui revient à effectuer le produit de la matrice de g par chacune des colonnes de la matrice de f.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

On constate que $g \circ f$ est le double de l'application identique. La matrice de l'application réciproque f^{-1} dans la base (e_1, e_2, e_3) est donc le produit par $1/2$ de la matrice de g.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

15. Nous devons calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3. Or pour $i = 1, 2, 3$, $f(v_i) = f(f(e_i)) = f(f(f^{-1}(v_i)))$. Notons A la matrice de f et A^{-1} celle de f^{-1} (calculée à la question précédente). Ce qui précède montre que la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) est le produit matriciel (colonnes par colonne) de A par le produit de A par A^{-1}. Or $A(AA^{-1}) = A$. Donc la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) est la même que dans la base (e_1, e_2, e_3).

3 Compléments

3.1 La vérité est éternelle et divine

> Je reste parfaitement confiant dans le fait que le travail que j'ai investi dans la science présentée ici, et qui a pris une partie significative de ma vie autant que l'application la plus acharnée de mes capacités, ne sera pas perdu. Il est vrai que je suis conscient que la forme que j'ai donnée à cette science est imparfaite et ne peut que l'être. Mais je sais, et je me sens obligé d'affirmer (au risque de paraître arrogant) que même si ce travail devait encore rester inutilisé pour encore 17 ans ou même plus, sans entrer dans le véritable développement de la science, viendra tout de même un jour où il sera tiré de la poussière de l'oubli, et où des idées actuellement en sommeil porteront leurs fruits. Je sais aussi que je n'ai pas (comme je l'ai désiré jusqu'ici en vain) attiré autour de moi un cercle de disciples, à qui j'aurais pu transmettre ces idées, et que je pourrais stimuler pour les développer et les enrichir encore ; pourtant viendra un jour où ces idées, peut-être dans une forme nouvelle, renaîtront et entreront dans une communication vivante avec les développements contemporains. Car la vérité est éternelle et divine.

Qui donc est à la fois si amer et si sûr de sa postérité ? Hermann Grassmann (1809–1877) [1]. Et cette « vérité éternelle et divine » ? Rien moins que l'algèbre linéaire, dont les fondements vous ont été présentés dans ce chapitre, et qui accompagnera encore longtemps vos études de mathématiques ! Quand il écrit cela en 1862, plus de 17 ans se sont effectivement écoulés depuis une première publication de sa « théorie de l'extension » (*Ausdehnunglehre*). Elle n'a pas vraiment été vraiment comprise, ni même examinée à fond, par ses contemporains. Pourtant, on trouve dans le mémoire de 1862 les combinaisons linéaires, l'indépendance, les sous-espaces engendrés, la démonstration du fait que la dimension est indépendante de la base, les sommes de sous-espaces vectoriels, bref, l'essentiel de ce chapitre.

Tout au long de sa carrière, Grassmann aura manqué de réussite ; il n'obtiendra jamais de poste universitaire, et malgré ses nombreuses contributions en mathématiques et en physique, il ne sera reconnu comme docteur que par ses études en langues. Comble de malchance, même son travail pionnier sur les espaces vectoriels sera obscurci par une querelle de priorité. En 1845, un an après Grassmann, Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant publie indépendamment un article sur le calcul vectoriel, dont le contenu est proche de celui de Grassmann. Grassmann en ayant pris connaissance en 1847, il écrit un courrier en joignant son propre article. Mais n'ayant pas l'adresse de Saint-Venant, il adresse le courrier à Cauchy, en lui demandant de transmettre, ce que Cauchy se garde bien de faire. Six ans ans plus tard, Cauchy publie dans les Comptes Rendus de l'Académie de Sciences « Sur les clefs algébriques ». Grassmann

1. D. Fearnley-Sander : Hermann Grassmann and the creation of linear algebra *American Mathematical Monthly 86, p. 809–817 (1979)*

réagit : « Je réalisai immédiatement que les principes qui y étaient établis et les résultats qui étaient démontrés étaient exactement les mêmes que ceux que j'avais publiés en 1844, et desquels j'avais donné en même temps de nombreuses applications à l'analysie algébrique, la géométrie, la mécanique et d'autres branches de la physique ». Un comité de trois membres de l'Académie des Sciences fut chargé de trancher la question de priorité, mais ne publia jamais ses conclusions. Vous l'avez deviné : Cauchy était l'un des trois.

3.2 Application linéaire tangente

La tangente au graphe d'une fonction en un point est une droite passant par ce point, dont la pente est la dérivée. Pour une application dérivable en a, on peut écrire :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\, h + o(h) \;, \tag{3}$$

où $o(h)$ désigne une fonction telle que $o(h)/h$ tend vers 0 quand h tend vers 0. Imaginons que l'on souhaite approcher f au voisinage de a (pour une valeur de h petite), sans savoir calculer $f(a+h)$. On peut remplacer $f(a+h) - f(a)$ par $f'(a)\, h$, et l'erreur commise est négligeable devant h. Dans (3), une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ apparaît : l'application $h \mapsto f'(a)\, h$.

Ceci se généralise à des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, avec n et m quelconques. L'application $h \mapsto f(a)\, h$ devient une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$: l'application linéaire tangente. Pour ne pas compliquer les notations, nous prendrons l'exemple d'une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (f(x,y,z), g(x,y,z)) \end{array}$$

Ce pourrait être par exemple l'application qui aux trois dimensions d'un parallélépipède associe sa surface et son volume.

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2xy+2xz+2yz, xyz) \end{array}$$

Les applications f et g, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, sont les *applications coordonnées*. Si on fixe un point (a,b,c) dans l'espace de départ, on définit 6 *applications partielles*.

$$\begin{array}{rcl} x & \mapsto & f(x,b,c) \\ y & \mapsto & f(a,y,c) \\ z & \mapsto & f(a,b,z) \\ x & \mapsto & g(x,b,c) \\ y & \mapsto & g(a,y,c) \\ z & \mapsto & g(a,b,z) \end{array}$$

Nous commençons par une application f, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Si les applications partielles sont dérivables, leurs dérivées s'appellent les *dérivées partielles* en (a,b,c).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) &= \frac{\mathrm{d}f(x,b,c)}{\mathrm{d}x}(a) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) &= \frac{\mathrm{d}f(a,y,c)}{\mathrm{d}y}(b) \\
\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) &= \frac{\mathrm{d}f(a,b,z)}{\mathrm{d}z}(c)
\end{aligned}$$

Pour calculer la dérivée partielle de f par rapport à x, il suffit de dériver en x l'expression de f, en traitant les autres variables comme des constantes paramétriques.

Supposons par exemple que f soit l'application qui à (x,y,z) associe la surface du parallélépipède dont les longueurs d'arêtes sont x,y,z.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
(x,y,z) & \longmapsto & 2(xy+yz+xz)
\end{array}$$

Voici ses trois dérivées partielles.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) &= 2(b+c) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) &= 2(a+c) \\
\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) &= 2(a+b)
\end{aligned}$$

Si elles sont continues, les dérivées partielles permettent d'approcher la fonction par une application linéaire au voisinage d'un point. Le résultat qui suit est l'analogue pour les fonctions de plusieurs variables du théorème des accroissements finis.

Théorème 14. *Soit, $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ une application continûment différentiable de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et (a,b,c) un point de $\mathbb{R}^3$. Notons $o(x,y,z)$ la fonction définie par :*

$$f(x,y,z) = f(a,b,c)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)+(z-c)\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)+o(x,y,z)\ .$$

Alors :

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} \frac{o(x,y,z)}{\max\{|x-a|,|y-b|,|z-c|\}} = 0\ .$$

Ce théorème dit que les variations de la fonction f autour du point (a,b,c) peuvent être approchées par une application linéaire, la *différentielle* de f.

Définition 15. *On appelle* différentielle *de f au point (a,b,c) l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ qui à (h_x, h_y, h_z) associe :*

$$h_x \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) + h_y \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) + h_z \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) .$$

En physique, on interprète h_x, h_y et h_z comme des petites variations des variables x, y, et z, et on les note plutôt dx, dy et dz. Si on note df la différentielle de f, ceci justifie l'écriture abrégée suivante.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz .$$

La différentielle est plus facile à visualiser en dimension 2. Pour une fonction de deux variables, le théorème 14 donne une approximation de $f(x,y)$ sous la forme :

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + o(x,y) .$$

La surface d'équation $z = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ est celle du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point (a,b) (cf. figure 3). Pour rappeler cette interprétation géométrique, la différentielle de f au point (a,b) porte aussi le nom d'*application linéaire tangente*.

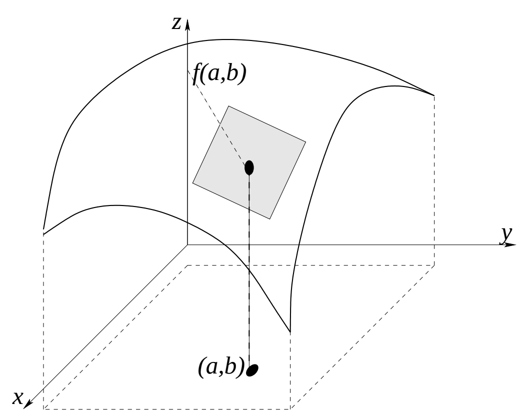

FIGURE 3 – Plan tangent à une surface en un point.

Une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est continûment différentiable si ses m applications coordonnées le sont. On peut donc lui appliquer, coordonnée par coordonnée, le théorème 14. La différentielle en un point de $\mathbb{R}^n$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Sa matrice est la *matrice jacobienne*. Ici encore nous donnons la définition en dimension réduite pour des raisons de clarté.

Définition 16. *Soit Φ une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.*

$$\Phi \; : \; \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (f(x,y,z), g(x,y,z)) \end{array}$$

Soit (a,b,c) un point de $\mathbb{R}^3$. On appelle matrice jacobienne *de Φ au point (a,b,c), la matrice des dérivées partielles de f et g :*

$$MJ(\Phi)(a,b,c) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} (a,b,c)$$

On appelle différentielle *de Φ au point (a,b,c) l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est la matrice jacobienne.*

Voici la matrice jacobienne au point (a,b,c) pour la surface et le volume d'un parallélépipède en fonction de ses trois dimensions.

$$MJ = \begin{pmatrix} 2(b+c) & 2(a+c) & 2(a+b) \\ bc & ac & ab \end{pmatrix} .$$

3.3 Dualité

D'après le théorème 9, une combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire. Donc l'ensemble des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel. L'espace des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$ joue un rôle important autant en algèbre qu'en analyse : on l'appelle l'espace dual, et on le note E^*.

Une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ s'appelle une *forme linéaire*. Plaçons-nous d'abord en dimension finie : E est un espace vectoriel de dimension n. Sauf si celle-ci est nulle, l'image d'une forme linéaire est $\mathbb{R}$, et son rang est donc 1. D'après le théorème du rang (théorème 12), la dimension du noyau est $n-1$. Le noyau d'une forme linéaire s'appelle un hyperplan (un plan ordinaire si E est de dimension 3).

Munissons E d'une base, $(b_1, \ldots, b_n)$. Parmi les formes linéaires définies sur E, les *applications coordonnées* jouent un rôle particulier. Nous les notons $b_1^*, \ldots, b_n^*$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, b_i^* est l'application qui à un vecteur de E associe sa i-ième coordonnée dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$.

$$b_i^* \; : \quad v = x_1\, b_1 + \cdots + x_i\, b_i + \cdots + x_n\, b_n \longmapsto b_i^*(v) = x_i \; .$$

Théorème 15. *La famille $(b_1^*, \ldots, b_n^*)$ est une base de E^*.*

En conséquence, l'espace vectoriel E et son dual E^* ont la même dimension.

Démonstration : Montrons d'abord que la famille $(b_1^*, \ldots, b_n^*)$ est libre. Supposons que la forme linéaire

$$v^* = \lambda_1^*\, b_1^* + \cdots + \lambda_n^*\, b_n^*$$

est nulle, c'est-à-dire que l'image qu'elle donne de tout vecteur est 0. En particulier l'image qu'elle donne du vecteur b_i est nulle. Or,

$$b_i^*(b_i) = 1 \quad \text{et} \quad b_j^*(b_i) = 0\,,\ \forall j \neq i\ .$$

Donc $v^*(b_i) = \lambda_i^* = 0$. La forme v^* ne peut être nulle que si tous les λ_i^* sont nuls.

Montrons maintenant que la famille $(b_1^*, \ldots, b_n^*)$ est génératrice. Soit v^* une forme linéaire quelconque. D'après la proposition 8, v^* est déterminée par les images qu'elle donne aux vecteurs de la base $(b_1, \ldots, b_n)$. Notons $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*$ ces images :

$$\forall i = 1, \ldots, n\ , \quad v^*(b_i) = \lambda_i^* \in \mathbb{R}\ .$$

On vérifie facilement que v^* est combinaison linéaire des b_i^* :

$$v^* = \lambda_1^*\, b_1^* + \cdots + \lambda_n^*\, b_n^*\ .$$

□

Le mot « dual » évoque une certaine symétrie entre E et E^* : tout se passe comme si E^* était une image miroir de E. On note traditionnellement par $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ le *crochet de dualité*, à savoir l'image d'un vecteur par une forme linéaire :

$$\langle v^*\,, v \rangle = v^*(v) \in \mathbb{R}\ .$$

Le crochet de dualité est linéaire par rapport à chacun des arguments.

$$\begin{aligned} \langle v^*\,, \lambda\, v_1 + \mu v_2 \rangle &= \lambda \langle v^*, v_1 \rangle + \mu \langle v^*, v_2 \rangle \\ \langle \lambda^*\, v_1^* + \mu^* v_2^*\,, v \rangle &= \lambda^* \langle v_1^*, v \rangle + \mu^* \langle v_2^*, v \rangle\ . \end{aligned}$$

Le résultat suivant illustre l'aspect miroir de la dualité.

Proposition 9. *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Il existe une application linéaire unique f^*, de F^* vers E^*, telle que pour tout $v \in E$ et pour tout $w^* \in F^*$,*

$$\langle w^*\,, f(v) \rangle = \langle f^*(w^*)\,, v \rangle\ .$$

Soit $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E, $(c_1, \ldots, c_m)$ une base de F, et

$$A = (a_{i,j})\ ,\ i = 1, \ldots, m\ ,\ j = 1, \ldots, n\ ,$$

la matrice de f dans ces bases. Alors la matrice de f^* dans les bases $(c_1^*, \ldots, c_m^*)$ (au départ) et $(b_1^*, \ldots, b_n^*)$ (à l'arrivée) est la transposée de la matrice A, à savoir la matrice à n lignes et m colonnes :

$${}^tA = (a_{j,i})\ ,\ j = 1, \ldots, n\ ,\ i = 1, \ldots, m\ .$$

Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} .$$

Démonstration : La double linéarité du crochet de dualité permet de travailler uniquement sur les images des vecteurs de bases. Soit i un indice entre 1 et m et j un indice entre 1 et n.

$$\langle c_i^* \,, f(b_j)\rangle = \langle c_i^* \,, \sum_{i'=1}^{n} a_{i',j}\, c_{i'}\rangle = a_{i,j} \;,$$

par définition de la base duale $(c_1^*, \ldots, c_m^*)$. Notons $(a_{j,i}^*)_{j=1,\ldots,n,i=1,\ldots,m}$ la matrice de l'application f^*. On a de même :

$$\langle f^*(c_i^*) \,, b_j\rangle = \langle \sum_{j'=1}^{m} a_{j',i}^*\, b_{j'}^* \,, b_j\rangle = a_{j,i}^* \;,$$

et donc nécessairement $a_{i,j} = a_{j,i}^*$, car $\langle c_i^* \,, f(b_j)\rangle = \langle f^*(c_i^*) \,, b_j\rangle$.

La relation $\langle w^* \,, f(v)\rangle = \langle f^*(w^*) \,, v\rangle$ étant vérifiée pour $v = b_j$ et $w^* = c_i^*$, elle est vraie pour tous $v \in E$ et $w^* \in F^*$, par la double linéarité. D'où l'existence. L'application f est unique car elle est déterminée par sa matrice.

□

La notion de dualité prend toute sa puissance en dimension infinie pour les espaces de fonctions, quand on y ajoute une notion de continuité que nous n'expliciterons pas. Le dual d'un espace de fonctions est l'ensemble des formes linéaires continues définies sur cet espace.

Comme premier exemple, notons $\mathcal{C}_0([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$. Voici une forme linéaire définie sur $\mathcal{C}_0([0,1])$

$$f \in \mathcal{C}_0([0,1]) \longmapsto \int_0^1 f(x)\, dx \;.$$

Soit g un élément quelconque de $\mathcal{C}_0([0,1])$. L'application

$$f \in \mathcal{C}_0([0,1]) \longmapsto \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \;,$$

est encore une forme linéaire sur $\mathcal{C}_0([0,1])$. Il y en a beaucoup d'autres : le dual de $\mathcal{C}_0([0,1])$ est l'espace des mesures de Radon sur $[0,1]$.

En dimension infinie, les duaux ont la propriété de s'emboîter à l'inverse des espaces fonctionnels dont ils sont issus. Par exemple l'espace $\mathcal{C}_1([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$ et dérivables sur $]0,1[$ est inclus dans $\mathcal{C}_0([0,1])$. Son dual contient le dual de $\mathcal{C}_0([0,1])$. Pour fabriquer un très gros espace vectoriel, qui englobe les fonctions, les mesures, et bien d'autres objets utiles, il faut prendre le dual d'un espace fonctionnel très petit. En novembre 1944, au cours de ce qu'il décrit comme « la plus belle nuit de sa vie » dans ses mémoires, Laurent Schwartz a eu l'idée de prendre le dual de l'espace des fonctions indéfiniment dérivables, nulles en dehors d'un intervalle fermé et borné : $\mathcal{C}^b_\infty$. Les objets de ce dual généralisent à la fois les fonctions et les mesures : ce sont les *distributions*.

Un des miracles des distributions est la possibilité de les dériver à volonté, par la formule « miroir » :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^b_\infty\;, \quad \langle f\,, \phi' \rangle = -\langle f'\,, \phi \rangle\;.$$

Prenons pour f la fonction de Heaviside :

$$f\;; \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Cette fonction s'identifie à la forme linéaire

$$\phi \longmapsto \langle f\,, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx\;.$$

Sa dérivée au sens des distributions est la *masse de Dirac en* 0, à savoir la forme linéaire δ_0, définie par :

$$\delta_0 \;:\quad \phi \longmapsto \langle \delta_0\, \phi \rangle = \phi(0)\;.$$

Ceci n'a pas surpris les physiciens, qui depuis un quart de siècle ne se privaient pas de dériver la fonction de Heaviside (et d'autres) chaque fois qu'ils en avaient besoin...

3.4 Codes de Hamming

Le plus petit corps de nombres, celui des entiers modulo 2, ne contient que 0 et 1. On le note $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Sur l'ensemble des n-uplets de 0 ou de 1, les opérations de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agissent composante par composante. Par exemple pour $n = 4$:

$$(0, 1, 0, 1) + (1, 0, 0, 1) = (1, 1, 0, 0)\;.$$

Cet ensemble, noté $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, tout comme $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Deux éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ qui diffèrent en une seule coordonnée sont dits *voisins*. Si on met une arête entre deux n-uplets voisins, on obtient un graphe, que l'on appelle l'*hypercube* de dimension n. Pourquoi hypercube ? La figure 4 devrait vous convaincre.

L'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ est-il une fantaisie de mathématicien ? Pas du tout ! Les ordinateurs ne connaissent que les 0 et les 1 (les bits), rangés en mémoire par n-uplets, avec $n = 8$ (les octets ou bytes), $n = 16$, $n = 32$, $n = 64$, ... Ils peuvent représenter n'importe quel ensemble fini, pourvu que l'on ait choisi au préalable une application

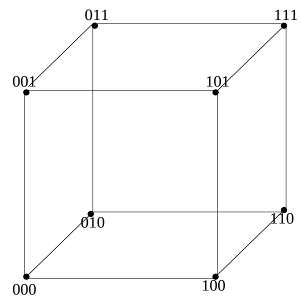

FIGURE 4 – Cube en dimension 3. Chaque arête joint deux triplets qui diffèrent par une seule coordonnée.

injective de cet ensemble dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ pour un certain n. Cette application s'appelle un *code*. Le plus connu est le code ASCII standard qui associe 64 caractères (chiffres, lettres, \$, %, /, ...) aux éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$.

Les transmissions entre ordinateurs, que ce soit par câble, par ondes radio ou infrarouges, sont des échanges de signaux composés de paquets de 0 et de 1, qui ont été codés par l'émetteur et seront décodés par le récepteur. Mais si dans un paquet une erreur est commise (un 0 est changé en 1 ou le contraire), alors le paquet entier, et peut-être tout le message, seront perdus. A moins que l'on utilise un *code correcteur d'erreurs*.

Un code est « correcteur d'erreurs » si parmi les voisins dans l'hypercube d'un élément codé, on ne trouve jamais ni un autre élément codé, ni l'un de ses voisins. De cette façon, si un n-uplet est reçu, soit il a été transmis sans erreur et il figure dans le code, soit une erreur a été commise, et elle sera corrigée en remplaçant le n-uplet reçu par celui de ses voisins qui figure dans le code. Cela ne fonctionne plus si deux erreurs ou plus ont été commises, mais on peut généraliser : il existe des codes capables de corriger plusieurs erreurs.

Contentons nous pour l'instant de comprendre le problème en dimension 4 (cf. figure 5). Supposons que $(0,0,0,0)$ code un objet, alors aucun de ses 4 voisins ne peut être codant ; mais si un de ces voisins est reçu, il faut pouvoir le relier à $(0,0,0,0)$ sans ambiguïté. Donc les voisins des voisins de 0 ne peuvent pas non plus coder. Il reste 5 vecteurs codants possibles, $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,0,1)$, $(1,1,1,0)$ et $(1,1,1,1)$. Si l'un de ceux-là est codant, aucun des 4 autres ne peut l'être. Donc on ne peut utiliser que 2 éléments, par exemple $(0,0,0,0)$ et $(1,1,1,1)$. Si une coordonnée est changée, on pourra retrouver où est l'erreur et la corriger. Observons au passage que l'ensemble $\{(0,0,0,0),(1,1,1,1)\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$: c'est une « droite » vectorielle.

Nous allons présenter un exemple de code correcteur d'erreur, le *code de Hamming*. Notre objectif sera surtout de relier ses propriétés aux applications linéaires sur l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

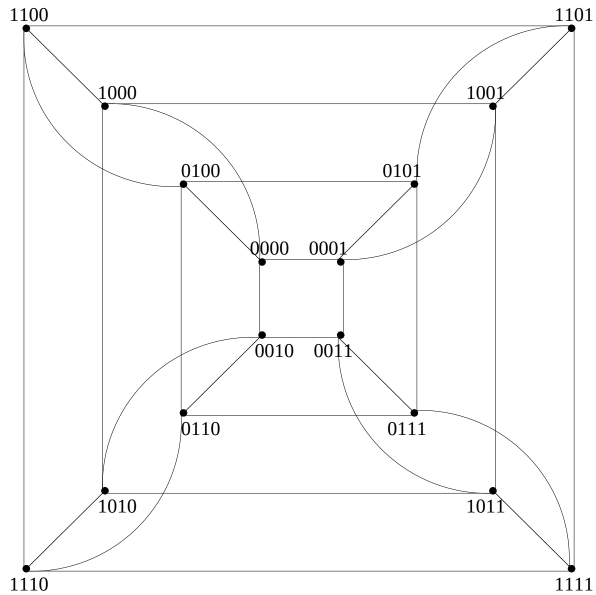

FIGURE 5 – Hypercube en dimension 4. Chaque arête joint deux quadruplets qui diffèrent par une seule coordonnée.

Nous considérons le problème de coder les éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ par ceux de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$, donc de définir une application injective de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$. Evidemment, m doit être plus grand que n. Pour les codes de Hamming, on prend $m = 2^k - 1$, et $n = m - k$, où k est un certain entier. Nous prendrons l'exemple $k = 3$, donc nous coderons les 16 éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ par autant d'éléments choisis dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$ (128 éléments). Dans la pratique, on utilise les codes de Hamming pour des valeurs de k beaucoup plus élevées, et la « place perdue » n'est pas aussi importante qu'il y paraît. Comme nous l'avons vu précédemment, si on veut pouvoir corriger une erreur, deux mots du code ne peuvent ni être voisins, ni avoir un voisin en commun. Ils doivent donc différer en au moins 3 coordonnées. Nous devons donc trouver une application de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$, telle que les images de deux vecteurs quelconques diffèrent en 3 coordonnées au moins.

Dans toute la suite, les espaces vectoriels considérés sont munis de leur base canonique. Considérons l'application linéaire f, de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$, définie par la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons a_1, a_2, a_3, a_4 les 4 vecteurs colonnes de A. Pour vérifier que f est injective, c'est-à-dire que son noyau est réduit au seul vecteur nul, il suffit de montrer que son image est de dimension 4, ou encore que les vecteurs a_1, a_2, a_3, a_4 forment une famille libre. On voit immédatement que c'est le cas en examinant leurs 4 dernières coordonnées.

Les 4 vecteurs a_1, a_2, a_3, a_4 codent les 4 vecteurs de la base canonique de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$. Pour obtenir le code (l'image par f) d'un autre vecteur de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$, il suffit de le multiplier par la matrice A (toutes les opérations se font dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire modulo 2). Voici par exemple le calcul de $f(v)$, avec $v = (1, 1, 0, 1)$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observons que les 4 dernières lignes de la matrice A sont celles de la matrice identité en dimension 4. Donc l'image par f d'un vecteur de 4 bits quelconque se termine par ces mêmes 4 bits. Les trois bits de tête sont des « bits de correction ». Nous laissons au lecteur le soin de calculer les images par f des 16 vecteurs de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ et de vérifier que ces images diffèrent deux à deux en au moins 3 bits.

Pour comprendre comment fonctionne la correction d'erreur, il faut considérer l'application linéaire g, de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, dont la matrice B est la suivante.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquez que les colonnes de B sont les écritures en base 2 des entiers de 1 à 7.

Proposition 10. *Le noyau de l'application g de matrice B et l'image de l'application f de matrice A sont le même sous-espace vectoriel de dimension* 4 *de* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$.

Démonstration : Il est facile de vérifier que l'image par g des 4 vecteurs a_1, a_2, a_3, a_4 est le vecteur nul. Ceci entraîne que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$. Il suffit alors de montrer que les dimensions de $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(g)$ sont toutes deux égales à 4. Nous l'avons déjà fait pour $\text{Im}(f)$. Pour $\text{Ker}(g)$, observons que les trois premiers vecteurs colonnes de B sont les 3 vecteurs de la base canonique en dimension 3. Donc $\mathrm{Im}(g)$ a pour dimension 3, et donc $\mathrm{Ker}(g)$ a pour dimension $7 - 3 = 4$, d'après le théorème du rang. □

Par la proposition précédente, l'image par f d'un vecteur quelconque est dans le noyau de g. Donc si un code a été correctement transmis, son image par g doit être nulle. Reprenons le vecteur $v = (1, 1, 0, 1)$ et supposons maintenant qu'une erreur a été commise sur son codage : au lieu de transmettre le vecteur $f(v) = (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$, on a transmis $(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$, c'est-à-dire que le cinquième bit a été changé : c'est $f(v) + e_5$ qui a été transmis, avec $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$. Puisque $g(f(v))$ est le vecteur nul, l'image par g de $f(v) + e_5$ est $g(e_5)$, à savoir la cinquième colonne de B.

Etant donné un vecteur de 7 bits reçu, on commence par prendre son image par g (en le multipliant par la matrice B). Si cette image est nulle, alors il n'y a pas eu d'erreur de transmission, et il suffit de lire les 4 derniers bits du vecteur transmis. Si l'image est égale à l'un des vecteurs colonnes de B, disons le i-ième, alors le i-ième bit du vecteur reçu est faux : on le corrige et on lit ensuite les 4 derniers bits du vecteur corrigé.